中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 3 期: 299～305
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Strebel 点

胡韵*, 沈玉良

苏州大学数学系, 苏州 215006

* E-mail: huyun_80@163.com

收稿日期: 2008-05-21; 接受日期: 2008-10-07
新世纪优秀人才支持计划 (编号: NCET-06-0504) 和国家自然科学基金 (批准号: 10771153) 资助项目

摘要 无限型 Riemann 曲面 X 上的一个 Beltrami 系数 μ 确定了 Teichmüller 空间 $T(X)$ 中的一个点 $[\mu]_T$, 同时也确定了 $T(X)$ 在基点处的切空间中的一个点 $[\mu]_B$. 本文讨论 $[\mu]_T$ 是一个 Strebel 点和 $[\mu]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点的等价性问题.

关键词 Teichmüller 空间 Strebel 点 无穷小 Strebel 点

MSC(2000) 主题分类 32G15, 30C62, 30F60

1 引言

设 X 是一个双曲型 Riemann 曲面, 以复平面上的单位圆 Δ 为万有覆盖. 记 $\mathrm{Belt}(X)$ 为 X 上所有本性有界的 Beltrami 微分所组成的 Banach 空间, $M(X)$ 表示它的单位球. Teichmüller 空间 $T(X)$ 是 $M(X)$ 中所有元素的等价类的集合, 而 $\mathrm{Belt}(X)$ 中所有元素的无穷小等价类的集合 $B(X)$ 是 $T(X)$ 在基点处的切空间. 本文将讨论 $T(X)$ 中的 Strebel 点以及 $B(X)$ 中的无穷小 Strebel 点.

Hamilton[1], Krushkal[2] 和 Reich-Strebel[3] 的工作说明了 $M(X)$ 中的一个 Beltrami 系数 μ 为极值的充分必要条件是 μ 是无穷小极值的. Bozin 等 [4](也参见文献 [5]) 证明了 μ 是唯一极值的充分必要条件是 μ 是唯一无穷小极值的. 另一方面, 当 X 是无限型曲面, 从而 $T(X)$ 是无穷维空间时, (无穷小) Strebel 点在 $T(X)$ 的几何的研究中有着重要的作用 [6]. Lakic[7] 证明了 $T(X)$ 中的 Strebel 点在 $T(X)$ 中是开和稠密的. 类似地, Liu 和本文第 2 作者 (参见文献 [8]) 证明了 $B(X)$ 中的无穷小 Strebel 点在 $B(X)$ 中是开和稠密的. 对应于极值性和唯一极值性, 一个很自然的问题是, 对于 $M(X)$ 中的一个 Beltrami 系数 μ, μ 表示 $T(X)$ 中的一个 Strebel 点是否等价于 μ 表示 $B(X)$ 中的一个无穷小 Strebel 点. 当 μ 是极值时, 答案显然是肯定的. 然而, 当 μ 不是极值时, Fan-Chen[9] 就 X 是单位圆的情形给出了上述问题的一个反例.

本文首先就 X 是单位圆的情形, 通过一种非常简单的方法给出上述问题的一个反例. 事实上, 我们的构造包含了更多的信息. 然后, 从两个方面来推广我们的构造, 一方面将对任意

引用格式: 胡韵, 沈玉良. Strebel 点. 中国科学 A, 2009, 39(3): 299–305
Hu Y, Shen Y L. On Strebel points. Sci China Ser A, 2009, 52, DOI: 10.1007/s11425-009-0043-5

的无限型曲面 X 给出上述问题一个否定的回答, 另一方面, 就 X 是单位圆的情形, 对所有充分小的 Beltrami 系数 μ 给出上述问题一个否定的回答.

2 预备知识

本节回顾极值拟共形映射和 Teichmüller 空间理论中的一些基本概念及结果 [10].

给定 $\mu \in M(X)$, 记 f^μ 是 X 上以 μ 为 Beltrami 系数的拟共形映射. 在相差 $f^\mu(X)$ 上的一个共形映射下, f^μ 是唯一确定的. $M(X)$ 中的两个元素 μ 和 ν 称为是等价的, 是指存在一个从 $f^\mu(X)$ 到 $f^\nu(X)$ 的共形映射 c, 使得 $c \circ f^\mu$ 和 f^ν 模边界 ∂X 同伦. μ 的等价类记为 $[\mu]_{T(X)}$ 或简单记为 $[\mu]_T$. Teichmüller 空间 $T(X)$ 定义为 $M(X)$ 中所有 Beltrami 系数等价类的集合.

