

基于RRQR分解的高分辨谱估计方法的性能分析*

李有明

(西安电子科技大学电子工程研究所 西安 710071)

摘要 本文研究了基于数据矩阵的秩校正QR(RRQR)高分辨谱估计方法,给出了该方法估计源方位角误差的一种非渐近方差估计式。理论分析和计算机模拟结果证明了这一结果的正确性。

关键词 阵列信号处理,方向估计,QR分解,性能分析

1 引言

近年来,在多元定位问题中,一类基于特征分解的高分辨阵列处理方法引起人们极大的兴趣。比较典型的有MUSIC^[1],Min-Norm^[2]等方法。大量的理论分析和计算机模拟结果表明^[3],与传统方法相比,这类方法具有高的方向分辨特性。然而由于要对数据协方差阵做特征分解,运算量大,实时处理有一定难度。

在降低分辨性能不大的情况下,为减少运算量,人们做了不懈努力,并已取得一些进展。如ESPRIT^[4],RRQR(Rank Revealing QR)^[5],子空间迭代^[6]等方法。

基于估计协方差矩阵的特征分解渐近误差估计结果^[3],人们较多地讨论了一大类基于特征分解方法的性能分析,而对于RRQR方法的性能分析还未见讨论。

本文利用矩阵扰动技巧,得到了基于数据矩阵的RRQR方法的估计方差表示式,理论分析和计算机模拟结果证明了这一结果的正确性。同时也表明,RRQR方法在较高信噪比(SNR)情形,性能接近MUSIC方法,而在低SNR情形,性能明显比MUSIC方法差,即RRQR方法的运算量减少是以性能损失为代价的。

2 RRQR方法简介

假设一阵列由 N 个阵元组成,空间有 M 个平面波信号被该阵列所接收。阵列输出的向量形式为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{n}(t),$$

其中 $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T$; $\mathbf{S}(t) = (s_1(t), \dots, s_M(t))^T$; $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), \dots, n_N(t))^T$ 为噪声向量; $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_M)]$, $\mathbf{a}(\theta_i)$ 为第 i 个信号源对应的方向向量,它们线性独立。

1993-06-18收到,1994-01-10定稿

* 电子预研基金资助课题

李有明 男 1963年生,讲师,主要从事阵列信号处理、矩阵计算、最优化理论与方法等研究。

若 $S(t)$ 和 $n(t)$ 是均值为零、相互独立的复平稳随机过程, $n(t)$ 的协方差阵为 $\sigma^2 I$, 那么 P 次快拍所形成的数据矩阵为

$$X_p = A(\theta)S_M + N_p,$$

其中 X_p, N_p 为 $N \times P$ 阶矩阵, $X_p = [X(t_1), \dots, X(t_p)]$, $N_p = [n(t_1), \dots, n(t_p)]$; 而 $S_M = [s(t_1), \dots, s(t_p)]$ 为 $M \times P$ 阶矩阵.

多源定位问题是从采样数据矩阵 X_p 估计出信号来向 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$.

不难明白, 直接对数据矩阵 X_p 作 QR 分解是很难求出信号或噪声子空间的. 这是因为上三角阵 R 的对角元不具有元素从大到小排列的特点. 为此我们自然希望寻求一种校正的 QR 分解, 使上三角阵 R 的对角元具有按模由大到小排列的特点. 这一问题与数学上如何求矩阵的秩是等价的. Chan 提出的 RRQR 分解^[7]正具有这种特点. 因此这一工作为将广泛使用的 QR 分解方法应用于高分辨谱估计奠定了理论基础. 正是这样, S. Prasad 等^[8]将这一理论应用于多源定位问题中, 得如下算法.

