

# 基于 MMSE 的自适应盲均衡算法

陈彩云, 谢胜利

(华南理工大学电子与信息学院, 广州 510641)

**摘要:** 提出一种估计最小均方误差的盲均衡算法。与 RLS 算法原理类似, 该方法依据矩阵求逆引理逐步更新自相关矩阵及其伪逆, 以达到快速收敛, 且对迭代初始值不敏感。与非递归算法相比, 该自适应在线算法无需直接计算相关矩阵的伪逆或引入奇异值分解, 避免了估计相关矩阵的秩或信道阶数。快速收敛以及在线处理的特性使其可以应用到实时通信信号处理中。仿真结果证明算法具有很好的在线均衡性能。

**关键词:** 盲均衡; RLS 算法; 码间干扰

## Adaptive Blind Equalization Algorithm Based on MMSE

CHEN Cai-yun, XIE Sheng-li

(School of Electronic & Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

**【Abstract】** This paper proposes an adaptive blind equalization algorithm for Minimum Mean Squared Error(MMSE). Like RLS algorithm, the method recursively updates correlation matrix and its inversion according to the matrix inversion lemma, thus ensures convergence and is not sensitive to initialization. Unlike many subspace methods, the algorithm does not require channel order estimation and it is robust to channel order mismatch. Fast convergence and online property enable it to be used in real-time communication applications. Simulation results show that the algorithm has good performance of online equalization.

**【Key words】** blind equalization; RLS algorithm; Inter Symbol Interference(ISI)

### 1 概述

数字通信通常会受码间干扰(Inter Symbol Interference, ISI)的影响, 为实现可靠通信, 必须采用均衡技术消除码间干扰。盲均衡由于在传输训练序列时无须消耗带宽资源, 因此受到广泛关注。

在盲技术发展过程中, 最先采用高阶统计量(Higher Order Statistics, HOS)进行信号估计<sup>[1-2]</sup>。最近, 基于二阶统计量(Second Order Statistics, SOS)的盲均衡成为研究热点, 因为采用SOS能大大降低对样本数目和计算量的要求。从Tong等人的开创性成果<sup>[3]</sup>面世以来, 出现了大量基于SOS的算法。其中大部分要求信道阶数已知, 否则, 阶数误匹配会大大降低这些算法的性能。

文献[4]提出了一种基于最小均方误差(Minimum Mean Squared Error, MMSE)准则的盲均衡方法。该方法直接求解均衡器, 避免了信道辨识过程中阶数误估计和误差传播等问题。但该方法所估计的均衡器局限于零延迟均衡器, 而考虑到对噪声的放大作用, 通常零延迟均衡器并非最优。

文献[5]提出了一种直接估计任意延迟均衡器的算法, 其不涉及线性预测, 没有累计误差, 缺点是需要进行矩阵求伪逆运算。

本文对文献[5]的方法做了改进, 提出了一种自适应迭代算法, 避免了矩阵求逆。新方法采用类似 RLS 算法的原理逐步估计均衡器, 因此收敛较快。仿真结果显示本算法具有很好的在线均衡性能, 尤其是当信噪比高于 20 dB 时。

本文采用的符号标识  $(\cdot)^T, (\cdot)^*, (\cdot)^H$  和  $(\cdot)^{-1}$  分别表示转置、复共轭、共轭转置和伪逆;  $X(:, n)$  是沿用 Matlab 标识, 表示矩阵  $X$  的第  $n$  列向量。

### 2 MMSE 盲均衡

对平稳信号进行过采样所得到的序列具有循环平稳性, 其二阶统计量中含有信道的相位信息, 可用来对信道进行盲辨识或盲均衡。因此, 过采样是基于 MMSE 准则盲均衡的一个重要前提。

考虑下式所描述的过采样率为  $T$  的通信系统模型:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k h(n-kT) + v(n) \quad (1)$$

其中,  $s_k$  为信息源发送的符号序列;  $h(n)$  为传输信道的离散冲击响应系数;  $v(n)$  为加性白噪声。本文之后均假设  $s_k$  为零均值、单位方差的白信号, 并且噪声  $v(n)$  与源信号不相关, 方差为  $\sigma^2$ 。

