

## 基于牛顿法的缓和曲线加桩计算

许 曦<sup>1,2</sup>,刘庆元<sup>1</sup>,余加勇<sup>2</sup>

(1. 中南大学 资源环境与建筑工程学院,湖南 长沙 410083; 2. 湖南大学  
土木工程学院,湖南 长沙 410082)

### The Calculation Based on Newton Method for Determining the Stakes on the Transition Curve

XU Xi, LIU Qing-yuan, YU Jia-yong

**摘要:**推导一种确定缓和曲线任意加桩的直接算法。由缓和曲线几何模型建立加桩点所对应的曲线长方程式,再采用牛顿法进行解算。该方法数据处理严密且简单实用,已在编程计算器和掌上计算机(PDA)上实现。

**关键词:**缓和曲线;加桩;曲线长;牛顿法

#### 一、问题的提出

确定路线加桩是道路(包括曲线桥梁)施工放样及质量检测的重要内容之一,比如要在现场确定重要地物所对应的路线里程,或检查道路边线(包括曲线桥梁的护栏)的实际偏差以及开挖边坡至道路中线的距离等。确定路线加桩对于直线段和圆曲线段来说是非常简单的,问题在于缓和曲线段。文献[1]和文献[2]分别介绍了一种搜索算法和截面二点解析法。其中搜索算法是以一定的步长逐点验算曲线中点与加桩点的连线方向是否与法线方向重合,当两者较差(方位角之差)小于设定的限值,则停止搜索,由此获得相应的近似结果。该方法虽然避开了高次方程的求解,但也存在以下一些实际问题。

1. 计算效率低。对于编程计算器和掌上计算机(PDA)而言,随着缓和曲线长度的增加和计算精度(搜索步长)的提高,占用机时成倍增加。

2. 计算不够严密。从几何分析可知,对于某些情况,如图1中的A、B点,理论上存在多值解,而搜索计算要保证获得所有解,必须对整条路线进行搜索,这样计算效率更低。

3. 无法在可编程计算器和PDA上实现,因而难以在施工中获得广泛的应用。

截面二点解析法虽然计算精度较高,但计算公式和逻辑判断复杂,同样难以实现于普通计算器,此外该方法需实测两点坐标,增大了外业工作量。鉴于以上分析,有必要寻找一种更为简单实用的直接

算法。

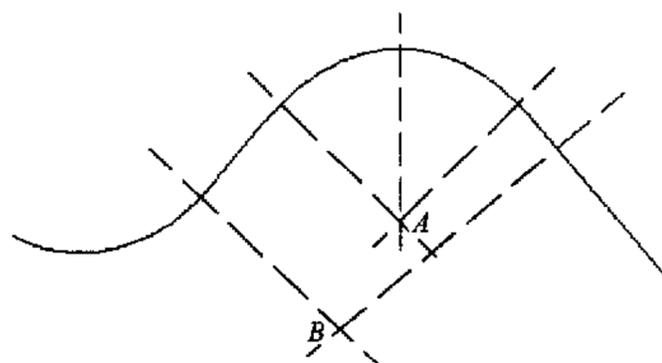


图1

#### 二、直接算法的推导

对于缓和曲线段而言,确定路线加桩的关键是计算加桩点所对应的缓和曲线长,即加桩点在缓和曲线上的投影至切点的里程差,由此再计算所需要的各项数据。为简化分析,首先由缓和曲线的切线坐标系进行考虑。

缓和曲线的参数方程为

$$\left. \begin{aligned} x &= l - \frac{l^5}{40c^2} \\ y &= \frac{l^3}{6c} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

设  $A(x_A, y_A)$  为缓和曲线外的任意加桩点,过 A 点的缓和曲线法线方程为

$$y - y_A = -\frac{1}{\tan \beta}(x - x_A) \quad (2)$$

式中,  $\beta$  为缓和曲线的切线方位角(见图2)。该法线与曲线的交点 P 所对应的曲线长计算式为

$$\frac{l^3}{6c} - y_A = -\cot \beta \left( l - \frac{l^5}{40c^2} - x_A \right) \quad (3)$$

将  $\cot \beta$  按级数展开

$$\cot \beta = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{45}\beta^3 \dots \quad (0 < |\beta| < \pi) \quad (4)$$

