

基于积分二次相位函数的多分量 LFM 信号分析

李宏 秦玉亮 李彦鹏 王宏强 黎湘
(国防科技大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 基于二次相位函数的调频率估计算法用于多分量 LFM 信号时, 信号间互扰严重并且会产生伪峰。针对这一问题, 该文采用积分二次相位函数, 提出了一种改进的多分量 LFM 信号分析方法, 仿真实验表明: 该方法相比于原方法能够有效抑制伪峰和信号间互扰, 同时要求的信噪比门限低, 估计均方误差更接近 CRLB。

关键词: 信号处理; LFM 信号; 参数估计; 积分二次相位函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)06-1363-04

Analysis of Multi-component LFM Signals by the Integrated Quadratic Phase Function

Li Hong Qin Yu-liang Li Yan-peng Wang Hong-qiang Li Xiang

(School of Electronic Sci. and Eng., National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The algorithm based on quadratic phase function is efficient to estimate the parameters of the LFM signals. When it is dealing with the multi-component LFM signals, spurious peaks arise and interference is severe. A new approach based on integrated quadratic phase function is proposed to solve the problem. The performance of the proposed approach is evaluated by simulation to show that the method presents advantages in terms of that it can suppress the spurious peaks and interference and gives a closer approach to the CRLB and a lower SNR threshold with respect to the quadratic phase function.

Key words: Signal processing; LFM signal; Parameter estimation; Integrated quadratic phase function

1 引言

在雷达、通信及电子对抗系统中, 经常需要处理未知参数的多分量线性调频(LFM)信号。如弹道导弹逼近告警雷达系统时, 导弹具有较大的加速度并且会释放多个诱饵或“子弹”, 这些多目标相对于雷达具有不同的径向加速度, 其回波表现为多个 LFM 信号的叠加。而在电子对抗系统中, 为了对敌方雷达系统实施干扰, 经常需要在复杂的电磁环境中对未知参数的多个 LFM 雷达信号进行侦测和跟踪。对多分量未知参数 LFM 信号的检测估计问题一直是信号处理的重要内容。

加性高斯噪声条件下未知参数 LFM 信号参数估计已经开展了有很多研究: 基于最大似然(ML)准则^[1]的方法不仅运算量大, 还可能会收敛到局部极值点; 结合时频分析的方法如 Radon-Wigner 变换(RWT)法^[2]由于 Wigner-Ville 分布良好的时频聚集性, 具有不错的性能, 但需要进行二维搜索获取参数估计值; Radon-Ambiguity 变换(RAT)法^[3]和分数傅里叶变换(FrFT)法^[4-6]将信号转换到一维参数空间获取 LFM 信号的调频率估计, 然后采用解调频的方法获得其它参数估计值。由于 FrFT 法具有良好的噪声抑制能力和较强的调频率分辨能力, 近年来受到关注。

为了满足实际系统对算法实时性的需求, 一些运算量较小的算法相继被提出, 其中最具代表性的有 Peleg 等提出的 Polynomial-Phase 变换(PPT)法^[7]和 O'Shea 等提出的基于 Cubic Phase 函数(CPF)的调频率估计方法^[8,9]。王勇等在 CPF 方法的基础上, 提出了 QPF(Quadratic Phase 函数)方法^[10], 用于分析 LFM 信号, 该方法与基于 ML 和时频分析的方法相比运算量小, 但信噪比门限较高并且估计精度相对较差, 并且用于分析多分量 LFM 信号时, 信号间互扰严重, 会产生伪峰。针对这一问题, 本文基于 QPF 方法, 提出了 IQPF(Integrated Quadratic Phase 函数)方法, 该方法相比于 QPF 方法, 不仅能够抑制信号间互扰和伪峰, 而且所需信噪比门限较低, 估计均方误差更接近 CRLB。

本文第 2 节简要介绍基于 QPF 的 LFM 信号参数估计方法, 分析 QPF 用于多分量 LFM 信号时信号间互扰的影响, 并给出伪峰产生的条件; 第 3 节给出 IQPF 的定义及其输出信噪比的表达式, 与 QPF, RWT 和 PPT 方法进行了比较; 最后仿真分析了 IQPF 的估计性能。