RRQR 算法

对 $i = N, N-1, \dots, 1$, 执行如下(1)~(5)步骤:

- (1) X_{ii} 为 X_p 的 $i \times i$ 阶顺序主子阵;
- (2) 求 X_{ii} 的最小奇异值和左奇异向量 v , 这通常用逆幂法实现;
- (3) 求交换矩阵 \tilde{P} 使 $|(\tilde{P}^T v)_i| = \|v\|_\infty$;
- (4) 对 $X_{ii}\tilde{P}$ 作 QR 分解, $X_{ii}\tilde{P} = Q\tilde{R}_{ii}$;
- (5) 校正 R, Q, P 如下:

$$R \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{R}_{ii} & Q_i^H R_{i2} \\ O_{(N-i) \times i} & R_{22} \end{bmatrix},$$

$$Q \leftarrow Q \begin{bmatrix} Q_1 & O_{i \times (N-i)} \\ O_{(N-i) \times i} & I \end{bmatrix},$$

$$P \leftarrow P \begin{bmatrix} P & O_{i \times (N-i)} \\ O_{(N-i) \times i} & I \end{bmatrix}.$$

最后 X_p 通过 N 步校正, 可分解为

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix},$$

其中 R_{22} 的模最小, 同时 R 的对角元 r_{ii} 满足

$$|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \dots \geq |r_{MM}| > |r_{M+1M+1}| \geq \dots \geq |r_{NN}|.$$

因此类似于特征分解, 可通过 R 的对角元大小判定信号源数目. Q_1, Q_2 的列向量分别张成信号和噪声子空间. 由此, 类似于特征类方法, 构造谱函数

$$f(\theta, Q_2) = a^H(\theta) Q_2 Q_2^H a(\theta)$$

或

$$f(\theta, Q_1) = a^H(\theta) [I - Q_1 Q_1^H] a(\theta), \quad (1)$$

则有如下结论:

$$f^{(i)}(\theta, Q_2) = 0, \text{ 当 } \theta = \theta_i \text{ 时, } (i = 1, \dots, M).$$

据此可估计出信号来向.

3 RRQR 方法的性能分析

由上面结论知,对 P 次快拍形成的数据矩阵 X_p ,有正交交换矩阵 P ,使 $X_p P$ 的 QR 分解具有如下形式:

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix}.$$

若按(1)式形成谱函数估计信号来向,那么由噪声产生的估计误差如下定理所示.

定理 设 X_p 有如下分解:

$$X_p P = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ & R_{22} \end{bmatrix}$$

若记 θ_k 为精确信号来向, $\tilde{\theta}_k$ 为估计来向, $\Delta\theta_k = \theta_k - \tilde{\theta}_k$, 那么

$$\text{Var}(\Delta\theta_k) = \alpha_k^H \alpha_k \sigma^2 / (2\gamma_k). \quad (2)$$

这里 $\gamma_k = \alpha^{(w)}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$, $\alpha_k = P R_1^+ Q_1^H \alpha(\theta_k)$, σ^2 为噪声功率, $\alpha^{(w)}(\theta)$ 为 $\alpha(\theta)$ 关于 θ 的导数向量.

证明 设由 P 次快拍形成的数据矩阵为 $X_p = [x(t_1), \dots, x(t_p)]$. 无噪声时,由 RRQR 分解知,存在交换矩阵 P 使得

$$X_p P = QR = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1,$$

其中 $Q_1 \in C^{N \times M}$, $Q_2 \in C^{N \times (N-M)}$, $R_1 \in C^{M \times p}$, 且 $(X_p P)^H Q_2 = 0$.

因此谱函数构造如下: $f(\theta, Q_2) = \|Q_2^H \alpha(\theta)\|_2^2$, 此时

$$f(\theta_k, Q_2) = 0, (k = 1, \dots, M).$$

当有噪声存在时,数据阵具有如下形式: $\bar{X}_p = X_p + N$, 其中 N 为噪声矩阵, 其元素的实、虚部为相互独立的高斯随机变量, 均值为 0, 方差为 $\sigma^2/2$, 且元素间相互独立.

