文章编号:0494-0911(2004)08-0004-03 中图分类号:P207.2 文献标识码:B

秩亏自由网的双重条件平差

张 卡[1],张书毕[1],盛业华[2]

(1. 中国矿业大学 环境与测绘学院,江苏 徐州 221008; 2. 南京师范大学 地理科学学院,江苏 南京 210097)

Dual Condition Adjustment of Rank Deficient Free Network

ZHANG Ka,ZHANG Shu-bi,SHENG Ye-hua

摘要:针对自由网的秩亏问题,提出一种名为双重条件平差的方法,该方法简洁易懂,且法方程的系数矩阵不会出现秩亏问题,对秩亏自由网平差有一定的参考价值。

关键词:自由网;秩亏;双重条件平差

一、引 言

当控制网中无起算数据时,这种网称为自由网。对于自由网,在按通常的间接平差法进行平差时,法方程的系数矩阵将出现秩亏,从而无法求得惟一确定的估计量。为了求得秩亏方程的惟一解,需附加一约束条件,把这种平差方法称为秩亏自由网平差,也叫无固定数据的自由网平差,简称自由网平差。

在最小二乘最小范数原则下平差自由网,已经提出了不少解法,各有特点。根据运用的数学工具的不同,大致可分为3类:① 利用广义逆理论,如Mittermayer伪逆解法;② 利用特征值和特征向量,如Pelzer伪观测法,Mittermayer附加条件法,Perelmuter消去条件法;③ 转化为经典平差方法进行处理,如Wolf直接解法。另外,我国已故著名大地测量学家周江文研究员针对变形监测网提出了拟稳平差的自由网平差方法;还有许多学者也对秩亏自由网平差问题进行了一些有益的探索[1~3]。以上所述的各种秩亏自由网平差方法,有一个共同的特点,即都是从间接平差入手,先求出未知参数的最佳估值,再求观测值的改正数。本文提出的双重条件平差法,则先按条件平差解出观测值的改正数,然后利用未知参数和观测值平差值之间的关系列出条件方程,再进行第2次条件平差,从而求出未知参数的最佳估值。

二、双重条件平差原理

经典自由网平差、秩亏自由网平差和拟稳平差,虽然各自具有不同的基准条件,但并不影响最小二乘原则 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min$,所以对同一个网分别进行经典自由网平差,即作条件平差或给定必要的起算数据作间接平差,以及作自由网平差,求出的观测值的改正数相同,这也是本文提出的双重条件平差的依据所在。

双重条件平差的基本思想是:先对自由网进行条件平差,求出观测值的平差值,然后任选出与必要观测个数相同个数的观测值平差值作为虚拟观测值进行虚拟观测(因为虚拟观测值为条件平差后的平差值,它们之间不在存在矛盾,所以只需选用与必要观测个数相同个数的观测值平差值作为虚拟观测值,而不需全部选用所有的观测值平差值进行虚拟观测),再以未知参数和虚拟观测值之间的关系列出条件方程,进行第2次条件平差,从而求出未知参数的最佳估值。

设自由网的 n 个独立的观测值向量 $\boldsymbol{L}_{n\times1}=[L_1,L_2,\cdots,L_n]^{\mathrm{T}}$,相应的权为 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,权阵为对角矩阵 $\boldsymbol{P}_{n\times n}$,观测值改正数向量为 $\boldsymbol{V}_{n\times1}$,未知参数向量为 $\boldsymbol{X}_{u\times1}$,未知参数的近似值向量为 $\boldsymbol{X}^0_{u\times1}$,未知参数近似值的改正数向量为 $\delta\boldsymbol{X}_{u\times1}$,必要观测个数为 t,多余观测个数 $r=n-t$。

秩亏自由网双重条件平差的步骤如下。

1. 对自由网进行第1次条件平差。列改正数条件方程

$$\boldsymbol{A}_{r\times n}\boldsymbol{V}_{n\times1}+\boldsymbol{W}_{r\times1}=0 \tag{1}$$

按条件平差得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{N}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{W}&=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

收稿日期: 2003-07-22

作者简介:张 卡(1981-),男,安徽蚌埠人,硕士生,研究方向为测量数据处理,影像识别。

其中

$$N_{r\times r}=AP^{-1}A^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

求出

$$K=-N^{-1}W \tag{4}$$

所以可求出 $V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$ 观测值的平差值 $\hat{L}=\hat{L}+V$，$\hat{L}$ 的协因数阵

$$Q_{\hat{L}\hat{L}}=P^{-1}-P^{-1}A^{\mathrm{T}}N^{-1}AP^{-1} \tag{5}$$

2. 进行第2次条件平差。任选出 t 个 $\hat{L}$ 组成的 $\hat{L}_{t\times1}$ 作为虚拟观测值进行虚拟观测，$\hat{L}_{t\times1}$ 的协因数阵为 Q'，Q' 可根据选出的 t 个观测值平差值从 $Q_{\hat{L}\hat{L}}$ 中直接找出来。注意：选出的虚拟观测值的个数为必要观测个数，即此次的虚拟观测为必要观测，不需多余观测，只要把所有的未知点都联系上就行。