2 基于 QPF 的调频率估计算法

2.1 信号模型

有限时长 LFM 信号可表示为

$$s(t) = Ae^{j\left(\omega_0 t + \frac{1}{2}m_0 t^2\right)}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

对信号进行 N 点均匀采样, 假设采样间隔为 $\Delta T = T/N$, 则采样频率为 $F_s = 1/\Delta T$ 。令 $a_1 = \omega_0 \Delta T = \omega_0 T/N$, $b_1 = m_0 \Delta T^2 = m_0 T^2/N^2$, 则信号模型式(1)可表示为

$$s(n) = A e^{j(a_1 n + (1/2)b_1 n^2)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

根据 Nyquist 采样定理, 得到 a_1 , b_1 的取值范围分别为

$$0 \leq a_1 \leq \pi, \quad -\pi/N \leq b_1 \leq \pi/N \quad (3)$$

参照文献[10], 信号 $s(n)$ 的 QPF 定义为

$$\text{QPF}_s(n, \theta) = \sum_k s(n+k)s(n-k)e^{-j\theta k^2} \quad (4)$$

式中 $\theta \in [-\pi/N, \pi/N]$, $0 \leq n \leq (N-1)$, $-\min(n, N-1-n) \leq k \leq \min(n, N-1-n)$ 。其模平方为

$$\begin{aligned} |\text{QPF}_s(n, \theta)|^2 &= A^4 \left| \sum_{k=-l}^l e^{j[a_1(n+k) + (1/2)b_1(n+k)^2]} e^{-j\theta k^2} \right|^2 \\ &= A^4 \left| \sum_{k=-l}^l e^{-j(\theta - b_1)k^2} \right|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $l = \min(n, N-1-n)$ 。

2.2 基于 QPF 的 LFM 信号参数估计^[10]

由式(5)可以看出, 当 $\theta = b_1$ 时, 式(5)取最大值。因此可以通过检测 n_c 时刻 $|\text{QPF}_s(n, \theta)|^2$ 的峰值获得 b_1 的估计值 \hat{b}_1 , 称该方法为 QPF 方法。利用 \hat{b}_1 , 通过对信号解调频并求 Fourier 变换峰值即可得到初始相位 a_1 和幅度 A 的估计值。可以证明, 在 $n_c = (N-1)/2$ 处获得的估计值的均方误差在高信噪比条件下具有渐进 CRLB (Cramer-Rao 下界) 性能。

不失一般性, 首先分析两分量 LFM 信号的情况。两分量 LFM 信号可表示为

$$r(n) = \sum_{i=1}^2 A_i e^{j(a_i n + (1/2)b_i n^2)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

根据式(4)可以得到其 QPF 为

$$\text{QPF}_r(n, \theta) = \text{QPF}_{r_1}(n, \theta) + \text{QPF}_{r_2}(n, \theta) + 2\text{QPF}_{r_1, r_2}(n, \theta) \quad (7)$$

式中 $\text{QPF}_{r_1}(n, \theta) = A_1^2 e^{j2[a_1 n + (1/2)b_1 n^2]} \sum_k e^{-j(\theta - b_1)k^2}$,

$$\text{QPF}_{r_2}(n, \theta) = A_2^2 e^{j2[a_2 n + (1/2)b_2 n^2]} \sum_k e^{-j(\theta - b_2)k^2},$$

$\text{QPF}_{r_1, r_2}(n, \theta)$ 为交叉项, 表示为

$$\begin{aligned} \text{QPF}_{r_1, r_2}(n, \theta) &= A_1 A_2 e^{j[(a_1 + a_2)n + (1/2)(b_1 + b_2)n^2]} \\ &\quad \cdot \sum_k e^{-j\{\theta - (1/2)(b_1 + b_2)k^2 - [(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)n]k\}} \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8), 当满足:

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)n = 0 \quad (9)$$

时, 在 $\theta = (b_1 + b_2)/2$ 处将产生伪峰, 如图 1 所示。图中两 LFM 信号幅度相同, $a_1 = 3\pi/5$, $a_2 = 0$, $b_1 = -b_2 = -3\pi/5N$, $N=201$ 。图中的细尖峰值为伪峰, 出现在 $\theta = (b_1 + b_2)/2 = 0$ 处。

当不满足式(9)时, 不会出现伪峰, 但是交叉项和信号间互扰的影响依然存在, 如图 2 所示, $n = (N-1)/2$ 截面所得到的信号峰值附近不再“干净”, 出现杂乱的峰值。其中两 LFM 信号幅度相同, $a_1 = 3\pi/5$, $a_2 = \pi/2$, $b_1 = -3\pi/5$,

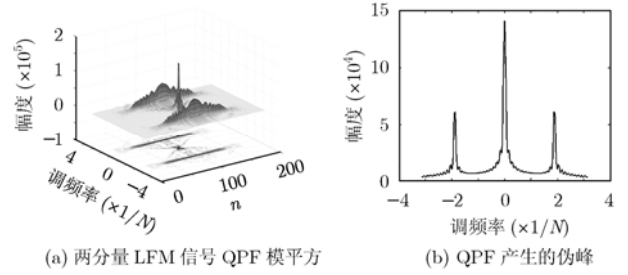


图1 两分量 LFM 产生伪峰

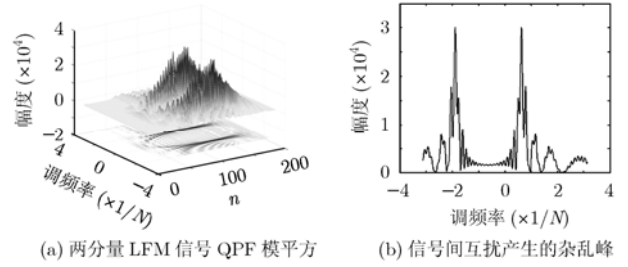


图2 交叉项和信号间互扰的影响

$b_2 = \pi/5N$, $N=201$ 。

对于多于两分量的情况, 可以做类似的分析, 任两信号只要满足式(9)给出的条件, 就会产生伪峰。对于两分量 LFM 信号, 合理选取时间点可以避免伪峰, 但是对于多于两分量的 LFM 信号, 时间点的选取毫无规律可循, 因此, 文献[10]提出的算法不再适用。

3 积分二次相位函数

根据图 1(a)和图 2(b)可知, 在调频率-时间平面内, QPF 函数模平方能量主要在信号调频率上聚集, 伪峰、杂乱峰等为细尖峰值, 在不同时刻 n 处峰值变化剧烈且对应的调频率没有规律。若将 QPF 函数模平方在调频率-时间平面内沿时间轴做积分, 则 QPF 函数模平方能量将在信号调频率上得到积累, 从而抑制伪峰和杂乱峰的影响。将式(4)表示的二次相位函数取模平方后沿时间轴积分, 称为积分二次相位函数 (IQPF), 定义为

$$\text{IQPF}_s(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=-l}^l s(n+k)s(n-k)e^{-j\theta k^2} \right|^2 \quad (10)$$

式中 $l = \min(n, N-1-n)$ 。

3.1 输出信噪比分析

噪声环境中待处理信号表示为信号 $s(n)$ 加方差为 σ^2 的零均值高斯白噪声 $v(n)$ 的形式:

$$x(n) = s(n) + v(n), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (11)$$

式中 $s(n)$ 由式(2)给出, 并假设信号包络 A 为常数。输入信噪比为: $\text{SNR}_{\text{in}} = A^2/\sigma^2$ 。参照文献[2,3], IQPF 的输出信噪比定义为

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{|\text{IQPF}_s(b_1)|^2}{\text{var}\{\text{IQPF}_{s+v}(b_1)\}} \quad (12)$$

利用高斯白噪声的性质, 经过推导可以得到:

$$\text{SNR}_{\text{out}} \approx \frac{5N^3 \text{SNR}_{\text{in}}^4}{48N^2 \text{SNR}_{\text{in}}^3 + 510N \text{SNR}_{\text{in}}^2 + 1440 \text{SNR}_{\text{in}} + 360} \quad (13)$$