记 $A(X)$ 为 X 上所有 L^1-可积的全纯二次微分所组成的 Banach 空间. $A(X)$ 可以看作 $T(X)$ 在基点 $[0]_T$ 处的余切空间. $\mathrm{Belt}(X)$ 中的两个元素 μ 和 ν 称为是无穷小等价的, 是指对所有的 $\phi \in A(X)$, $\iint_X \mu\phi = \iint_X \nu\phi$. μ 的无穷小等价类记为 $[\mu]_{B(X)}$ 或简单记为 $[\mu]_B$. 记 $B(X)$ 是 $\mathrm{Belt}(X)$ 中所有 Beltrami 微分的无穷小等价类的集合. $B(X)$ 可以看作 $T(X)$ 在基点 $[0]_T$ 处的切空间.

任意 $\mu \in M(X)$, 记 $M(\mu)$ 是 $M(X)$ 中所有与 μ 等价的 Beltrami 系数的集合, 并记

$$k(\mu) = \inf\{\|\nu\|_\infty : \nu \in M(\mu)\}.$$

$\nu \in M(\mu)$ 称为是极值的是指 $\|\nu\|_\infty = k(\mu)$. 在 $M(\mu)$ 中至少存在一个极值的 Beltrami 系数. X 上的一个拟共形映射 f 是极值的是指它的 Beltrami 系数 μ 在 $M(\mu)$ 中是极值的.

任给 $\mu \in \mathrm{Belt}(X)$, 记 $\mathrm{Belt}(\mu)$ 是 $\mathrm{Belt}(X)$ 中所有与 μ 无穷小等价的 Beltrami 微分的集合, 并记

$$\|\mu\| = \inf\{\|\nu\|_\infty : \nu \in \mathrm{Belt}(\mu)\}.$$

根据泛函分析理论中的 Hahn-Banach 延拓定理和 Riesz 表示定理, $\|\mu\|$ 有如下等价定义:

$$\|\mu\| = \sup_{\phi \in A_1(X)} \mathrm{Re} \iint_X \mu\phi,$$

其中 $A_1(X)$ 是 $A(X)$ 中的单位球面. $\nu \in \mathrm{Belt}(\mu)$ 称为无穷小极值, 是指 $\|\nu\|_\infty = \|\mu\|$. 同样, 在 $\mathrm{Belt}(\mu)$ 中至少存在一个无穷小极值的 Beltrami 微分.

Hamilton, Krushkal 和 Reich-Strebel (见文献 [1–3] 或文献 [10]) 证明了一个 Beltrami 系数 $\mu \in M(X)$ 是极值的充分必要条件为 μ 是无穷小极值的, 即 μ 满足 Hamilton-Krushkal 条件 $\|\mu\|_\infty = \|\mu\|$. 此时存在 $A_1(X)$ 中的一个序列 (ϕ_n), 称为 Hamilton 序列, 使得当 $n \to \infty$ 时, $\mathrm{Re} \iint_X \mu\phi_n \to \|\mu\|_\infty$. 进一步地, 或者 μ 是 Teichmüller 型的, 即存在 $\phi \in A_1(X)$, 使得 $\mu = \|\mu\|_\infty |\phi|/\phi$, 或者 (ϕ_n) 是一个退化序列, 即 (ϕ_n) 在 X 上内闭一致收敛于零.

定义 (无穷小) Strebel 点. 对于 $\mu \in M(X)$, 记

$$h(\mu) = \inf\{\|\nu|X - E\|_\infty : \nu \in M(\mu), E \subset X\text{紧}\}.$$

显然, $h(\mu) \leqslant k(\mu) \leqslant \|\mu\|_\infty$. 如果 $h(\mu) < k(\mu)$, 则称 $[\mu]_T$ 是一个 Strebel 点. 此时, 根据 Strebel 标架准则, $M(\mu)$ 包含一个 Teichmüller 极值. 类似地, 对于 $\mu \in \mathrm{Belt}(X)$, 定义

$$b(\mu) = \inf\{\|\nu|X - E\|_\infty : \nu \in \mathrm{Belt}(\mu), E \subset X\text{紧}\}.$$

