第 16 卷 第 3 期　　电子科学学刊　　Vol. 16, No. 3
1994 年 5 月　　JOURNAL OF ELECTRONICS　　May, 1994

回旋自谐振脉塞中束波互作用关系

张 世 昌
(中国科学院电子学研究所　北京　100080)

摘要　从状态方程出发，通过四度空间的 Maxwell 方程协变形式、电磁张量、能量-动量张量在电子注坐标上进行相对论变换，研究了回旋自谐振脉塞的互作用过程，导出了新的互作用状态方程. 理论上证明了 CARM 中工作在 TE_{mn} 模无纵向电场分量情况下电子注交换纵向能量的机制是存在的.

关键词　回旋自谐振脉塞，电磁张量，能量-动量张量，状态方程

1 引　言

回旋自谐振脉塞 (Cyclotron autoresonance maser, 以下简称 CARM) 是近年来发展起来的毫米波和亚毫米波、高功率、低磁场微波功率源. 它普遍使用了 TE 模如 H_{13}、H_{11}、H_{21}; H_{41} 等[1,2]. 利用右旋极化电磁波与绕 B 轴旋转前进的电子注互相作用，其谐振出现在

$$\omega = \omega_r = K_{/\!/} V_{/\!/} + \Omega/\gamma. \tag{1}$$

式中 $\Omega = eB/m$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/C^2}$ 为相对论因子，C 为电子回旋频率，$K_{/\!/}$ 为纵向波数，$V_{/\!/}$ 为电子注纵向速度，ω, ω_r 分别为高频频率和电子注多普勒回旋频率.

形成快波同步互作用. 饱和转换效率 η[3] 为

$$\eta = \frac{\Delta\gamma}{\gamma_o - 1}. \tag{2}$$

而

$$\Delta\gamma = \frac{\gamma\beta_{ph}\Delta\beta_{/\!/}}{1 - \beta_{ph}\beta_{/\!/}}. \tag{3}$$

可见效率 η 与 $\Delta\beta_{/\!/}(\beta_{/\!/} = V_{/\!/}/C)$ 成正比. 这说明 CARM 的电子与波的换能主要取决于电子注的纵向速度 $V_{/\!/}$. 不同于回旋脉塞 (如 Gyrotron) 类的快波器件，这类器件的饱和转换效率[4]是

$$\eta = \frac{\Delta\gamma_\perp}{\gamma_{o\perp} - 1}, \tag{4}$$

式中

$$\Delta\gamma_\perp = (\gamma_{o\perp} - \gamma_{\perp.\mathrm{crit}}),$$
$$\gamma_{\perp.\mathrm{crit}} = (1 - \beta^2_{\perp.\mathrm{crit}})^{-\frac{1}{2}},$$
$$\beta_\perp = V_\perp/C.$$

1992-10-09 收到，1992-12-18 定稿
张世昌　男，1939 年生，副研究员，现从事高功率微波源的研制工作.

它的效率比例于电子注的横向速度，说明 CARM 与 Gyrotron 虽同属自由电子脉塞但两者互作用机制有很大差别.

人们在普遍接受这个认识以后，仍不免提出理论上存在的问题：即 CRAM 的工作模式多数选用 TE_{mn} 波，其纵向高频电场分量 E_z 为零，这样就否定了与纵向运动的电子进行能量交换的可能性与(2)、(3)式电子以纵向速度换能给高频场产生矛盾. 如何介决这个矛盾？本文针对这个问题，做了理论分析.

2 CARM 的工作特性

众所周知，Gyrotron 最大效率工作点是在

$$\gamma \approx 1.$$

工作在迴旋模，互作用是电子与横向电场作用，相对论因子 γ 较低，而且速度主要是在垂直于纵向的方向上，(当 $\alpha = V_\perp/V_\parallel = 2, V_\parallel$ 仅为 $V_\perp$ 的 1/2)，故作相对论变换意义不大.

CARM 的最大转换效率工作点在

$$\beta_{ph} > 1,$$

式中 $\beta_{ph} = V_p/C$，V_p为电磁波相速度.

表明电磁波相速度靠近光速度，并略大于光速这样电子注纵向速度的选择为避免回旋模绝对不稳定性工作点和返波振荡工作点，电子纵向速度选择很高，例如在 600 kV，$\gamma = 2.17$，横向速度 $V_\perp$ 与纵向速度 $V_\parallel$ 之比 $\alpha = 0.6$，$V_\parallel$ 是 $V_\perp$ 的 1.7 倍[2]. 因此电磁规律、互作用必须用相对论规律来对待，它的时空与电磁场物质性紧密连系，才能得到反映. 针对实验室坐标系（固定坐标）电子与波互作用状态方程作洛伦兹变换，给出 CARM 的电磁场量、能量方程有新的形态，才能反映纵向换能关系.