以上表达式中的近似对于 $N \gg 1$ 时成立。经过类似的推导, QPF 方法的输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{\text{QPF}} = \frac{N^2 \text{SNR}_{\text{in}}^4}{8N \text{SNR}_{\text{in}}^3 + 4N \text{SNR}_{\text{in}}^2 + 48 \text{SNR}_{\text{in}} + 12} \quad (14)$$

图 3 给出了 4 种算法对信号长度 N 归一化后的输出信噪比与输入信噪比的关系, N 作为参变量。RWT 和 PPT⁽²⁾(2 阶 PPT) 的输出信噪比表达式参见文献[2,11]。从图 3 可以得出如下结论:

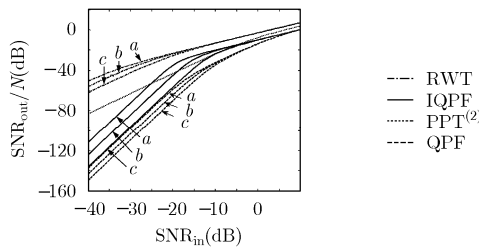


图 3 $\text{SNR}_{\text{out}}/N$ 与 SNR_{in} 的关系 $a: N=2048, b: N=512, c: N=128$

(1)4 种方法当输入信噪比小于一个特定值时, 输出信噪比快速减小, 即“门限效应”, 由算法的非线性导致; 随着信号长度 N 增大, IQPF 对门限改善性能最好, 而 RWT 和 PPT⁽²⁾改善不大;

(2)IQPF 较 RWT 的差距由 IQPF 的非相参积累导致; 当信号长度 N 大于 128 时, IQPF 较 PPT⁽²⁾有明显优势。

3.2 运算量分析

直接计算 QPF 函数的最大值的运算量为 $O(N \log_2 N)$ 。PPT⁽²⁾的计算复杂度也为 $O(N \log_2 N)$ ^[12], RWT 可以采用解调频方法实现, 运算量为 $O(NM \log_2 N)$ ^[3], M 投影角个数。IQPF 的运算量与 RWT 解调频实现方法相当为 $O(N^2 \log_2 N)$, 但仅需要进行一维搜索, 并且对采样率要求也较低。

4 仿真实验

本文利用 Matlab[®]对 IQPF 算法的性能进行了仿真实验。以下仿真实验中如无特别说明, 信号长度均为 $N=201$ 。

实验 1 小信号压制分析

进行了两组仿真, 仿真参数为

(1)信号 1: 幅度 A_1 , $a_1 = \pi/2$, $b_1 = -2\pi/5N$; 信号 2: 幅度 A_2 , $a_2 = 3\pi/5$, $b_2 = -\pi/5N$;

(2)信号 3: 幅度 A_3 , $a_3 = \pi/5$, $b_3 = 3\pi/5N$; 信号 4: $a_4 = 3\pi/5$, $b_4 = -\pi/5N$ 。

两信号幅度比 $A_1:A_2$ 分别取 1:1, 2:3, 1:2 和 1:3, 仿真结果如图 4 所示。当信号幅度为 1:1 时, IQPF 输出两个幅

度近似相等的峰值; 当幅度比为 1:3 时, 小信号已经消失。可见 IQPF 对小信号压制非常严重, 这是因为计算 IQPF 的时候, 信号幅度进行了两次平方运算。第(2)组信号满足伪峰产生条件, 但如图 4(b)所示, 仿真结果并没有出现伪峰。