显然 $b(\mu) \leqslant \|\mu\| \leqslant \|\mu\|_\infty$. 如果 $b(\mu) < \|\mu\|$, 则称 $[\mu]_B$ 为一个无穷小 Strebel 点, 并且根据 Strebel 无穷小标架准则, $\mathrm{Belt}(\mu)$ 含一个无穷小 Teichmüller 极值. 我们还需要如下结果 [11]:

$$b(\mu) = \sup \lim_{n\to\infty} \sup \mathrm{Re} \iint_X \mu\phi_n,$$

其中的上确界取自 $A_1(X)$ 中的所有退化序列 (ϕ_n).

3 两个例子

最近, Fan-Chen[9] 证明了存在 $\mu \in M(\Delta)$, 使得 $[\mu]_T$ 是一个 Strebel 点而 $[\mu]_B$ 不是一个无穷小 Strebel 点, 反之亦然. 本节将给出这个结果一个非常简单的证明. 事实上, 以下的两个引理包含了更多的信息.

引理 3.1 设 D 是某一 Riemann 曲面上的一个 Jordan 区域, 则存在一个全纯映射 $F : \Delta \to M(D)$ 满足如下条件 :

(1) 对所有的 $t \in \Delta$, $[F(t)]_T = [0]_T$;

(2) 对所有的 $t \in \Delta$, $b(F(t)) = 0$;

(3) 只要 $t_1 \neq t_2$, $[F(t_1)]_B \neq [F(t_2)]_B$.

证明 对于 $t \in \Delta$, 考虑如下从单位圆 Δ 到自身的拟共形映射:

$$f_t(z) = z - (1 - |z|)t, \quad z \in \Delta.$$

这个映射是属于 Reich 的 [12]. 当 t 很小时, f_t 可以逼近著名的 Teichmüller shift 映射 (参见文献 [13]). 这个映射在其他场合也被多次应用 (见文献 [9, 14]). 记

$$F(t)(z) = \frac{\partial_{\bar z} f_t}{\partial_z f_t} = \frac{tz}{2|z| + t\bar z}.$$

显然, F 是从 Δ 到 $M(\Delta)$ 的全纯映射, $\|F(t)\|_\infty = |t|/(2 - |t|)$. 由于当 $|z| = 1$ 时, $f_t(z) = z$, 因而对所有的 $t \in \Delta$, $[F(t)]_T = [0]_T$.

任给 $\phi \in A(\Delta)$,

$$\iint_\Delta F(t)\phi = \iint_\Delta \frac{tz}{2|z| + t\bar z}\phi(z)dxdy = -\frac{\pi t^2}{2}\int_0^1 r\phi\left(-\frac{tr}{2}\right)dr.$$

于是, 对于 $A_1(\Delta)$ 中的任意退化序列 (ϕ_n),

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Delta F(t)\phi_n = -\frac{\pi t^2}{2} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 r\phi_n\left(-\frac{tr}{2}\right)dr = 0,$$

因此, 对所有的 $t \in \Delta$, $b(F(t)) = 0$. 另一方面, 假设 $t_1 \neq t_2$. 取 $\phi(z) = \frac{n+2}{2\pi} z^n \in A_1(\Delta)$, 于是

$$\iint_\Delta (F(t_1) - F(t_2))\phi = \left(-\frac{t_2}{2}\right)^{n+2} - \left(-\frac{t_1}{2}\right)^{n+2},$$

因此, $[F(t_1)]_B \neq [F(t_2)]_B$. 这证明了引理 3.1 在 $D = \Delta$ 的情形.

对一般的 Jordan 区域 D, 取 D 到 Δ 的共形映射 γ, 并记 $\tilde F(t) = F(t) \circ \gamma \overline{\gamma'}/\gamma'$. 于是 $\tilde F$ 就是所求的映射.

引理 3.2 设 D 是某一 Riemann 曲面上的一个 Jordan 区域, 则存在一个全纯映射 $G : \Delta \to M(D)$ 满足如下条件 :

(1) 对所有的 $t \in \Delta$, $[G(t)]_B = [0]_B$;

(2) 对所有的 $t \in \Delta$, $h(G(t)) = 0$;

(3) 只要 $t_1 \neq \pm t_2$, $[G(t_1)]_T \neq [G(t_2)]_T$.