以未知参数和 $\hat{L}_{t\times1}$ 的关系列 t 个条件方程

$$\hat{L}_{t\times1}=B_{t\times u}X_{u\times1}+d_{t\times1} \tag{6}$$

改正数条件方程为

$$B_{t\times u}\delta X_{u\times1}+W'_{t\times1}=0 \tag{7}$$

其中

$$W'_{t\times1}=B_{t\times u}X^0_{u\times1}+d_{t\times1}-\hat{L}_{t\times1} \tag{8}$$

要求在满足 $B_{t\times u}\delta X_{u\times1}+W'_{t\times1}=0$ 的条件下，求得 $\delta X^{\mathrm{T}}\delta X=\min$ 的极值点，所以可按条件平差的方法得

$$\left.\begin{aligned}&\delta X=B^{\mathrm{T}}K'\\&\text{法方程 } N'K'+W'=0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$N'_{t\times t}=BB^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

因为 $rk(N')=rk(B)=t$，所以 N' 为满秩方阵，故 N' 不存在秩亏问题。

可得

$$K'=-(N')^{-1}W' \tag{11}$$

从而求得

$$\delta X=-B^{\mathrm{T}}(N')^{-1}W' \tag{12}$$

3. 求单位权中误差 m_0 及 Q_{XX}，以评定精度。由式(8)按协因数传播率得

$$Q_{W'W'}=Q' \tag{13}$$

由式(12)按协因数传播率得未知数权逆阵

$$Q_{XX}=B^{\mathrm{T}}[N']^{-1}Q'[B^{\mathrm{T}}[N']^{-1}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

单位权中误差

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}} \tag{15}$$

三、实例分析

设有水准网如图1所示，观测高差及其权分别为 $h_1=0.017$ m，$p_1=2$；$h_2=1.109$ m，$p_2=2$；$h_3=1.131$ m，$p_3=2$；$h_4=0.077$ m，$p_4=1$；$h_5=0.091$ m，$p_5=1$；$h_6=1.204$ m，$p_6=1$；试求平差后各点的高程 X 及其中误差。

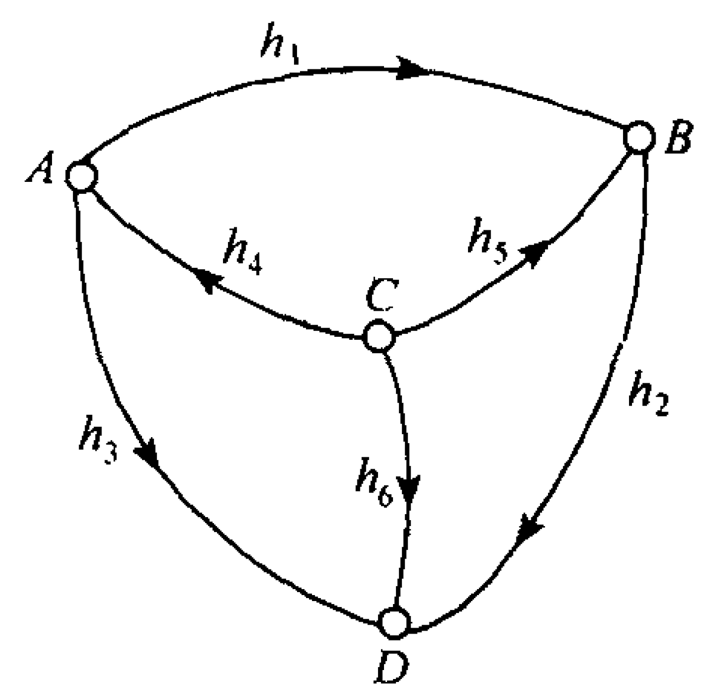

图1

解：设 A,B,C,D 4点平差后的高程为 X_1，X_2,X_3,X_4，其近似高程分别为 $X_1^0=0.076$ m，$X_2^0=0.091$ m，$X_3^0=0.000$ m，$X_4^0=1.203$ m，观测值改正数为 V_i，高程近似值改正数为 δX_i。

1. 先进行第一次条件平差，$t=3$，$r=6-3=3$。列观测值改正数条件方程

$$A_{3\times6}V_{6\times1}+W_{3\times1}=0$$

即

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\\V_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-4\\4\end{bmatrix}=0$$

由式(2)得法方程

$$\begin{bmatrix}2.5&-1&1\\-1&2.5&1\\1&1&2.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K_1\\K_2\\K_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-4\\4\end{bmatrix}=0$$

由式(2)，式(4)得

$$V=[1\quad 2\quad -2\quad -2\quad 2\quad 0]^{\mathrm{T}}\mathrm{mm}$$

高差平差值

$\hat{h}=\hat{h}+V=$

$[0.018\quad 1.111\quad 1.129\quad 0.075\quad 0.093\quad 1.204]^{\mathrm{T}}\mathrm{m}$

