文章编号:0494-0911(2004)08-0007-02 中图分类号:P226 文献标识码:B

# 勒让德级数计算大地坐标主题反解的迭代算法

赵长胜

(徐州师范大学 国土信息与测绘工程系,江苏 徐州 221116)

# Iterative Arithmetic of Legendre Series Coordination Inverse Solution on Terrestrial Ellipsoid

ZHAO Chang-sheng

**摘要**:在地球椭球面上如果已知两点的大地经、纬度,求两点间的大地线长度及其正、反大地方位角的过程称为大地主题反解。大地主题计算用于空间技术、航空、航海、国防等现代科学技术领域。勒让德级数是解决短程大地主题计算的一种经典的方法。文献[1]中给出勒让德级数正解公式,现在给出该级数反解的算法,即迭代算法。这种迭代算法形式简单,便于理解与编程,避免了枯燥的反解公式的推导。

**关键词**:大地坐标;迭代算法;勒让德级数

## 一、勒让德级数的正解公式

勒让德级数的正解公式为

$$\begin{aligned}\Delta B =& \frac{V_1^2}{N_1}u - \frac{V_1^2 t_1}{2N_1^2}\eta^2 - \frac{2V_1^2\cdot\eta_1^2 t_1}{2N_1^2}u^2 - \\ & \frac{V_1^2(1+3t_1^2+\eta_1^2-9\eta_1^2t_1^2)}{6N_1^3}uv^2 - \\ & \frac{V_1^2\eta_1^2(1-t_1^2+\eta_1^2-5\eta_1^2t_1^2)}{2N_1^3}u^3 + \\ & \frac{V_1^2t_1(1+3t_1^2+\eta_1^2-9\eta_1^2t_1^2)}{24N_1^4}v^4 - \\ & \frac{V_1^2t_1(4+6t_1^2-13\eta_1^2-9\eta_1^2t_1^2)}{12N_1^4}u^2v^2 + \\ & \frac{v_1^2\eta_1^2t_1}{2N_1^4}u^4 + \frac{V_1^2(1+30t_1^2+45t_1^4)}{120N_1^5}uv^4 - \\ & \frac{V_1^2(2+15t_1^2+15t_1^4)}{30N_1^5}u^3v^2 \\ =& \alpha_{10}u + \alpha_{02}v^2 + \alpha_{20}u^2 + \alpha_{12}uv^2 + \\ & \alpha_{30}u^3 + \alpha_{04}v^4 + \alpha_{22}u^2v^2 + \\ & \alpha_{40}u^4 + \alpha_{14}uv^4 + \alpha_{32}u^3v^2 \\ =& \alpha_{10}u + f_B(B_1,u,v) \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta L\cos B_1 =& \frac{v}{N_1} + \frac{t_1}{N_1^2}uv - \frac{t_1^2}{3N_1^3}v^3 + \\ & \frac{(1+3t_1^2+\eta_1^2)}{3N_1^3}u^2v - \frac{t_1(1+3t_1^2+\eta_1^2)}{3N_1^4}uv^3 + \\ & \frac{t_1(2+3t_1^2+\eta_1^2)}{3N_1^4}u^3v + \frac{t_1^2(1+3t_1^2)}{15N_1^5}v^5 - \\ & \frac{(1+20t_1^2+30t_1^4)}{15N_1^5}u^2v^3 + \frac{(2+15t_1^2+15t_1^4)}{15N_1^5}u^4v \\ =& \beta_{01}v + \beta_{11}uv + \beta_{03}v^3 + \beta_{21}u^2v + \\ & \beta_{13}uv^3 + \beta_{31}u^3v + \beta_{05}v^5 + \\ & \beta_{23}u^2v^3 + \beta_{41}u^4v \\ =& \beta_{01}v + f_L(B_1,u,v) \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta A =& \frac{t_1}{N_1}v + \frac{(1+2t_1^2+\eta_1^2)}{2N_1^2}uv - \frac{t_1(1+2t_1^2+\eta_1^2)}{6N_1^3}v^3 + \\ & \frac{t_1(5+6t_1^2+\eta_1^2-4\eta_1^4)}{6N_1^3}u^2v - \\ & \frac{(1+20t_1^2+24t_1^4+2\eta_1^2+8\eta_1^2t_1^2)}{24N_1^4}uv^3 + \\ & \frac{(5+28t_1^2+24t_1^4+6\eta_1^2+8\eta_1^2t_1^2)}{24N_1^4}u^3v + \\ & \frac{t_1(1+20t_1^2+24t_1^4)}{120N_1^5}v^5 - \\ & \frac{t_1(58+280t_1^2+240t_1^4)}{120N_1^5}u^2v^3 + \\ & \frac{t_1(61+180t_1^2+120t_1^4)}{120N_1^5}u^4v \\ =& \gamma_{01}v + \gamma_{11}uv + \gamma_{03}v^3 + \gamma_{21}u^2v + \\ & \gamma_{13}uv^3 + \gamma_{31}u^3v + \gamma_{05}v^5 + \\ & \gamma_{23}u^2v^3 + \gamma_{41}u^4v \\ =& \gamma_{01}v + f_A(B_1,u,v) \qquad (3)\end{aligned}$$