证明 类似于引理 3.1, 只需考虑 $D=\Delta$ 的情形. 根据引理 3.1, 很自然考虑映射

$$G(t)(z)=t\frac{z}{|z|}.$$

Reich[15] 对这个映射进行了深入的研究. 我们证明 G 满足引理 3.2.

任给 $\phi\in A(\Delta)$,

$$\iint_{\Delta}G(t)\phi=t\iint_{\Delta}\frac{z}{|z|}\phi(z)dxdy=0,$$

因此, 对所有的 $t\in\Delta$, $[G(t)]_B=[0]_B$.

继续证明 G 满足其他性质. 利用 Reich[15] 的一些讨论. 考虑

$$g_t(z)=z+2t|z|+t^2\bar{z},\quad z\in\Delta,$$

其中 g_t 是 Δ 上的拟共形映射, 具有 Beltrami 系数 $G(t)$. 由于 g_t 在单位圆周上是光滑的, 因此对所有的 $t\in\Delta$, $h(G(t))=0$. 记 $\tilde{g}_t(z)=z+2t+t^2\bar{z}, z\in\Delta$, 并记 $\tilde{G}(t)(z)=\frac{\partial_{\bar{z}}\tilde{g}_t}{\partial_z\tilde{g}_t}=t^2$. 由于 $\tilde{g}_t$ 和 g_t 在单位圆周上取值相同, $[\tilde{G}(t)]_T=[G(t)]_T$. 另一方面, 当 $t_1\neq\pm t_2$ 时, 显然成立 $[\tilde{G}(t_1)]_T\neq[\tilde{G}(t_2)]_T$, 从而 $[G(t_1)]_T\neq[G(t_2)]_T$.

注记 1 引理 3.1 说明存在 $M(\Delta)$ 一个 Beltrami 系数全纯族, 其中每一个 Beltrami 系数表示 $B(\Delta)$ 中的无穷小 Strebel 点, 但表示 $T(\Delta)$ 中的基点, 而引理 3.2 说明存在 $M(\Delta)$ 一个 Beltrami 系数全纯族, 其中每一个 Beltrami 系数表示 $T(\Delta)$ 中的无穷小 Strebel 点, 但表示 $B(\Delta)$ 中的基点.

4 推广: I

本节将上一节的结果从单位圆推广到任意无限型 Riemann 曲面上.

需要如下两个引理.

引理 4.1[16–18] 设 X 是一个无限型 Riemann 曲面, D 是 X 上的一个 Jordan 区域. 如果 $\mu\in M(X)$ 满足 $[\mu]_{T(X)}=[0]_{T(X)}$, 且 $\mu|X-D=0$, 则 $[\mu|D]_{T(D)}=[0]_{T(D)}$.

引理 4.2 设 X 是一个无限型 Riemann 曲面, D 是 X 上的一个 Jordan 区域. 如果 $\mu\in\mathrm{Belt}(X)$ 满足 $[\mu]_{B(X)}=[0]_{B(X)}$, 且 $\mu|X-D=0$, 则 $[\mu|D]_{B(D)}=[0]_{B(D)}$.

证明 根据文献 [19–21] 的一个基本引理, 存在一条从 $(0,t_0)$ 到 $M(X)$ 的光滑曲线 $\mu(t)=t\mu+o(t)$, 满足 $[\mu(t)]_{T(X)}=[0]_{T(X)}$, 且 $\mu(t)|X-D=0$. 引理 4.1 说明 $[\mu(t)|D]_{T(D)}=[0]_{T(D)}$. 根据 Teichmüller 理论中的一个基本结果 (见文献 [22, 第 5 章定理 6]), $[\mu|D]_{B(D)}=[0]_{B(D)}$.

引理 3.1 可以推广为

定理 4.1 设 X 是一个无限型 Riemann 曲面. 存在一个全纯映射 $F:\Delta\to M(X)$ 满足如下性质:

(1) 对所有的 $t\in\Delta$, $[F(t)]_T=[0]_T$;

(2) 对所有的 $t\in\Delta$, $b(F(t))=0$;

(3) 只要 $t_1\neq t_2$, $[F(t_1)]_B\neq[F(t_2)]_B$.