若  $s_k$  为平稳过程, 则输出过采样序列  $x(n)$  是周期为  $T$  的循环平稳过程。定义:

$$x_i(n) = x(nT+i)$$

$$h_i(n) = h(nT+i)$$

$$v_i(n) = v(nT+i)$$

其中,  $h_i(n)$  可以看作第  $i$  条子信道系数;  $x_i(n)$  和  $v_i(n)$  分别为其对应的输出和加性噪声。则式(1)所示的单元单出系统可用等效的单元多出模型描述:

$$x_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k h_i(n-k) + v_i(n), \quad i = 0, 1, \dots, T-1 \quad (2)$$

**基金项目:** 国家自然科学基金资助重点项目(U0635001); 国家自然科学基金资助项目(60505005, 60674033, 60774094)

**作者简介:** 陈彩云(1979-), 女, 博士研究生, 主研方向: 盲信号处理; 谢胜利, 教授、博士生导师

**收稿日期:** 2008-04-01 **E-mail:** acaim@21cn.com

假设观察窗长度为  $N$  个码元间隔，子信道阶数为  $L$ ，并且定义：

$$\begin{aligned} s(n) &= [s_n, s_{n-1}, \dots, s_{n-N+1}]^T \\ \mathbf{h}(n) &= [h_0(n), h_1(n), \dots, h_{L-1}(n)]^T \\ \mathbf{x}(n) &= [x_0(n), x_1(n), \dots, x_{T-1}(n)]^T \\ \mathbf{x}_N(n) &= [\mathbf{x}^T(n), \mathbf{x}^T(n-1), \dots, \mathbf{x}^T(n-N+1)]^T \\ \mathbf{v}(n) &= [v_0(n), v_1(n), \dots, v_{T-1}(n)]^T \\ \mathbf{v}_N(n) &= [\mathbf{v}^T(n), \mathbf{v}^T(n-1), \dots, \mathbf{v}^T(n-N+1)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

那么整个系统可写成矩阵形式：

$$\mathbf{x}_N(n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(n) + \mathbf{v}_N(n) \quad (4)$$

其中，信道矩阵  $\mathbf{H} \in C^{NT \times (N+L)}$  具有如下的块 Toeplitz 结构：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}(1) & \dots & \mathbf{h}(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}(L-1) & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \mathbf{h}(L) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}(L-1) & \mathbf{h}(L) \end{bmatrix} \quad (5)$$

令  $\mathbf{g}_d$  表示系统  $d$  延时的线性均衡器，即

$$\hat{s}_{n-d} = \mathbf{g}_d^H \times \mathbf{x}_N(n)$$

其中， $d$  为包含于区间  $[0, N+L-2]$  的任意整数。那么求解  $d$  延时的 MMSE 线性均衡器就是令代价函数  $J_{\text{MMSE}}$  达到最小值：

$$J_{\text{MMSE}} = E \left\{ \left| \mathbf{g}_d^H \mathbf{x}_N(n) - s_{n-d} \right|^2 \right\} \quad (6)$$

易知， $\mathbf{g}_d$  是如下 Wiener-Hopf 方程的解：

$$E \left\{ \mathbf{x}_N(n) \mathbf{x}_N^H(n) \right\} \mathbf{g}_d = E \left\{ \mathbf{x}_N(n) \times s(n-d) \right\} \quad (7)$$

其中， $E \left\{ \mathbf{x}_N(n) \mathbf{x}_N^H(n) \right\}$  仅与接收信号有关。而根据本文的假设条件，不难求得

$$E \left\{ \mathbf{x}_N(n) \times s(n-d) \right\} = \mathbf{H}_d$$

其中， $\mathbf{H}_d$  表示信道矩阵  $\mathbf{H}$  的第  $d+1$  列。

文献[5]给出了一种直接估计  $\mathbf{H}_d$  的方法。令

$$\mathbf{R}_d = E \left\{ \mathbf{x}_N(n+d) \mathbf{x}_N^H(n) \right\}$$

并且定义：

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{R}_d \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_d^H - \mathbf{R}_{d+1} \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{R}_{d+1}^H \quad (8)$$

文中证明了

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{H}_d \times \mathbf{H}_d^H \quad (9)$$