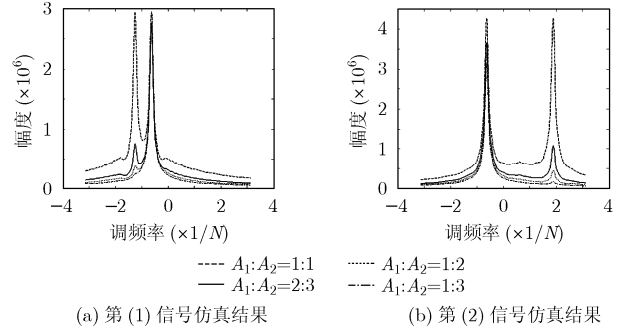


图 4 小信号压制仿真

实验 2 多分量 LFM 信号的 IQPF

对噪声中的 3 分量和 4 分量 LFM 信号的 IQPF 进行了仿真, 3 个信号参数分别为: 信号 1: $a_1 = 4\pi/5, b_1 = -\pi/2N$, 信号 2: $a_2 = \pi/2, b_2 = \pi/4N$, 信号 3: $a_3 = 0, b_3 = -3\pi/5N$, 各分量信号幅度相等。这里多分量信号存在时信噪比定义为: 任一信号能量与噪声能量的比。仿真结果如图 5 所示。图 5(b)为在前 3 信号的基础上增加第 4 个信号, 参数为: $a_4 = \pi/50$, $b_4 = 4\pi/5N$ 。可以看到, 在信噪比为 -6dB 时, 仍能够在正确的位置上形成峰值, 但是由于信号间互扰的影响, 峰值幅度不再相等。图中实线为不存在噪声时的仿真结果。

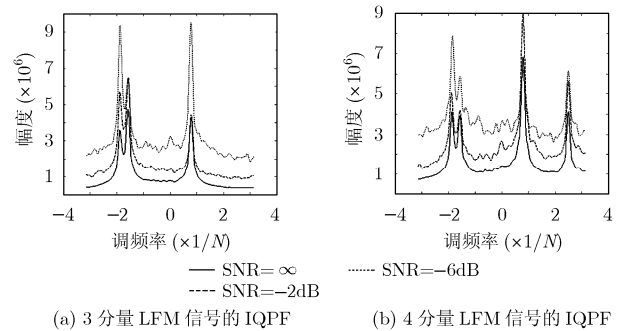


图 5 多分量 LFM 信号的 IQPF

实验 3 估计精度比较

仿真中的信号参数为: $a_1 = 0.3\pi$, $b_1 = 3\pi/10N$, 在不同信噪比下分别进行了 1000 次 Monte-Carlo 仿真试验, 结果如图 6。图中的 CRLB 曲线由 $\text{CRLB}\{\hat{b}_1\} = 360 / (N^5 \text{SNR})$ ^[8-10] 给出。比较图 6(a)与文献[2]中给出的 RWT 方法对 LFM 信号调频率估计均方误差的仿真结果, 可知 IQPF 与 RWT 具有相同的信噪比门限, 约为 3dB, 即信噪比大于 3dB 时, 估计精度接近 CRLB, 而当信噪比小于 3dB

时,估计精度变的很差;而 QPF 信噪比门限较大,约为 7dB,并且估计的均方误差也较 IQPF 方法大。图 6(b)为 $N=200$ 的仿真结果,图中点划线为 RWT 的理论均方误差 $\frac{360}{N^5} \left(\frac{1}{\text{SNR}} + \frac{2}{N \text{SNR}^2} \right)$ [2]。从图中可以看出,两种方法估计均方误差比 $N=16$ 更加接近 CRLB,其中 IQPF 均方误差仿真结果与 RWT 的理论均方误差吻合的很好,说明 IQPF 与 RWT 的估计精度性能相当;并且信噪比门限相比 $N=16$ 时均有减小, IQPF 门限约为 -6dB, QPF 约为 -1dB, 两门限差由 $N=16$ 时的 4dB 变为 5dB。可见, IQPF 较 QPF 有较高的估计精度和低信噪比门限,随着 N 增大, IQPF 的性能优势更加明显。

