论经典测量平差模型的内在联系

王新洲
（武汉大学 测绘学院，湖北 武汉 430079）

On the Internal Relations of Classical Surveying Adjustment Models

WANG Xin-zhou

摘要 通过对条件平差、间接平差、附有条件的间接平差、附有未知数的条件平差和附有限制条件的条件平差等 5 种经典平差模型的深入研究，揭示它们之间的区别和内在联系。证明条件平差模型、间接平差模型、附有未知数的条件平差模型和附有限制条件的条件平差模型都是附有条件的间接平差模型的特例。

关键词 经典平差模型；概括平差模型；参数

一、概 述

"'测量平差'是测绘类专业中一门重要的技术基础课，是用于观测数据处理的一门应用数学"[1]。"长期以来，测量平差教材的编写和讲授，都是沿用逐个平差方法孤立介绍的体系，使得学习者误认为测量平差就是各种不同平差方法的汇集和堆砌"[1]。其结果，不仅造成学生难学难记，更严重的是'当学习者学完平差课之后，由于没有真正理解各种平差方法的本质区别究竟何在，它们内在的联系究竟如何，因而总觉得脑子里装了不少零碎的方法，以至造成'只见枝叶，不见根本'的后果"[1]。为了解决这个问题，於宗俦教授早在 20 世纪 80 年代末就提出了旨在统一各种经典平差模型的'概括模型'——附有限制条件的条件平差模型。

该'概括模型'对测量平差的贡献是不容否定的：首先，该'概括模型'统一了以前各种经典平差模型中杂乱无章的符号；其次，该'概括模型'从形式上统一了以前的各种经典平差模型。然而，当我们仔细推敲时可以发现，该'概括模型'似乎没有达到预期的目的，即'概括模型'只是从形式上统一了以前的各种经典平差模型，并没有真正揭示各种经典平差模型的内在联系。例如，附有条件的间接平差与附有未知数的条件平差是什么关系？其内在联系又是什么？这样的问题'概括模型'是不能回答的。因此，有必要进一步研究各种经典平差模型真正的内在联系。

笔者在深入研究各种经典平差模型的内在联系时得出如下论断：各种经典平差模型的根本区别和内在联系是'所选参数的个数、选什么量为参数以及参数之间是否函数独立'，而且附有条件的间接平差模型本身就是各种经典平差模型的概括模型，其余的经典平差模型，如条件平差模型、间接平差模型、附有未知数的条件平差模型和附有限制条件的条件平差模型都是它的特例。

二、符号及意义

为了证明以上论断，我们先给出模型中的符号及其含义：

n——观测值的个数；

t——必要观测的个数；

r——多余观测的个数，且有 $r = n - t$；

u——参数的个数；

s——不独立参数的个数，即 $s = u - t$；

q——当 $u > n$ 时，后 $u - n$ 个参数的个数，即 $q = u - n$；

p——后 q 个参数中独立参数的个数；

m——后 q 个参数中不独立参数的个数，即 $m = q - p$；

$\boldsymbol{L}$——$n \times 1$ 的观测值向量；

$\boldsymbol{V}$——$n \times 1$ 的改正数向量；

$\hat{\boldsymbol{L}}$——$n \times 1$ 的观测值估值向量，且 $\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}$；

$\boldsymbol{\Delta}$——$n \times 1$ 的真误差向量；

$\boldsymbol{A}$——$n \times u$ 的误差方程系数矩阵；

$\hat{\boldsymbol{X}}$——$u \times 1$ 的参数估值向量；

收稿日期：2003-06-09
基金项目：国家高新技术研究发展计划（863 计划）资助项目（2001AA135081）
作者简介：王新洲（1954-），男，博士，教授，博士生导师，主要从事测量数据处理理论研究。

C——$s \times u$ 的条件方程系数矩阵；
F——$n \times 1$ 的误差方程常数向量；
K——$s \times 1$ 的条件方程常数项向量。

三、论断的证明

设附有条件的间接平差模型为

$$\left.\begin{aligned} \underset{n\times 1}{V} &= \underset{n\times u}{A}\ \underset{u\times 1}{\hat{X}} + \underset{n\times 1}{F} \\ \underset{s\times u}{C}\ \underset{u\times 1}{\hat{X}} &+ \underset{s\times 1}{K} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

下面来证明参考文献[2]中介绍的条件平差模型、间接平差模型、附有未知数的条件平差模型和附有限制条件的条件平差模型都是式(1)的特例。

1. 间接平差

当附有条件的间接平差模型式(1)中参数的个数小于观测值的个数而等于必要观测值的个数，即 $u = t < n$，且 t 个参数相互独立时，有 $s = u - t = t - t = 0$，即参数之间不存在条件。故有 $C = 0$。于是式(1)变为