3 四度空间电磁方程

定义 x, y, z, t 为固定坐标系；x', y', z', t' 为运动坐标系.

为分析便利，场采用笛卡尔坐标. 根据前节分析变换在纵向进行，运动坐标速度 $V_z = V_\parallel$.

CARM 中互作用状态方程为(固定坐标系)[5]

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -eV_\perp \cdot E_t, \tag{5}$$

写成分量形式：

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -e(V_x E_x + V_y E_y),$$

此式反映不出 CARM 的纵向换能关系.

对(5)式作相对论变换，要保持方程的相对论不变性，首先就要把(5)式变成四度空间力的形式：

$$m\frac{dU_i}{d\tau} = f_i = F_{ik} S_k. \tag{6}$$

式中 S_k 是电流密度，U_i 是四度速度，τ 是自有时间。此式采用 Einstein 惯例对K的求和符号略去，后面公式凡是有下标量两两相同的一律是求和关系。f_i 是四度空间力，为一个矢量：

$$(f_i)=\left[\frac{F}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{i(F\cdot V)/C}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]. \tag{7}$$

式中 $\beta=V_{/\!/}/C$，$\bar{F}$ 是洛伦兹力。(5)式就是(6)式当 $i=4$ 的分量形式。在(6)式中 F_{ik} 是电磁张量：

$$F_{ik}=-(F_{ki}),$$

是一个反对称矩阵

$$(F_{ik})=\begin{bmatrix}0 & B_z & -B_y & -iE_x\\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y\\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z\\ iE_x & iE_y & iE_z & 0\end{bmatrix}. \tag{8}$$

(6)式表明电磁场不再是个矢量，而共同构成一个统一的张量。推导(6)式的协变形式(过程略)得四度洛伦兹力最终协变形式为

$$f_i=-\frac{\partial S_{im}}{\partial X_m}. \tag{9}$$

在(9)式中，当 $i=4$ 时，f_4 为互作用的状态方程。

式中
$$S_{im}=\frac{1}{4\pi}\left[F_{ik}F_{mk}-\frac{1}{4}\delta_{im}(F_{kl}F_{kl})\right] \tag{10}$$

S_{im} 是能量-动量张量为一个对称矩阵

$$S_{im}=S_{mi}.$$

又因为对角线上四个分量 $S_{11}S_{22}S_{33}S_{44}$ 在能量密度上是总量和 X, Y, Z 三个方向的分量关系，故仅有三独立量，这样整个 S 矩阵共有 9 个独立变量，它的形式为：

$$(S_{im})=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34}\\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$S_{44}-S_{11}+S_{22}+S_{33}=\frac{1}{\pi}\ (\varepsilon_0E^2+\mu_0H^2).$$

借助(10)式，推导出能量-动量张量 S_{im} 的电磁张量 F_{ik} 的表达式为

$$(S_{im})=\left[\begin{matrix}\frac{1}{4\pi}\left[F_{1k}F_{1k}-\frac{1}{4}\delta_{11}(F_{kl}F_{kl})\right] & \frac{1}{4\pi}[F_{1k}F_{2k}]\\ \frac{1}{4\pi}[F_{2k}F_{1k}] & \frac{1}{4\pi}\left[F_{2k}F_{2k}-\frac{1}{4}(F_{kl}F_{kl})\right]\\ \frac{1}{4\pi}[F_{3k}F_{1k}] & \frac{1}{4\pi}[F_{3k}F_{2k}]\\ \frac{1}{4\pi}[F_{4k}F_{1k}] & \frac{1}{4\pi}[F_{4k}F_{2k}]\end{matrix}\right.$$

$$
\left.\begin{array}{cc}
\frac{1}{4\pi}[F_{1k}F_{3k}] & \frac{1}{4\pi}[F_{1k}F_{4k}] \\[2ex]
\frac{1}{4\pi}[F_{2k}F_{3k}] & \frac{1}{4\pi}[F_{2k}F_{4k}] \\[2ex]
\frac{1}{4\pi}\left[F_{3k}F_{3k}-\frac{1}{4}(F_{kl}F_{kl})\right] & \frac{1}{4\pi}[F_{3k}F_{4k}] \\[2ex]
\frac{1}{4\pi}[F_{4k}F_{3k}] & \frac{1}{4\pi}\left[F_{4k}F_{4k}-\frac{1}{4}(F_{kl}F_{kl})\right]
\end{array}\right]. \tag{12}
$$