对 \bar{X}_p 使用 RRQR 分解得

$$\bar{X}_p P = \bar{Q} \bar{R} = [\bar{Q}_1, \bar{Q}_2] \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \end{bmatrix}.$$

由于噪声影响, 此时于 $\theta = \theta_k$ 处 $(\bar{X}_p P)^H \alpha(\theta) \neq 0$, 因此通常信号来向由下式估计:

$$\begin{cases} \min_{\theta} \|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2, \\ \bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I. \end{cases}$$

由于 \bar{P}, P 为正交矩阵, 具有二范数不变性, 故

$$\|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|\bar{X}_p^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|P^H \bar{X}_p^H \bar{Q}_2\|_2^2 = \|(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2\|_2^2.$$

若记 $\bar{Q}_2 = Q_2 + \Delta Q_2$, 并注意到 $\bar{X}_p = X_p + N$, 则

$$(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2 = (X_p P)^H Q_2 + (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2 + (NP)^H \Delta Q_2.$$

由于 $(X_p P)^H Q_2 = 0$, 如果忽略高阶误差项, 则有如下近似式:

$$(\bar{X}_p P)^H \bar{Q}_2 = (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2$$

由此问题可化为

$$\min_{\bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I} \| (X_p P)^H \Delta Q_2 + (NP)^H Q_2 \|_2^2.$$

其最小二乘解为

$$\Delta Q_2 = -[(X_p P)^H]^+ (NP)^H Q_2.$$

由于 $X_p P = Q_1 R_1$, 故 $[(X_p P)^H]^+ = Q_1 (R_1^+)^H$. 这里 $R_1^+ = R_1^H (R_1 R_1^H)^{-1}$ (由于一般情况下, $P > M$), $(R_1^+)^H = (R_1 R_1^H)^{-1} R_1$, 所以 $\Delta Q_2 = -Q_1 (R_1^+)^H (NP)^H Q_2$, 并且近似地成立 $\bar{Q}_2^H \bar{Q}_2 = I$.

由于噪声影响, 谱函数为

$$f(\bar{\theta}, \bar{Q}_2) = \|\bar{Q}_2^H \alpha(\bar{\theta})\|^2.$$

设所得 $\bar{\theta}_k$ 为 $\bar{\theta}_k = \theta_k + \Delta\theta_k, k = 1, 2, \dots, M$. 由于 $\bar{\theta}_k$ 满足 $\min_{\theta} f(\theta, \bar{Q}_2)$, 故 $f'_{\theta}(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2) = 0$.

考察 $f'_{\theta}(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2)$ 于 θ_k 处 Taylor 展开式:

$$0 = f'_{\theta}(\bar{\theta}_k, \bar{Q}_2) = f'_{\theta}(\theta_k, \bar{Q}_2) + \frac{\partial^2 f(\theta_k, \bar{Q}_2)}{\partial \theta^2} (\bar{\theta}_k - \theta_k) + R_n.$$

若定义

$$N(\theta, Q_2) = -\partial f(\theta, Q_2) / \partial \theta = -\alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta) - \alpha^H(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta),$$

$$D(\theta, Q_2) = \alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta) + 2\alpha^{(w)H}(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta) + \alpha^H(\theta) Q_2 Q_2^H \alpha(\theta),$$

则 $\Delta\theta_k = N(\theta_k, \bar{Q}_2) / D(\theta_k, \bar{Q}_2)$. 然而

$$N(\theta_k, \bar{Q}_2) = N(\theta_k, Q_2) + \Delta N = \Delta N, \quad D(\theta_k, \bar{Q}_2) = D(\theta_k, Q_2) + \Delta D,$$

其中 $D(\theta_k, Q_2) = 2\alpha^{(w)H}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$, 故 $\Delta\theta_k = \Delta N / (D + \Delta D) \approx \Delta N / D$. 将 $\bar{Q}_2 = Q_2 + \Delta Q_2$ 代入 $N(\theta_k, \bar{Q}_2)$, 经过一系列代数运算得

$$N(\theta_k, \bar{Q}_2) \approx -2\text{Re}[\alpha^H(\theta_k) \Delta Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)].$$

将 $\Delta Q_2 = -Q_1 (R_1^+)^H (NP)^H Q_2$ 代入上式, 取方差, 经过一系列化简得

$$\text{Var}(\Delta\theta_k) = \alpha_k^H \alpha_k \lambda^2 / (2\tau_k)$$

其中 $\alpha_k = PR_1^+ Q_1^H \alpha(\theta_k)$, $\tau_k = \alpha^{(w)H}(\theta_k) Q_2 Q_2^H \alpha^{(w)}(\theta_k)$, $R_1^+ = R_1^H (R_1 R_1^H)^{-1}$. 证毕

4 计算机模拟分析

为了验证上述结果的正确性, 我们做了如下模拟分析.