证明 取 X 上的一个 Jordan 区域 D. 根据引理 3.1, 存在一个全纯映射 $\tilde{F}:\Delta\to M(D)$, 对任意 $t\in\Delta$, $[\tilde{F}(t)]_{T(D)}=[0]_{T(D)}$, $b(\tilde{F}(t))=0$, 且当 $t_1\neq t_2$ 时, $[\tilde{F}(t_1)]_{B(D)}\neq[\tilde{F}(t_2)]_{B(D)}$. 定义 $F(t)\in M(X)$ 如下: 在 D 上, $F(t)=\tilde{F}(t)$, 而在 $X-D$ 上, $F(t)=0$. 显然, $F:\Delta\to M(X)$

全纯, 且对任意 $t \in \Delta$, $[F(t)]_{T(X)} = [0]_{T(X)}$, $b(F(t)) = 0$. 引理 4.2 说明, 只要 $t_1 \neq t_2$, $[F(t_1)]_{B(X)} \neq [F(t_2)]_{B(X)}$.

以下定理是引理 3.2 的推广.

定理 4.2 设 X 是一个无限型 Riemann 曲面. 存在一个全纯映射 $G : \Delta \to M(X)$ 满足如下性质:

(1) 对所有的 $t \in \Delta$, $[G(t)]_B = [0]_B$;

(2) 对所有的 $t \in \Delta$, $h(G(t)) = 0$;

(3) 只要 $t_1 \neq \pm t_2$, $[G(t_1)]_T \neq [G(t_2)]_T$.

证明 取 X 上的一个 Jordan 区域 D. 根据引理 3.2, 存在一个全纯映射 $\tilde{G} : \Delta \to M(D)$, 对任意 $t \in \Delta$, $[\tilde{G}(t)]_{B(D)} = [0]_{B(D)}$, $h(\tilde{G}(t)) = 0$, 且当 $t_1 \neq \pm t_2$ 时, $[\tilde{G}(t_1)]_{T(D)} \neq [\tilde{G}(t_2)]_{T(D)}$. 定义 $G(t) \in M(X)$ 如下: 在 D 上, $G(t) = \tilde{G}(t)$, 而在 $X - D$ 上, $G(t) = 0$. 显然, $G : \Delta \to M(X)$ 全纯, 且对任意 $t \in \Delta$, $[G(t)]_{B(X)} = [0]_{B(X)}$, $h(G(t)) = 0$. 引理 4.1 说明, 只要 $t_1 \neq \pm t_2$, $[G(t_1)]_{T(X)} \neq [G(t_2)]_{T(X)}$.

5 推广: II

本节将从另一方面推广第 3 节的结论. 主要结果是

定理 5.1 对任意 r, $0 < r < 1$, 存在常数 $M(r)$ 满足如下性质 : 任给非零 $\mu \in M(\Delta)$, 如果 $\|\mu\|_\infty \leqslant M(r)$, 且在 $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$ 上 $\mu = 0$, 则存在 $M(\Delta)$ 中的两个 Beltrami 系数 μ_1, μ_2, $[\mu_1]_T = [\mu]_T$, $[\mu_1]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点, $[\mu_2]_B = [\mu]_B$, $[\mu_2]_T$ 是一个 Strebel 点.

证明 固定 r, $0 < r < 1$. 取非零 $\mu \in M(\Delta)$, 在 Δ_r 上 $\mu = 0$. 对于 $t \in \Delta$, 定义

$$\lambda_t(z) = \begin{cases} \dfrac{tz}{2|z| + t\bar{z}}, & z \in \Delta_r, \\ \mu(z), & z \in \Delta - \Delta_r. \end{cases}$$

显然, λ 是从 Δ 到 $M(\Delta)$ 的全纯映射, 且 $b(\lambda_t) \leqslant \|\mu\|_\infty$. 引理 3.1 和 4.2 说明, 对任意的 $t \in \Delta$, $[\lambda_t]_T = [\mu]_T$, 且当 $t_1 \neq t_2$ 时, $[\lambda_{t_1}]_B \neq [\lambda_{t_2}]_B$.