可见， $\Delta \mathbf{D}$  的秩为 1，可通过求解  $\Delta \mathbf{D}$  的最大奇异值所对应的奇异值向量来获得  $\mathbf{H}_d$ ，或者直接选取  $\Delta \mathbf{D}$  的任意一列作为  $\mathbf{H}_d$ 。将估计出的  $\mathbf{H}_d$  代入式(7)就可以求得  $d$  延时的 MMSE 均衡器  $\mathbf{g}_d$ 。即

$$\mathbf{g}_d = \mathbf{R}_0^{-1} \times \mathbf{H}_d \quad (10)$$

### 3 自适应迭代算法

从式(10)可看出，文献[5]的方法涉及求相关矩阵  $\mathbf{R}_0$  的伪逆。为了解决这个问题，并使算法具有跟踪时变信道的功能，本文采用 RLS 算法原理来迭代更新均衡器  $\mathbf{g}_d(n)$ 。采用下式逐步更新对相关/互相关函数的估计：

$$\mathbf{R}_i(n) = \sum_{l=0}^n \lambda^{n-l} \mathbf{x}_N(l+i) \mathbf{x}_N^H(l), \quad i=0, d, d+1 \quad (11)$$

易知

$$\mathbf{R}_i(n) = \lambda \mathbf{R}_i(n-1) + \mathbf{x}_N(n+i) \mathbf{x}_N^H(n), \quad i=0, d, d+1 \quad (12)$$

其中， $\mathbf{R}_i(n)$ ， $\mathbf{R}_i(n-1)$  分别表示  $n$  和  $n-1$  步迭代过程中的样本相关矩阵估计， $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) 为遗忘因子，用来降低过去观测值对当前估计的影响。

由于式(10)中仅涉及  $\mathbf{R}_0(n)$  的伪逆，因此定义

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{R}_0^{-1}(n)$$

根据矩阵求逆引理<sup>[6]</sup>，可以得到

$$\mathbf{P}(n) = \lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) - \lambda^{-1} \mathbf{K}(n) \mathbf{x}_N^H(n) \mathbf{P}(n-1) \quad (13)$$

其中，

$$\mathbf{K}(n) = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}_N^H(n)}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}_N^H(n) \mathbf{P}(n-1) \mathbf{x}_N(n)} \quad (14)$$

式(13)和式(14)提供了一种迭代计算  $\mathbf{P}(n)$  的在线方法，避免了求伪逆。参照式(8)可以求出第  $n$  次迭代估计的  $\Delta \mathbf{D}$ ：

$$\Delta \mathbf{D}(n) = \mathbf{R}_d(n) \mathbf{P}(n) \mathbf{R}_d^H(n) - \mathbf{R}_{d+1}(n) \mathbf{P}(n) \mathbf{R}_{d+1}^H(n) \quad (15)$$

然后利用关系式

$$\Delta \mathbf{D}(n) = \mathbf{H}_d(n) \times \mathbf{H}_d^H(n)$$

估计出  $\mathbf{H}_d(n)$ 。如前文所述，可以选择  $\Delta \mathbf{D}(n)$  最大奇异值所对应的奇异值向量作为  $\mathbf{H}_d(n)$ ，或者简单地选取  $\Delta \mathbf{D}(n)$  的某一列，比如令  $\mathbf{H}_d(n) = \Delta \mathbf{D}(n)(:, 1)$ 。后文的仿真部分将采用前一种方法的算法称为 adap\_1，后一种称为 adap\_2。得到  $\mathbf{H}_d(n)$  和  $\mathbf{P}(n)$  后，进一步求得  $d$  延时均衡器：