设一均匀直线阵由 $N = 10$ 个阵元组成, 空间有两个平面波信号分别沿 $\theta_1 = 10^\circ$,

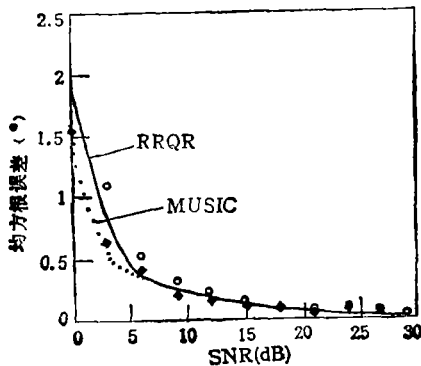


图1 估计均方根误差比较

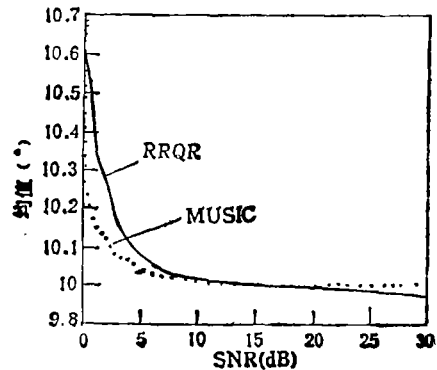


图2 估计均值比较

$\theta_2 = 20^\circ$ 被该阵列所接收。为便于编程, 快拍数取为 10, 信噪比定义为 $\text{SNR} = 10 \log(1/\sigma^2)$, 此处 σ^2 代表噪声功率。RRQR 方法的理论方差由前述定理(2)式给出, MUSIC 方法的方差分析基于文献[8]。两种方法于 $\theta = 10^\circ$ 时随信噪比的理论均方根误差如图 1 所示。(其中 \circ, \diamond 分别为两种方法的估计均方根误差。)由图可以看出, RRQR 方法估计方差比 MUSIC 方法的方差大, 而且模拟结果与理论结果十分一致, 由此证明了本文结果的正确性。图 2 为两种方法于 $\theta = 10^\circ$ 时的估计均值。

5 结束语

本文给出了 RRQR 方法估计源方位角误差的一种非渐近方差估计式。计算机模拟结果证明, 当信噪比较高时, 理论方差与模拟误差十分一致, 但当信噪比较低时, 两者偏差较大。因此低信噪比时如何较好地给出该方法方差分析有待进一步研究。

致谢 本文得到导师保铮教授的悉心指教, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, AP-34(3):276—280.
- [2] Kumaresan R, *et al.* IEEE Trans. on AES, 1983, AES-19(1):135—139.
- [3] Kaveh M, Barabell A. IEEE Trans. on ASSP, 1986, ASSP-34(2):331—341.
- [4] Roy R H, Kailath T. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(7):984—995.
- [5] Prasad S, Chandna B. IEEE Trans. on SP, 1991, SP-39(5):1224—1228.
- [6] 李有明, 保铮. 电子学报, 1994, 22(2): 47—52.
- [7] Chan T F. Linear Algebra Appl. 1987, 88/89(1):67—82
- [8] Li Fu, Vaccaro R J. IEEE Trans. on AES, 1990, AES-26(4):976—985.

PERFORMANCE ANALYSES OF A HIGH RESOLUTION METHOD BASED ON RRQR DECOMPOSITION

Li Youming

(Institute of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

Abstract A fast high resolution method based on rank-revealing QR decomposition is analysed, and an analytical expression of the variance of the direction of arrival estimation error is presented. Simulation results verify the analysis.

Key words Array signal processing, Direction finding, QR decomposition, Performance analysis