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times t}{A}\ \underset{t\times 1}{\hat{X}} + \underset{n\times 1}{E} \tag{2}$$

式(2)就是参考文献[2]中介绍的间接平差模型。式(2)表明：间接平差模型是附有条件的间接平差模型的特例。

2. 条件平差

当附有条件的间接平差模型式(1)中参数的个数等于观测值的个数，即 $u = n$，且选择 n 个观测值的真值为参数时，有 $s = u - t = n - t = r$，即参数之间存在 r 个条件。此时参数 $\underset{u\times 1}{\hat{X}} = \underset{n\times 1}{\hat{L}}$，误差方程系数矩阵为单位矩阵，即 $A = E$，误差方程常数向量 $F = -L$。于是式(1)变为

$$\left.\begin{aligned} \underset{n\times 1}{V} &= \underset{n\times 1}{\hat{L}} - \underset{n\times 1}{L} \\ \underset{r\times n}{C}\ \underset{n\times 1}{\hat{L}} &+ \underset{r\times 1}{K} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

将式(3)的第 1 式代入第 2 式，消去 n 个参数 $\hat{L}$，得

$$\underset{r\times n}{C}\ \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times n}{C}\ \underset{n\times 1}{L} + \underset{r\times 1}{K} = 0$$

令
$$\underset{r\times 1}{W} = \underset{r\times n}{C}\ \underset{n\times 1}{L} + \underset{r\times 1}{K}$$

则有
$$\underset{r\times n}{C}\ \underset{n\times 1}{V} + \underset{r\times 1}{W} = 0 \tag{4}$$

式(4)就是我们所熟知的条件平差模型。式(4)表明：条件平差就是参数的个数等于观测值的个数，且选择 n 个观测值的真值为参数时的附有条件的间接平差在消去参数以后的中间形式。所以条件平差模型是附有条件的间接平差模型的特例。

例 1. 如图 1，已知 A，B 两点的坐标和 AB 边的边长分别为 $x_A = 3\ 143.237$，$y_A = 5\ 260.334$，$x_B = 4\ 609.361$，$y_B = 5\ 025.696$，$\alpha_{AB} = 350°54'27''$ 3 个内角的观测值为 $L_1 = 44°05'45''$，$L_2 = 93°10'43''$，$L_3 = 42°43'27''$。取 C 点的近似坐标为 $x_C^0 = 4\ 933.013$，$y_C^0 = 6\ 513.702$。由图 1 可知本例的必要观测数为 $t = 2$。

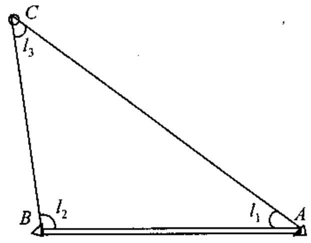

图 1

现选 3 个观测值为参数，即 $\hat{X}^{\mathrm{T}} = (\hat{x}_1\quad \hat{x}_2\quad \hat{x}_3) = \hat{L}^{\mathrm{T}} = (\hat{l}_1\quad \hat{l}_2\quad \hat{l}_3)$。因为 $u = n > t$，$s = u - t = n - t = r = 3 - 2 = 1$，所以 3 个参数之间存在一个条件。于是，由图知附有条件的间接平差模型为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44°05'45'' \\ 93°10'43'' \\ 42°43'27'' \end{pmatrix}$$

$$\hat{l}_1 + \hat{l}_2 + \hat{l}_3 - 180 = 0$$

将此附有条件的间接平差模型的第 1 式代入第 2 式，消去参数 $\hat{L}$，得

$$v_1 + v_2 + v_3 - 5'' = 0 \tag{5}$$

式(5)就是按条件平差时的条件方程。可见条件平差是附有条件的间接平差的特例。

3. 附有未知数的条件平差

当附有条件的间接平差模型式(1)中参数的个数大于观测值的个数，即 $u > n$，且前 n 个参数选为观测值的真值，后 $q = u - n$ 个参数相互独立时，有 $s = u - t = n + q - t = r + q$，$F = -L$。在这种情况下，将参数向量、误差方程系数矩阵和条件方程系数矩阵分块

$$\underset{1\times u}{\hat{X}^{\mathrm{T}}} = (\underset{1\times n}{\hat{L}^{\mathrm{T}}}\quad \underset{1\times q}{\hat{Y}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}},\quad \underset{n\times u}{A} = (\underset{n\times n}{E}\quad \underset{n\times q}{0}),$$

$$\underset{s\times u}{C} = (\underset{s\times n}{C_1}\quad \underset{s\times q}{C_2})$$