式中,$B_1$,$L_1$,$B_2$,$L_2$ 是1,2两点的大地纬度、大地经度,$A_{12}$,$A_{21}$是相应点处的方位角,$u = S\cos A_1$,$v = S\sin A_1$,$\Delta B = B_2 - B_1$,$\Delta L = L_2 - L_1$,$\Delta A =$

收稿日期:2004-04-16
作者简介:赵长胜(1957-),男,辽宁彰武人,教授,主要从事测量数据处理与GPS高精度定位理论方面的研究。

$A_2-A_1$，$S$ 是大地线长度，$t_1=\tan B_1$，$\eta_1=e'\cos B_1$，$N_1=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_1}}$，$V_1=\sqrt{1+e'^2\cos^2 B_1}$，$a,e,e'$ 分别是地球椭球的长半轴长度、第一偏心率、第二偏心率。$\alpha,\beta,\gamma$ 都是大地纬度的函数。

勒让德级数是大地主题正算的一组基本公式，适用于边长短于 30 km 的情况。

## 二、勒让德级数的反解迭代算法

将式(1)，式(2)移项，经整理得

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{\alpha_{10}}\{\Delta B-f_B(B_1,u,v)\}\\v&=\frac{1}{\beta_{10}}\{\Delta L\cos B_1-f_L(B_1,u,v)\}\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由于式(4)是两个隐函数，因此可以采用迭代法求解。首先确定初值

$$\left.\begin{aligned}u^0&=\frac{\Delta B}{\alpha_{10}}\\v^0&=\frac{\Delta L\cos B_1}{\beta_{01}}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

以后各次迭代

$$\left.\begin{aligned}u^i&=\frac{1}{\alpha_{10}}\{\Delta B-f_B(B_1,u^{i-1},v^{i-1})\}\\v^i&=\frac{1}{\beta_{01}}\{\Delta L\cos B_1-f_L(B_1,u^i,v^{i-1})\}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

当两次迭代值之差小于给定值，即

$$\left.\begin{aligned}u^i-u^{i-1}&\leqslant\varepsilon\\v^i-v^{i-1}&\leqslant\varepsilon\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

停止迭代。

将 $u,v$ 代入式(3)，则可算得 $\Delta A''$，于是可计算出

$$\left.\begin{aligned}A_{12}&=A_m-\frac{1}{2}\Delta A''\\A_{21}&=A_m+\frac{1}{2}\Delta A''\pm180^\circ\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

并由 $u,v$ 可以反算出

$$\left.\begin{aligned}S&=\sqrt{u^2+v^2}\\A_m&=\tan^{-1}\frac{u}{v}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

为判断 $A_m$ 的象限，设 $b=B_2-B_1$，$l=L_2-L_1$，先按下式求出

$$\left.\begin{aligned}&T=\arctan\left|\frac{u}{v}\right| &&\text{当}|b|\geqslant|l|\\&T=\frac{\pi}{4}+\arctan\left|\frac{1-\left|\frac{u}{v}\right|}{1+\left|\frac{u}{v}\right|}\right| &&\text{当}|b|\leqslant|l|\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}&A_m=T &&\text{当 } b>0,l\geqslant0\\&A_m=\pi-T &&\text{当 } b<0,l\geqslant0\\&A_m=\pi+T &&\text{当 } b>0,l<0\\&A_m=2\pi-T &&\text{当 } b>0,l<0\\&A_m=\frac{\pi}{2} &&\text{当 } b=0,l>0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

## 三、算 例

笔者应用 Visual BASIC 编写了勒让德级数的正算程序和反算的迭代法程序，算例如下：

**1. 正算算例**

| 已知 | 求得 |
|---|---|
| $B_1=47°46'52.647\,0''$ | $B_2=47°56'27.354\,8''$ |
| $L_1=35°49'36.330\,0''$ | $L_2=36°03'29.402\,9''$ |
| $A_{12}=44°12'13.664\,0''$ | $A_{21}=224°22'31.405\,7''$ |
| $S=24\ 797.282\ 6$ m | |

**2. 反算算例**

| 已知 | 求得 |
|---|---|
| $B_1=47°46'52.647\,0''$ | $B_2=47°56'27.354\,8''$ |
| $L_1=35°49'36.330\,0''$ | $L_2=36°03'29.402\,9''$ |

利用反算程序求得

$S=24\ 797.281\ 2$ m

$A_{12}=44°12'13.661\,3''$

$A_{21}=224°22'31.405\,6''$

## 参考文献：

[1] 孔祥元，郭际明，刘宗泉．大地测量学基础[M]．武汉：武汉大学出版社，2001．