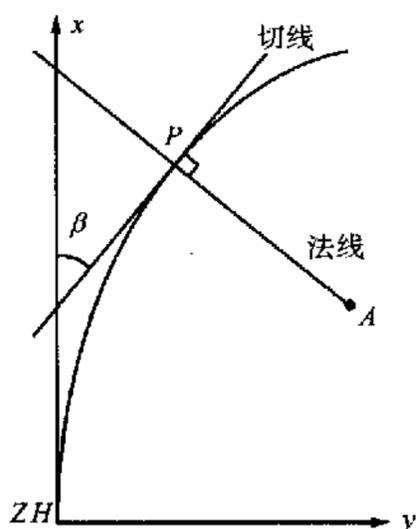


图2

顾及  $\beta = \frac{l^2}{2c}$  并将式(4)代入式(3)得(略去式(4)的高次项)

$$\frac{l^3}{6c} - y_A = -\left( \frac{2c}{l^2} - \frac{l^2}{6c} \right) \left( l - \frac{l^5}{40c^2} - x_A \right) \quad (5)$$

将式(5)展开整理得

$$l^9 - 12c^2 l^5 + 40c^2 x_A l^4 - 240c^3 y_A l^2 + 480c^4 l = 480c^4 x_A \quad (6)$$

即

$$f(l) = 0 \quad (7)$$

上式为高次代数方程,采用牛顿公式进行迭代解算

$$l_{k+1} = l_k - \frac{f(l_k)}{f'(l_k)} \quad (8)$$

即

$$l_{k+1} = \frac{8l_k^9 - 48c^2 l_k^5 + 120c^2 x_A l_k^4 - 240c^3 y_A l_k^2 + 480c^4 x_A}{9l_k^8 - 60c^2 l_k^4 + 160c^2 x_A l_k^3 - 480c^3 y_A l_k + 480c^4} \quad (9)$$

牛顿法的收敛速度很快(至少是平方收敛),其成功的关键在于选取初值  $l_0$ , 如果  $l_0$  离所求的根  $l_A$  较远,则迭代过程可能发散。初值  $l_0$  一般可取

$\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  (投影点离切点较远时)或  $x_A$  (离切点较近时),具体情况可根据迭代过程的单调性确定,即

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \quad (10)$$

由于在实际工作中,加桩点一般不会离路线中线太远,故上述两种  $l_0$  的取值之一可保证迭代收敛,而无需采用牛顿下山法。实践证明,式(9)的迭代过程收敛很快,一般迭代 2~3 次即可获得误差小于  $\pm 0.1$  mm 的结果。

算例1:已知圆曲线半径  $R = 1\,000$  m,缓和曲线长  $l_s = 120$  m,缓和曲线段某加桩点 A 的切线坐标为  $x_A = 11.782$  m,  $y_A = -99.997$  m,求其所对应的缓和曲线长  $l_A$ 。

解:取  $x_A$  为初值  $l_0$ ,解得  $l_A = 11.724\,72$  m (A 点距离路线中线 100 m),迭代 1 次完成;

或取  $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  为初值  $l_0$ ,解得  $l_A = 11.724\,72$  m,迭代 3 次完成。

算例2:曲线参数同算例1,缓和曲线段某加桩点 A 的切线坐标为  $x_A = 98.723$  m,  $y_A = -198.805$  m,求其所对应的缓和曲线长  $l_A$ 。

解:取  $x_A$  为初值  $l_0$ ,解得  $l_A = 91.724\,56$  m (A 点距离路线中线 200 m),迭代 2 次完成;

或取  $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  为初值  $l_0$ ,解得  $l_A = 91.724\,56$  m,迭代 3 次完成。

### 三、坐标转换

在通常情况下,我们所测得的加桩点坐标是属于高斯坐标系的,为此需将 A 点的高斯坐标  $(X_A, Y_A)$  转换为缓和曲线切线坐标系中的坐标  $(x_A, y_A)$ 。设在高斯坐标系中,起始切线  $(ZH \rightarrow JD)$  方位角为  $\alpha_1$ ,终止切线  $(JD \rightarrow HZ)$  方位角为  $\alpha_2$ ,交点坐标为  $(X_{JD}, Y_{JD})$ ,直缓点坐标为  $(X_{ZH}, Y_{ZH})$ ,缓直点坐标为  $(X_{HZ}, Y_{HZ})$ 。

首先来看在第一缓和曲线段  $(ZH \rightarrow HY)$  曲线右转时的情况。由 A 点的  $(x_A, y_A)$  化算为  $(X_A, Y_A)$  的计算式为

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ZH} \\ Y_{ZH} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} \quad (11)$$

反之,由  $(X_A, Y_A)$  化算为  $(x_A, y_A)$  的计算式为

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{ZH} \\ Y_A - Y_{ZH} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中

$$\begin{bmatrix} X_{ZH} \\ Y_{ZH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{JD} - T \cos \alpha_1 \\ Y_{JD} - T \sin \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