$$\mathbf{g}_d(n) = \mathbf{P}(n) \mathbf{H}_d(n)$$

遗忘因子  $\lambda$  会影响收敛速度和算法精确度，文献[5]指出，折中后  $\lambda$  的最优选取区间为  $[0.98, 1]$ 。

本文的算法总结如下：

**步骤 1** 初始化滤波器：

$$\mathbf{g}_d(0) = 0$$

$$\mathbf{R}_i(0) = \delta \mathbf{I}$$

$$\mathbf{P}(0) = \delta^{-1} \mathbf{I}$$

其中，参数  $\delta$  的设定与信噪比有关，信噪比较高时取较小值，信噪比较低时取较大值，其合理性可在正则化意义上得到证明<sup>[6]</sup>。

**步骤 2** 利用式(12)、式(14)、式(15)分别递归更新变量  $\mathbf{R}_i(n)$ ， $\mathbf{K}(n)$  以及  $\mathbf{P}(n)$ 。

**步骤 3** (adap\_1) 首先计算

$$[\mathbf{U}, \mathbf{E}, \mathbf{V}] = \text{svd}(\Delta \mathbf{D})$$

然后令  $\mathbf{H}_d(n) = \mathbf{U}(:, 1)$ 。

**步骤 4** (adap\_2) 令  $\mathbf{H}_d(n) = \Delta \mathbf{D}(n)(:, 1)$ 。

**步骤 5** 第  $n$  步迭代更新  $d$  延时均衡器：

$$\mathbf{g}_d(n) = \mathbf{P}(n) \mathbf{H}_d(n)$$

### 4 算法分析与实验

根据最小二乘估计理论，其估计值是多重线性回归模型中未知向量的最佳估计，即可以达到无偏估计的 Cramér-Rao 下界。但是本文算法与 RLS 算法的本质区别在于：RLS 算法是非盲算法，即算法工作在滤波器期望输出已知的情况下；而本算法采用估计值  $\mathbf{H}_d(n)$  直接取代

$$E \left\{ \mathbf{x}_N(n) \times s(n-d) \right\}$$

因为  $\mathbf{H}_d(n)$  的估计只与相关矩阵  $\mathbf{R}_i$  有关，为了达到无偏估计，必须消除相关矩阵中的噪声影响。根据式(4)和本文对信号源和噪声的假设，可利用下式修正相关矩阵：

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 - \sigma^2 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i - \sigma^2 \mathbf{J}^T \quad (16)$$

其中， $\mathbf{I}$  为单位阵； $\mathbf{J}$  为约旦矩阵，其对角线下方第 1 条副对角线元素为 1，其他元素均为 0。 $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{J}$  的维数与  $\mathbf{R}_i$  相同。

为检验算法性能，进行了仿真实验，并比较了本算法与文献[4]的在线算法。定义第  $n$  步迭代之后残留 ISI 如下：

$$ISI(n) = \frac{\sum_j |f_j(n)|^2 - \max_j |f_j(n)|^2}{\max_j |f_j(n)|^2} \quad (17)$$

其中,  $f(n) = H^H \times g_d(n)$ ; 下标  $j$  表示向量  $f(n)$  的第  $j$  元素。定义均衡器输出端的信噪比为

$$SNR = \frac{E\{|x(n)|^2\}}{E\{|v(n)|^2\}} \quad (18)$$

此外, 实验中采用的源随机序列均来自于 16-QAM 星座图, 本文仿真所用的信道来源于文献[3]。

### 实验 1 算法性能测试

首先考虑算法的收敛性能。以码元间隔为单位, 令均衡时延为  $d=4$ 。图 1 描绘了算法 adap\_1 在信噪比分别为 15 dB, 20 dB, 25 dB 时的  $ISI$  收敛曲线。可见, 当迭代到 20 步时, 算法 adap\_1 的  $ISI$  已足够低; 尤其是当信噪比高于 20 dB 时, 残留  $ISI$  低于 0.01。

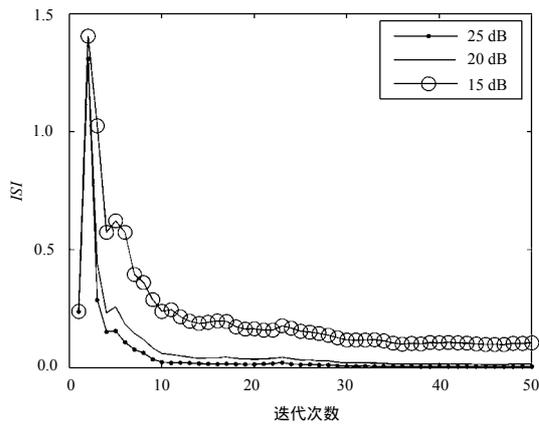


图 1 不同信噪比条件下的残留  $ISI$  曲线

图 2 给出了利用算法 adap\_2 对 16-QAM 信号进行均衡的效果图, 共有 500 个码元参与迭代, 可见该算法明显打开了眼图, 达到了较好的均衡效果。