在 CARM 中能量-动量张量 S_{im} 的具体形式如下：CARM 中 TE_{mn} 场表达式为

$$
\begin{aligned}
E_{mn} &= \sum_{p=1,2} E^p_{Tmn}(Z,t)(\hat{Z}\times\nabla_\perp C^p_{mn}),\\
B_{mn} &= -\sum_{p=1,2} B^p_{Tmn}(Z,t)\nabla_\perp C^p_{mn} + \hat{Z}B^p_{mn}K_{mn}C^p_{mn}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&P=1,\quad C^1_{mn}=\frac{2r_w}{K_{mn}}J_m(K_{mn}\gamma/r_w)\cos(m\theta);\\
&P=2,\quad C^2_{mn}=-\frac{2r_w}{K_{mn}}J_m(K_{mn}\gamma/r_w)\sin(m\theta).
\end{aligned} \tag{14}
$$

将(13)式写成笛卡尔坐标的分量形式：

$$
\left.\begin{aligned}
E_x &= \sum_{p=1,2} E^p_{Tmn}(Z,t)\frac{\partial}{\partial Y}C^p_{mn}\\
E_y &= \sum_{p=1,2} E^p_{Tmn}(Z,t)\frac{\partial}{\partial X}C^p_{mn}\\
B_x &= -\sum_{p=1,2} B^p_{Tmn}(Z,t)\frac{\partial}{\partial X}C^p_{mn}\\
B_y &= -\sum_{p=1,2} B^p_{Tmn}(Z,t)\frac{\partial}{\partial Y}C^p_{mn}\\
B_z &= -\sum_{p=1,2} B^p_{Lmn}K_{mn}C^p_{mn}
\end{aligned}\right] \tag{15}
$$

把(8)、(14)和(15)式结合起来就得 CARM 的 S 张量具体表达式。再通过(9)式就得到实验室坐标系的电磁场力方程和状态方程。

4　CARM 状态方程相对论变换

把状态方程(9)式作相对论变换。在 Z 方向相对速度 V 的变换矩阵 a_{ij} 是

$$
(a_{ij})=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & \frac{i\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\\
0 & 0 & \frac{i\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}
\end{bmatrix}, \tag{16}
$$

式中 V—运动坐标速度，$\beta_1 = V/C$，$\gamma_1 = 1/\sqrt{1-\beta_1^2}$。

因为(9)式中 $\frac{\partial}{\partial X_n}$ 是矢量，S_{mn} 是张量，两者内乘仍为一矢量，故(9)式作矢量变换为

$$f'_i = \alpha_{im} f_m = -\alpha_{im}\frac{\partial S_{mn}}{\partial X_n}. \tag{17}$$

当 $i=4$ 时，则

$$\begin{aligned} f'_4 &= -\alpha_{4m}\frac{\partial S_{mn}}{\partial X_n} \\ &= -\alpha_{43}\left[\frac{\partial S_{31}}{\partial X_1}+\frac{\partial S_{32}}{\partial X_2}+\frac{\partial S_{33}}{\partial X_3}+\frac{\partial S_{34}}{\partial X_4}\right] \\ &\quad -\alpha_{44}\left[\frac{\partial S_{41}}{\partial X_1}+\frac{\partial S_{42}}{\partial X_2}+\frac{\partial S_{43}}{\partial X_3}+\frac{\partial S_{44}}{\partial X_4}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

由(12)式和(8)式得到

$$S_{31} = -\frac{1}{4\pi}[B_xB_z + E_zE_x],\quad S_{41} = -\frac{i}{4\pi}[-E_yB_z + E_zB_y],$$

$$S_{32} = -\frac{1}{4\pi}[B_yB_z + E_zE_y],\quad S_{42} = -\frac{i}{4\pi}[E_xB_z - E_zB_x],$$

$$S_{33} = -\frac{1}{4\pi}[B_z^2 + E_z^2 - W],\quad S_{43} = -\frac{i}{4\pi}[-B_yE_x + B_xE_y],$$

$$S_{34} = -\frac{i}{4\pi}[-B_yE_x + B_xE_y],\quad S_{44} = -\frac{i}{4\pi}\frac{1}{2}(B^2+E^2) = -\frac{1}{4\pi}W.$$