同理可推出其他情况下坐标转换式,归纳如下。

1. 第一缓和曲线段  $(ZH \rightarrow HY)$  曲线为右转时

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{JD} + T \cos \alpha_1 \\ Y_A - Y_{JD} + T \sin \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2. 第一缓和曲线段  $(ZH \rightarrow HY)$  曲线为左转时

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{JD} + T \cos \alpha_1 \\ Y_A - Y_{JD} + T \sin \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

3. 第二缓和曲线段(HY→ZH)曲线为右转时

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{JD} - T \cos \alpha_2 \\ Y_A - Y_{JD} - T \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

4. 第二缓和曲线段(HY→ZH)曲线为左转时

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & -\cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A - X_{JD} - T \cos \alpha_2 \\ Y_A - Y_{JD} - T \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

#### 四、程序框图

程序设计框图见图3。

由求出的曲线长  $l_A$  代入缓和曲线方程即可获得投影点的切线坐标,再做坐标转换可求得投影点的高斯坐标,然后由坐标反算可得 A 点至路线中线的距离和方向。该程序已在 CASIO  $f_x-4500P$  和  $f_x-4800P$  计算器和 PDA 上实现。

#### 五、结束语

本文所推导的直接算法具有数据处理严密、计算效率高、便于掌握等优点,克服了搜索算法<sup>[1]</sup>难以实现于普通计算器的缺点;与截面二点解析法<sup>[2]</sup>

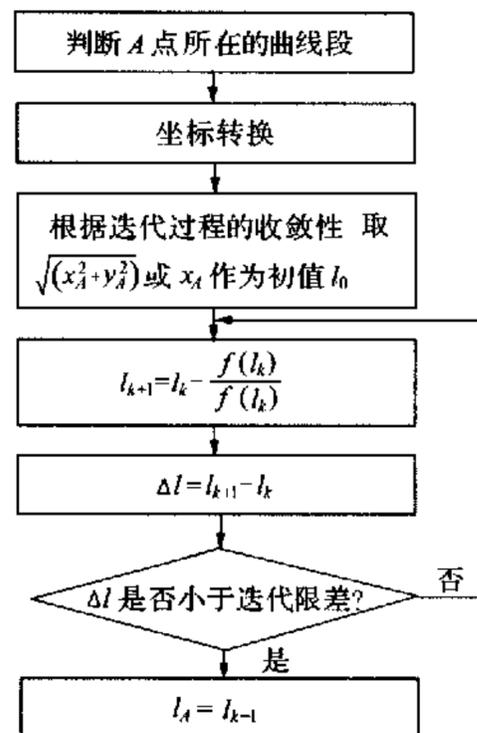


图3

相比,该方法的计算公式和逻辑判断简单,易于程序实现,且无需增加额外测点,因此更具实用价值。

#### 参考文献:

- [1] 秦世伟,陈小枚.快速确定交通路线加桩的简要方法探讨[J].测绘通报,2001,(1).
- [2] 闻道秋.快速确定路线加桩的一种方法[J].工程勘察,1998,(3).
- [3] 李青岳,陈永奇.工程测量学(修订版)[M].北京:测绘出版社,1995.

(上接第32页)

$$x_L = 92\ 506.590\ \text{m}, y_L = 79\ 992.700\ \text{m}$$

$$x_R = 92\ 480.675\ \text{m}, y_R = 80\ 029.794\ \text{m}$$

#### 五、结束语

1. 该模型的数学公式可读性和可操作性强,易于编程。

2. 该模型在传统测设的局部坐标与线路控制坐标间建立了纽带,通过坐标转换将各个中桩的局部坐标统一到线路控制坐标系中,并能实现边桩坐标的同步计算。

3. 该模型可以桩号  $L$  为引数,建立包括中桩、边桩、控制点在内的坐标数据文件。将坐标数据文

件导入全站仪或 GPS 接收机,应用坐标放样功能,便可实现中、边桩的同时放样。特别是 GPS 的 RTK 技术出现后,无需点间通视,大大提高了坐标放样的工作效率,可基本达到中、边桩放样的自动化。

4. 对于复曲线、回头曲线等复杂曲线,可将其分解成简单曲线后,再按该模型进行坐标计算。

#### 参考文献:

- [1] 刘延伯.工程测量[M].北京:冶金工业出版社,1987.
- [2] 侯国富,等.建筑工程测量[M].北京:测绘出版社,1990.