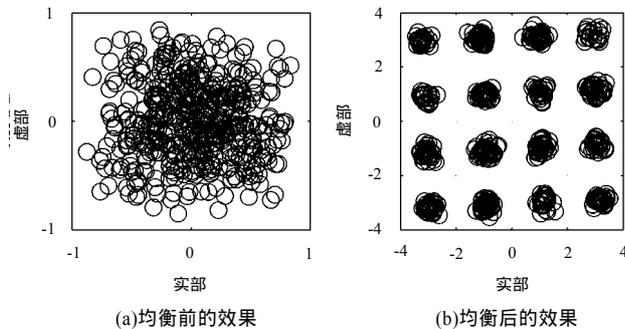


图 2 均衡前后眼图对比

### 实验 2 几种算法的比较

现在将算法 adap\_1, adap\_2 与文献[4]的迭代算法进行比较。实验中信噪比保持在 25 dB, 共进行了 100 次 Monte Carlo 实验。图 3 给出了 3 种算法的  $ISI$  平均收敛曲线。可以看到, 算法 adap\_1 的收敛速度最快且收敛值最优, 简化算法 adap\_2 的性能次优。在信噪比为 25 dB 时, adap\_1 和 adap\_2 都能在 200 次迭代后达到低于 0.01 的残留  $ISI$ 。因为算法 adap\_2 不

需要进行奇异值分解, 所以在计算上更加有效。当计算复杂性问题的成为主要考虑对象时, 可以首选 adap\_2。

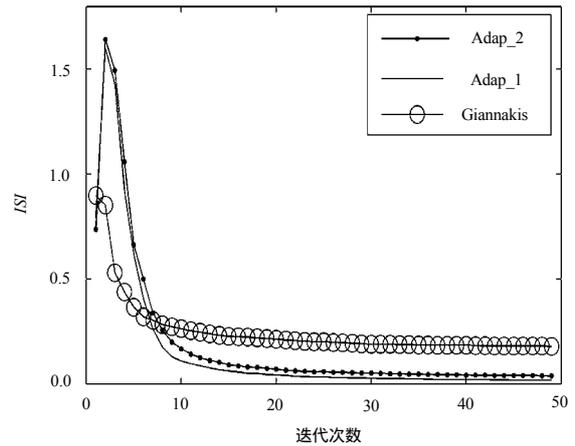


图 3 采用 3 种算法均衡的残留  $ISI$  曲线

## 5 结束语

本文基于文献[5]的块处理算法提出了一种在线迭代算法。该算法基于二阶统计量, 相比基于高阶统计量的方法, 能保证快速收敛, 且不需要对样本相关矩阵进行奇异值分解或者求伪逆, 因此, 对信道阶数估计误差不敏感。新算法可以逐个而不是逐块地对信号源码元进行恢复, 从而降低了时延, 是一种适用于实时通信的算法。通过引入遗忘因子, 还可以跟踪信道的变化。仿真结果显示新算法具有较好的均衡效果, 在信噪比为 25 dB 时, 仅需 20 次迭代就能达到低于 0.01 的残留码间干扰。

## 参考文献

- [1] Tan Hongzhou, Chow T W S. Blind Identification of Quadratic Nonlinear Models Using Neural Networks with Higher Order Cumulants[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2000, 47(3): 687-696.
- [2] Tan Hongzhou, Chow T W S. Blind and Total Identification of ARMA Models in Higher Order Cumulants Domain[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1999, 46(6): 1233-1240.
- [3] Tong Lang, Xu Guanghan, Kailath T. Blind Identification and Equalization Based on Second-order Statistics: A Time Domain Approach[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(2): 340-349.
- [4] Giannakis G B, Halford S D. Blind Fractionally Spaced Equalization of Noisy FIR Channels: Direct and Adaptive Solutions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(9): 2277-2292.
- [5] Shen Junqiang, Ding Zhi. Direct Blind MMSE Channel Equalization Based on Second-order Statistics[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2000, 48(4): 1015-1022.
- [6] Haykin S. Adaptive Filter Theory[M]. 4th Ed. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1996.