于是(1)式变为

$$\left.\begin{aligned} \underset{n\times 1}{V} &= \underset{n\times 1}{\hat{L}} - \underset{n\times 1}{L} \\ \underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{\hat{L}} &+ \underset{s\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}} + \underset{s\times 1}{K} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将式(6)的第 1 式代入第 2 式，消去前 n 个参数 $\hat{L}$，得

$$\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{V} + \underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{L} + \underset{s\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}} + \underset{s\times 1}{K} = 0$$

令
$$\underset{s\times n}{W} = \underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{L} + \underset{s\times 1}{K}$$

则有 $$\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{V}+\underset{s\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{s\times 1}{W}=0 \tag{7}$$

式(7)就是附有参数的条件平差模型。式(7)表明:附有参数的条件平差就是参数的个数大于观测值的个数,且选择观测值的真值为前 n 个参数,而后 $q=u-n$ 个参数相互独立时的附有条件的间接平差在消去前 n 个参数以后的中间形式。所以附有参数的条件平差模型是附有条件的间接平差模型的特例。

例 2. 对于例 1 中的单三角形,现选 3 个观测值和 C 点的两个坐标改正数为参数,即 $\hat{X}^{\mathrm{T}}(\hat{x}_1\ \ \hat{x}_2\ \ \hat{x}_3\ \ \hat{x}_4\ \ \hat{x}_5)=(\hat{l}_1\ \ \hat{l}_2\ \ \hat{l}_3\ \ \delta x_c\ \ \delta y_c)$。由于 δx_c 与 δy_c 不相关,所以 $q=u-n=5-3=2$。又因为 $u=5>n$,$s=u-t=n+q-t=r+q=3$,即 5 个参数中存在 3 个条件。这 3 个条件为

$$\hat{l}_1+\hat{l}_2+\hat{l}_3-180^\circ=0$$
$$\alpha_{AB}+\hat{l}_1+\hat{\alpha}_{AC}=0$$
$$\alpha_{BA}-\hat{l}_2-\hat{\alpha}_{BC}=0$$

式中,α_{ij} 为 i 点到 j 点的方位角。上面的两个方位角条件是非线性条件,应先线性化。线性化后,得附有条件的间接平差模型为

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{l}_1\\\hat{l}_2\\\hat{l}_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}44^\circ05'45''\\93^\circ10'43''\\42^\circ43'27''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{l}_1\\\hat{l}_2\\\hat{l}_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-0.542&0.773\\-1.324&0.288\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\delta x_c\\\delta y_c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}180^\circ\\44^\circ05'44.9''\\93^\circ10'43.1''\end{pmatrix}=0$$

将此附有条件的间接平差模型的第 1 式代入第 2 式,消去参数 $\hat{L}$,得

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-0.542&0.773\\-1.324&0.288\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\delta x_c\\\delta y_c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5''\\-0.1''\\0.1''\end{pmatrix}=0 \tag{8}$$

式(8)就是附有未知数的条件平差的条件方程。可见附有未知数的条件平差是附有条件的间接平差的特例。

4. 附有限制条件的条件平差

当附有条件的间接平差模型式(1)中参数的个数大于观测值的个数,即 $u>n$,且前 n 个参数选为观测值的真值,后 $q=u-n$ 个参数中只有 p 个参数相互独立,其余 $m=q-p$ 个参数是 p 个参数的函数时,有 $s=u-t=n+q-t=r+p+m$,$F=-L$。在这种情况下,后 q 个参数中存在 $m=q-p$ 限制条件。于是将参数向量、误差方程系数矩阵和条件方程系数矩阵作如下分块

$$\underset{1\times u}{\hat{X}^{\mathrm{T}}}=(\underset{1\times n}{\hat{L}^{\mathrm{T}}}\quad \underset{1\times q}{\hat{Y}^{\mathrm{T}}})^{\mathrm{T}},\quad \underset{n\times u}{A}=(\underset{n\times n}{E}\quad \underset{n\times q}{0}),$$

$$\underset{s\times u}{C}=\begin{pmatrix}\underset{(r+p)\times n}{C_1}&\underset{(r+p)\times q}{C_2}\\\underset{m\times n}{0}&\underset{m\times q}{C_3}\end{pmatrix},\quad \underset{s\times 1}{K}=\begin{pmatrix}\underset{(r+p)\times 1}{K_1}\\\underset{m\times 1}{K_2}\end{pmatrix}$$

则(1)式变为

$$\left.\begin{aligned}&\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times 1}{\hat{L}}-\underset{n\times 1}{L}\\&\underset{(r+p)\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{\hat{L}}+\underset{(r+p)\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{(r+p)\times 1}{K_1}=0\\&\underset{m\times q}{C_3}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{m\times 1}{K_2}=0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