由式(5)得高差平差值的协因数阵 $Q_{\hat{L}\hat{L}}$ 为

$$Q_{LL}=\begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1429 & 0.1429 & -0.1429 & 0.1429 & 0.0000 \\ -0.1429 & 0.2857 & 0.1429 & 0.0000 & -0.1429 & 0.1429 \\ 0.1429 & 0.1429 & 0.2857 & -0.1429 & 0.0000 & 0.1429 \\ -0.1429 & 0.0000 & -0.1429 & 0.4286 & 0.2857 & 0.2857 \\ 0.1429 & -0.1429 & 0.0000 & 0.2857 & 0.4286 & 0.2857 \\ 0.0000 & 0.1429 & 0.1429 & 0.2857 & 0.2857 & 0.4286 \end{bmatrix}$$

2. 选 $\hat{h}_1,\hat{h}_2,\hat{h}_6$ 为虚拟观测值进行虚拟观测(当然,选其他任何 3 个高差平差值为虚拟观测值也行,只要能把所有的未知点都联系上即可),以高差平差值和未知参数的关系列出的高程近似值改正数的条件方程 $\boldsymbol{B}_{3\times4}\delta\boldsymbol{X}_{4\times1}+\boldsymbol{W}'_{3\times1}=0$ 为

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \\ \delta X_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=0$$

由式(9)得法方程

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1' \\ K_2' \\ K_3' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=0$$

由式(9),式(11)得

$$\delta\boldsymbol{X}=[-1.5 \quad 1.5 \quad -0.5 \quad 0.5]^{\mathrm{T}}\mathrm{mm}$$

各点平差后的高差

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^0+\delta\boldsymbol{X}=$

$[0.0745 \quad 0.0925 \quad -0.0005 \quad 1.2035]^{\mathrm{T}}\mathrm{m}$

3. 求 m_0 及 $\boldsymbol{Q}_{XX}$

由式(15)得

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}}{r}}=\pm2.9\ \mathrm{mm}$$

在 $\boldsymbol{Q}_{LL}$ 中可得虚拟观测值之间的协因数阵

$$\boldsymbol{Q}'=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2857 & -0.1429 & 0.0000 \\ -0.1429 & 0.2857 & 0.1429 \\ 0.0000 & 0.1429 & 0.4286 \end{bmatrix}$$

所以由式(14)得

$$\boldsymbol{Q}_{XX}=\begin{bmatrix} 0.1160 & -0.0268 & -0.0625 & -0.0268 \\ -0.0268 & 0.1161 & -0.0625 & -0.0268 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.0268 & -0.0268 & -0.0625 & 0.1161 \end{bmatrix}$$

各点的高程中误差为

$$m_{X_1}=\pm2.9\times(0.1160)^{1/2}=\pm1.0\ \mathrm{mm},$$
$$m_{X_2}=\pm2.9\times(0.1161)^{1/2}=\pm1.0\ \mathrm{mm},$$
$$m_{X_3}=\pm2.9\times(0.1875)^{1/2}=\pm1.3\ \mathrm{mm},$$
$$m_{X_4}=\pm2.9\times(0.1161)^{1/2}=\pm1.0\ \mathrm{mm}.$$

四、结　论

依据条件平差的思想,本文提出了秩亏网的双重条件平差方法,并给出了具体的求解步骤及计算公式。与以往所使用的求解秩亏网的方法相比,该方法的本质特点:在求解未知参数的过程中,不使用间接平差,而将平差过程分为两次条件平差,第 1 次条件平差求出观测值的改正数,再用第 2 次条件平差求出未知参数的最佳估值;两次平差过程中的法方程的系数矩阵均为满秩矩阵,不会出现秩亏问题,因而不需要广义逆矩阵知识,也不需要求特征值和特征向量,利用常规的矩阵逆即可求出未知参数的最佳估值,从而计算过程变得简单了。另外,该方法意义明确,简洁易懂,便于掌握和应用,所以对秩亏自由网平差有一定的参考价值。

参考文献:

[1] 张书毕,单世坤,王坚.秩亏自由网逐次平差及其应用[J].测绘通报,2001,(8).

[2] 归庆明,张建军.秩亏自由网平差的一种新解法[J].测绘工程,1998,7(2).

[3] 王仲锋,马正中.用附有条件的参数平差法求解秩亏网新探[J].测绘工程,1998,7(2).

[4] 金学林,马金铃,王菊珍.误差理论与测量平差[M].北京:煤炭工业出版社,1990.

[5] 陶本藻.自由网平差与变形分析[M].北京:测绘出版社,1984.

[6] 崔希璋,於宗俦,陶本藻,等.广义测量平差[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001.

[7] 陶本藻.自由网平差[J].工程勘察,1999,(3).