下面证明, 当 $\|\mu\|_\infty$ 充分小而 $|t|$ 接近于 1 时, $[\lambda_t]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点. 任给 $\varphi \in A(\Delta)$,

$$\begin{aligned} \left|\iint_\Delta \lambda_t \varphi\right| &= \left|\iint_{\Delta_r} \frac{tz}{2|z| + t\bar{z}} \varphi(z) dxdy + \iint_{\Delta - \Delta_r} \mu(z)\varphi(z) dxdy\right| \\ &\geqslant \left|\frac{\pi t^2}{2} \int_0^r \rho\varphi\left(-\frac{t\rho}{2}\right) d\rho\right| - \|\mu\|_\infty \iint_{\Delta - \Delta_r} |\varphi(z)| dxdy. \end{aligned}$$

取 $\varphi = \pi^{-1} \in A_1(\Delta)$, $\|\lambda_t\| \geqslant \frac{1}{\pi}|\iint_\Delta \lambda_t| \geqslant \frac{|t|^2 r^2}{4} - (1 - r^2)\|\mu\|_\infty$. 假定 $\|\mu\|_\infty < \frac{r^2}{4(2 - r^2)}$, 于是, 当 $|t|^2 > \frac{4(2 - r^2)\|\mu\|_\infty}{r^2}$ 时,

$$\|\lambda_t\| \geqslant \frac{|t|^2 r^2}{4} - (1 - r^2)\|\mu\|_\infty > \|\mu\|_\infty \geqslant b(\lambda_t),$$

因此, $[\lambda_t]_B$ 是 $B(\Delta)$ 的一个无穷小 Strebel 点.

继续证明定理 5.1 的第 2 部分. 记 $f = f^\mu$. 于是 $f|\Delta_r$ 是共形的. 不失一般性, 假定 $f(\Delta) = \Delta$, 且 $f(0) = 0$. 于是, $|z| = r$ 时, $|f(z)| \geqslant 4^{1-K} r^K$, 其中 $K = \frac{1 + \|\mu\|_\infty}{1 - \|\mu\|_\infty}$. 记 $r' = 4^{1-K} r^K$, 则 $\Delta_{r'} \subset f(\Delta_r)$. 取 $\|\mu\|_\infty \leqslant 1/3$, 使得 $r' \geqslant r^2/4$.

对于 $t \in \Delta$, 定义

$$\eta_t(z) = \begin{cases} t\dfrac{f(z)}{|f(z)|}\dfrac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}, & z \in f^{-1}(\Delta_{r'}), \\ \mu(z), & z \in \Delta - f^{-1}(\Delta_{r'}). \end{cases}$$

显然, η 是从 Δ 到 $M(\Delta)$ 的全纯映射, 且 $h(\eta_t) \leqslant \|\mu\|_\infty$. 现证明, 当 $\|\mu\|_\infty$ 充分小而 $|t|$ 接近于 1 时, η_t 是 $M(\Delta)$ 中所求的元素.

定义 σ_t 如下: 在 $\Delta_{r'}$ 上, $\sigma_t(z) = tz/|z|$, 在 $\Delta - \Delta_{r'}$ 上, $\sigma_t = 0$. 引理 3.2 及其证明过程说明 $[\sigma_t|\Delta_{r'}]_B$ 是 $B(\Delta_{r'})$ 中的基点. 因此 $\left[t\frac{f(z)}{|f(z)|}\frac{\overline{f'(z)}}{f'(z)}\right]_B$ 是 $B(f^{-1}(\Delta_{r'}))$ 中的基点. 所以, 对任意的 $t \in \Delta$, $[\eta_t]_B = [\mu]_B$. 引理 3.2 和 4.1 说明, 只要 $t_1 \neq \pm t_2$, 则 $[\eta_{t_1}]_T \neq [\eta_{t_2}]_T$. 现证明, 当 $\|\mu\|_\infty$ 充分小而 $|t|$ 接近于 1 时, $[\eta_t]_T$ 是一个 Strebel 点.