将式(9)的第 1 式代入第 2 式,消去前 n 个参数 $\hat{L}$,得

$$\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{V}+\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{L}+\underset{s\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{s\times 1}{K_1}=0$$
$$\underset{s\times n}{C_3}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{m\times 1}{K_2}=0$$

令 $$\underset{s\times n}{W}=\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{L}+\underset{s\times 1}{K_1}$$

则有 $$\left.\begin{aligned}&\underset{s\times n}{C_1}\ \underset{n\times 1}{V}+\underset{s\times q}{C_2}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{s\times 1}{W}=0\\&\underset{m\times q}{C_3}\ \underset{q\times 1}{\hat{Y}}+\underset{m\times 1}{K_2}=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(10)就是附有限制条件的条件平差模型。式(10)表明:附有限制条件的条件平差就是参数的个数大于观测值的个数,且选择观测值的真值为前 n 个参数,而后 $q=u-n$ 个参数中只有 p 个参数相互独立时的附有条件的间接平差在消去前 n 个参数以后的中间形式。所以附有限制条件的条件平差模型也是附有条件的间接平差模型的特例。

例 3. 对于例 1 中的单三角形,现选 3 个观测值和 C 点的两个坐标改正数和 AC 边的边长为参数,即 $\hat{X}^{\mathrm{T}}=(\hat{x}_1\ \ \hat{x}_2\ \ \hat{x}_3\ \ \hat{x}_4\ \ \hat{x}_5\ \ \hat{x}_6)=(\hat{l}_1\ \ \hat{l}_2\ \ \hat{l}_3\ \ \delta x_c\ \ \delta y_c\ \ \delta s_{ac})$。后面的 3 个参数($C$ 点的两个坐标改正数和 AC 边的边长)中只有 2 个是相互独立的,即 $p=2$。于是,$m=q-p=3-2=1$,即后 3 个参数中存在一个限制条件。故条件方程的总数为 $s=u-t=n+q-t=r+q=r+p+m=4$。这 4 个条件为

$$\hat{l}_1+\hat{l}_2+\hat{l}_3-180^\circ=0$$
$$\alpha_{AB}+\hat{l}_1-\hat{\alpha}_{AC}=0$$
$$\alpha_{BA}-\hat{l}_2-\hat{\alpha}_{BC}=0$$
$$\sqrt{(x_A-\hat{x}_C)^2+(y_A-\hat{y}_C)^2}-\hat{s}_{AC}=0$$

式中,s_{AC} 为 AC 边的边长。上面的 2 个方位角条件和 1 个边长条件是非线性条件,应先线性化。线性

化后，得附有条件的间接平差模型为

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44°05'45'' \\ 93°10'43'' \\ 42°43'27'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.542 & 0.773 & 0 \\ -1.324 & 0.288 & 0 \\ 0.819 & 0.574 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_C \\ \delta y_C \\ \delta s_{AC} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 180° \\ 44°05'44.9'' \\ 93°10'43.1'' \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

将此附有条件的间接平差模型的第 1 式代入第 2 式，消去参数 $\hat{L}$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.542 & 0.773 & 0 \\ -1.324 & 0.288 & 0 \\ 0.819 & 0.574 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_c \\ \delta y_c \\ \delta s_{AC} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5'' \\ -0.1'' \\ 0.1'' \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \tag{11}$$

式(11)就是附有限制条件的条件平差的条件方程。可见附有限制条件的条件平差也是附有条件的间接平差的特例。

四、结　论

1. 间接平差是参数个数小于观测值的个数、各参数之间存在 0 个条件的附有条件的间接平差。

2. 条件平差是参数个数等于观测值的个数、且以 n 个观测值的真值为参数、各参数之间存在 $s = u - t = n - t = r$ 个条件的附有条件的间接平差。

3. 附有未知数的条件平差是参数个数大于观测值的个数、且前 n 个参数为观测值的真值、后 q 个参数相互独立，各参数之间存在 $s = u - t = n + q - t = r + q$ 个条件的附有条件的间接平差。

4. 附有限制条件的条件平差是参数个数大于观测值的个数、且前 n 个参数为观测值的真值、后 q 个参数中只有 p 个参数相互独立，各参数之间存在 $s = u - t = n + q - t = r + q = r + p + m$ 个条件的附有条件的间接平差。

5. 附有条件的间接平差模型是经典平差中最一般的模型，其他各种经典平差模型都是它的特例。

6. 按本文思路推导条件平差模型、间接平差模型、附有未知数的条件平差模型和附有限制条件的条件平差模型，不仅条理清楚、符号一致、简单易懂，而且可揭示各种经典平差的内在联系。

参考文献：

[1] 於宗俦，于正林. 测量平差原理[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社，1990.
[2] 武汉测绘科技大学测量平差教研室.测量平差基础(第三版)[M].北京:测绘出版社，1996.