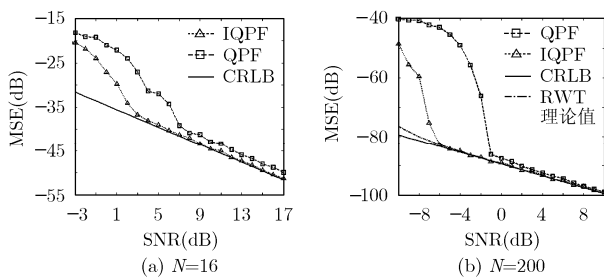


图 6 高斯噪声中单分量 LFM 信号调频率估计均方误差

5 结论

文献[10]提出的利用二次相位函数估计信号调频率的算法在处理多分量 LFM 信号时信号间互扰严重并会产生伪峰。针对这一问题,本文提出了一种基于积分二次相位函数的多分量 LFM 信号分析方法,该方法能够有效抑制信号间互扰和伪峰。推导了该算法的输出信噪比表达式,分析比较了该方法与 QPF, RWT 及 PPT 方法的输出信噪比性能。仿真结果表明该算法能够有效抑制信号间互扰和伪峰。该算法对小信号有较严重的压制作用,当信号幅度比小于 1:2 时,小信号检测困难。与文献[2]给出的 RWT 方法的仿真结果 ($N=16$) 对比发现该方法与 RWT 有相同的信噪比门限,并且 IQPF 方法的均方误差仿真结果与文献[2]中给出的 RWT 方法的均方误差理论结果吻合,说明两种方法估计性能相当。与 QPF 方法相比具有更低的信噪比门限并且估计的均方误差也更接近于 CRLB,代价是增加了运算量。

参考文献

- [1] Abatzoglou T J. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 1986, 22(6): 708-715.
- [2] Barbarossa S. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined Wigner-Hough transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1995, 43(6): 1511-1515.
- [3] Wang M, Chan A K, and Chui C K. Linear frequency-modulated signal detection using Radon-ambiguity

transform[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1998, 46(3): 571-586.

- [4] 奇林, 陶然等. 基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J]. *中国科学, E 辑*, 2003, 33(8): 749-759.
Qi Lin and Tao Ran, et al. Multicomponent LFM signal detection and parameter estimation based on fractional Fourier transform[J]. *Science in China, Series E*, 2003, 33(8): 749-759.
- [5] 刘建成, 刘忠等. 高斯白噪声背景下的 LFM 信号的分数阶 Fourier 域信噪比分析[J]. *电子与信息学报*, 2007, 29(10): 2337-2340.
Liu Jian-cheng and Liu Zhong, et al. SNR analysis of LFM signal with Gaussian white noise in fractional Fourier transform domain[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2007, 29(10): 2337-2340.
- [6] 刘建成, 王雪松等. 基于分数阶 Fourier 变换的 LFM 信号参数估计精度分析[J]. *信号处理*, 2008, 24(2): 197-200.
Liu Jian-cheng and Wang Xue-song, et al. Parameters resolution of LFM signal based on fractional Fourier transform[J]. *Signal Processing*, 2008, 24(2): 197-200.
- [7] Peleg S and Porat B. Estimation and classification of polynomial-phase signal[J]. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1991, 37(2): 422-430.
- [8] O'Shea P. A new technique for estimating instantaneous frequency rate[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(8): 251-252.
- [9] O'Shea P. A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(2): 385-393.
- [10] 王勇, 姜义成. 一种新的 LFM 信号参数估计算法[J]. *信号处理*, 2008, 24(1): 132-134.
Wang Yong and Jiang Yi-cheng. A new algorithm for parameter estimation of LFM signals[J]. *Signal Processing*, 2008, 24(1): 132-134.
- [11] Barbarossa S and Petrone V. Analysis of polynomial-phase signals by the integrated generalized ambiguity function[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(2): 316-327.
- [12] Peleg S and Porat B. Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic System*, 1991, 27(4): 607-616.

- 李 宏: 男, 1982年生, 博士生, 从事精确制导、LPI雷达信号截获方面的研究。
- 秦玉亮: 男, 1980年生, 讲师, 从事精确制导中的信号处理方面的研究。
- 李彦鹏: 男, 1972年生, 副研究员, 硕士生导师, 主要从事目标识别性能评估等方面的研究。
- 王宏强: 男, 1970年生, 研究员, 硕士生导师, 主要从事多传感器数据融合、目标跟踪等方面的研究。
- 黎 湘: 男, 1967年生, 教授, 博士生导师, 主要从事精确制导、信息融合、非线性信号处理等方面的研究。