需要找到 $k(\eta_t)$ 的一个下界估计. 类似于引理 3.2 的证明, 定义

$$g_t(z) = \begin{cases} z + 2t|z| + t^2\bar{z}, & z \in \Delta_{r'}, \\ z + 2tr' + t^2{r'}^2/z, & z \in \Delta - \Delta_{r'}. \end{cases}$$

于是, σ_t 是 g_t 的 Beltrami 系数, 且 $f^{\eta_t} = g_t \circ f$, 因此,

$$k(\sigma_t) \leqslant \frac{k(\eta_t) + \|\mu\|_\infty}{1 + k(\eta_t)\|\mu\|_\infty} \leqslant k(\eta_t) + \|\mu\|_\infty.$$

定义 $\tilde{\sigma}_t$ 如下: 在 $\Delta_{r'}$ 上, $\sigma_t(z) = t^2$, 在 $\Delta - \Delta_{r'}$ 上, $\sigma_t = 0$. 记

$$\tilde{g}_t(z) = \begin{cases} z + 2tr' + t^2\bar{z}, & z \in \Delta_{r'}, \\ z + 2tr' + t^2{r'}^2/z, & z \in \Delta - \Delta_{r'}. \end{cases}$$

于是, $\tilde{\sigma}_t$ 是 $\tilde{g}_t$ 的 Beltrami 系数, 且 $\tilde{g}_t$ 和 g_t 在单位圆周上取值相同, 因此, $[\tilde{\sigma}_t]_T = [\sigma_t]_T$, 从而 $k(\sigma_t) = k(\tilde{\sigma}_t)$.

利用 Reich-Strebel 不等式 [3] 给出 $k(\tilde{\sigma}_t)$ 的一个下界, 即

$$\frac{1 - k(\tilde{\sigma}_t)}{1 + k(\tilde{\sigma}_t)} \leqslant \frac{1}{\pi}\iint_\Delta \frac{|1 - \tilde{\sigma}_t|^2}{1 - |\tilde{\sigma}_t|^2} = \frac{|1 - t^2|^2}{1 - |t|^4}{r'}^2 + 1 - {r'}^2.$$

当 t 是实数时,

$$k(\tilde{\sigma}_t) \geqslant \frac{t^2{r'}^2}{1 + t^2 - t^2{r'}^2} \geqslant \frac{t^2{r'}^2}{2} \geqslant \frac{t^2r^4}{32}.$$

因此, 假定 $\|\mu\|_\infty < r^4/64$. 于是, 当 $|t| > \frac{8\sqrt{\|\mu\|_\infty}}{r^2}$ 时,

$$k(\eta_t) \geqslant k(\tilde{\sigma}_t) - \|\mu\|_\infty \geqslant \frac{t^2r^4}{32} - \|\mu\|_\infty > \|\mu\|_\infty \geqslant h(\eta_t).$$

因此, $[\eta_t]_T$ 是一个 Strebel 点. 这完成了定理的证明.

注记 2 从证明过程可以知道, 可以取 $M(r) = r^4/64$.

推论 5.1 存在一个常数 M, 对于任意非零 Beltrami 系数 $\mu \in M(\Delta)$, 只要 $\|\mu\|_\infty \leqslant M$, 则存在 $M(\Delta)$ 中的两个 Beltrami 系数 ν_1 和 ν_2, $[\nu_1]_T = [\mu]_T$, $[\nu_1]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点, 而 $[\nu_2]_B = [\mu]_B$, $[\nu_2]_T$ 是一个 Strebel 点.

证明 固定 r, $0 < r < 1$. 假设 $\mu \in M(\Delta)$ 非零, 于是存在 $\mu_1 \in M(\Delta)$, $[\mu_1]_T = [\mu]_T$, 且 $\mu_1|\Delta_r = 0$. 这里，总可以选取 μ_1, 使得当 $\|\mu\|_\infty \to 0$ 时, $\|\mu_1\|_\infty \to 0$ (详见文献 [23]). 当 $\|\mu\|_\infty$ 充分小使得 $\|\mu_1\|_\infty \leqslant M(r)$ 时, 定理 5.1 说明, 存在 $M(\Delta)$ 中的 Beltrami 系数 ν_1, $[\nu_1]_T = [\mu_1]_T = [\mu]_T$, $[\nu_1]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点. 类似地, 存在 $\mu_2 \in M(\Delta)$, $[\mu_2]_B = [\mu]_B$, $\mu_2|\Delta_r = 0$, 且当 $\|\mu\|_\infty \to 0$ 时, $\|\mu_2\|_\infty \to 0$. 因此当 $\|\mu\|_\infty$ 充分小使得 $\|\mu_2\|_\infty \leqslant M(r)$ 时, 定

理 5.1 说明, 存在 $M(\Delta)$ 中的 Beltrami 系数 ν_2, $[\nu_2]_B=[\mu_2]_B=[\mu]_B$, $[\nu_2]_T$ 是一个 Strebel 点.

注记 3 正如 Fan-Chen[9] 所提出的, 一个自然的问题是, 对任意的 Beltrami 系数 $\mu\in M(\Delta)$, 是否存在 $M(\Delta)$ 的两个 Beltrami 系数 ν_1 和 ν_2, $[\nu_1]_T=[\mu]_T$, $[\nu_1]_B$ 是一个无穷小 Strebel 点, 而 $[\nu_2]_B=[\mu]_B$, $[\nu_2]_T$ 是一个 Strebel 点. 推论 5.1 说明当 $\|\mu\|_\infty$ 很小时, 答案是肯定的. 我们相信对所有的 $\mu\in M(\Delta)$, 结论都成立.

致谢 作者感谢审稿人的有益建议.

参考文献

1 Hamilton R S. Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values. *Tran Amer Math Soc*, **138**: 399–406 (1969)
2 Krushkal S L. Extremal quasiconformal mappings. *Siberian Math J*, **10**: 411–418 (1969)
3 Reich E, Strebel K. Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values. In: Contributions to Analysis, A collection of papers dedicated to Lipman Bers. New York: Academic Press, 1974, 375–391
4 Božin V, Lakic N, Marković V, et al. Unique extremality. *J Anal Math*, **75**: 299–338 (1998)
5 Božin V, Marković V, Mateljević M. Unique extremality in the tangent space of the universal Teichmuller space. *Integral Transform Spec Funct*, **6**: 145–149 (1998)
6 Earle C J, Li Z. Isometrically embedded polydisks in infinite dimensional Teichmüller spaces. *J Geom Anal*, **9**: 51–71 (1999)
7 Lakic N. Strebel points. *Contemp Math*, **211**: 417–431 (1997)
8 Shen Y, Liu X. Some remarks on holomorphic quadratic differentials. *Adv Math* (*China*), **33**: 471–476 (2004)
9 Fan J, Chen J. On the relation between extremal Teichmüller mapping. *Sci China Ser A*, **52**: 77–86 (2009)
10 Gardiner F P, Lakic N. Quasiconformal Teichmüller Theory. Math Surveys Monogr, 76. Providence, RI: Amer Math Soc, 2000
11 Earle C J, Gardiner F P, Lakic N. Asymptotic Teichmüller space, Part I: The complex structure. *Contemp Math*, **256**: 17–38 (2000)
12 Reich E, Strebel K. On quasiconformal mappings which keep the boundary points fixed. *Tran Amer Math Soc*, **(137-138)**: 211–221 (1969)
13 Teichmüller O. Ein Verschiebungssatz der quasikonformem Abbildung. *Deutsche Mathematik*, **7**: 336–343 (1942)
14 Shen Y. Non-uniqueness of geodesics in the universal Teichmüller space. *Adv Math* (*China*), **24**: 237–243 (1995)
15 Reich E. On the mapping with complex dilatation $ke^{i\theta}$. *Ann Acad Sci Fenn*, **12**: 261–267 (1987)
16 Maitani F. On rigidity of an end under conformal mappings preserving the infinite homology basis. *Complex Variables*, **24**: 281–287 (1994)
17 Tanigawa H. Holomorphic families of geodesic disks in infinite dimensional Teichmüller spaces. *Nagoya Math J*, **127**: 117–128 (1992)
18 Taniguch M. On rigidity of the ideal boundary of an infinite Riemann surface. *Complex Variables*, **14**: 161–167 (1990)
19 Reich E. Quasiconformal mappings with prescribed boundary values and a dilatation bound. *Arch Ration Mech Anal*, **68**: 99–112 (1978)
20 Fehlmann R. On a fundamental variational lemma for extremal quasiconformal mappings.*Comment Math Helv*, **61**: 565–580 (1986)
21 Sakan K. A fundamental variational lemma for extremal quasiconformal mappings compatible with Fuchsian groups. *Tohoku Math J*, **39**: 105–114 (1987)
22 Gardiner F P. Teichmüller Theory and Quadratic Differentials. New York: Wiley-Interscience, 1987
23 Douady A, Earle C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math*, **157**: 23–48 (1986)