TE 模 $E_z = 0$，S 张量变成

$$\begin{aligned} &S_{31} = -\frac{1}{4\pi}[B_xB_z], && S_{41} = -\frac{i}{4\pi}[-B_yB_z], \\ &S_{32} = -\frac{1}{4\pi}[B_yB_z], && S_{42} = -\frac{i}{4\pi}[E_xB_z], \\ &S_{33} = -\frac{1}{4\pi}[B_y^2 + B_z^2 - W], && S_{43} = -\frac{i}{4\pi}[-B_yE_x + B_xE_y], \\ &S_{34} = -\frac{i}{4\pi}[-B_yE_x + B_xE_y], && S_{44} = -\frac{1}{4\pi}W. \end{aligned} \tag{19}$$

把(19)式代入(18)式得到运动坐标系的状态方程：

$$\begin{aligned} f'_4 = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}&\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(-\frac{1}{4\pi}(B_x\times B_z)\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(-\frac{1}{4\pi}(B_yB_z)\right)\right. \\ &\left.+\frac{\partial}{\partial Z}\left(-\frac{1}{4\pi}(B_y^2+B_z^2-W)\right)+\frac{\partial}{\partial(ict)}\left(-\frac{i}{4\pi}(-B_yE_x+B_xE_y)\right)\right] \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}&\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(-\frac{i}{4\pi}(-E_yB_z)\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(-\frac{i}{4\pi}(E_xB_z)\right)\right. \\ &\left.+\frac{\partial}{\partial Z}\left(-\frac{i}{4\pi}(-B_yE_x+B_xE_y)\right)+\frac{\partial}{\partial(ict)}\left(-\frac{1}{4\pi}W\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

下面对(20)式作分析讨论．(20)式的概括形式为

$$f'_4 = P' + P^{*\prime} = \gamma[(P + P^*) - (f_z + f_z^*) \cdot V_{/\!/}] \tag{21}$$

式中 P, P^* 分别为电功率、磁功率，f, f^* 分别为电力、磁力密度．

(20)式右边第一方括号对应(21)式的方括号中第二项（不乘 $V_{/\!/}$）是电磁场力，第二方括号对应(21)式的功率．

根据磁场量、电荷、磁荷、电流、磁流、电功率磁功率之间的联系，有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div} B = \rho^*, && \mathrm{div} E = \rho;\\
&\mathrm{Curl} E + \frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = J^*, && \mathrm{Curl} B - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = J;\\
&\mathrm{div} J^* = -\frac{\partial \rho^*}{\partial t}, && \mathrm{div} J = \frac{-\partial \rho}{\partial t};\\
&P^* = B \cdot J^*, && P = E \cdot J\\
&f^* = \rho^* B, && f = \rho E.
\end{aligned} \tag{22}$$

用以上这些公式可以分解(20)式．可见经在 Z 方向相对论变换后，在 Z 向的电磁场力中，电场力 f_z 仍为零，而磁场力 f_z^* 仍继续存在，它的磁功率密度 P^* 与纵向速度 $V_{/\!/}$ 有直接的关系，为 $P^* = \gamma V_{/\!/} \cdot f^*$．第二个方括号乘以 γ 因子，表征经相对论变换后，能流的空间变化和能量密度的时间变化量．所以，可以说电子与波相互作用的换能机制，用相对论变换的状态方程(20)式就能反映电子经纵向速度 $V_{/\!/}$ 在 CARM 的能量变换所起的重要作用．

纵向能量交换作用虽然在状态方程(20)式中体现了纵向速度 $V_{/\!/}$ 的影响，但并没有给出在 CARM 中作旋转前进的运动电子所看到的高频电场 E'_z 分量．仅作 Z 方向相对论变换是不够的．必须结合电子横向的运动特性，对电磁张量 F_{im} 作三维变换，考虑到前面分析已选择了笛卡尔坐标，下面的 E'_z 的推导就对电磁张量 F_{im} 作 Z，X，Y 三重相对论张量变换．过程很冗长故略去，其结果如下：

对 Z 向变换速度为 $v, \beta = v/C$，

$$F'_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma\\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma\\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}.$$

对 X 方向变换速度为 $W, \beta = W/C$，

$$F'_W = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\gamma\beta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\gamma\beta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ i\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

对 Y 方向变换速度为 $\mu, \beta = \mu/C$，

$$F'_{\mu}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&r&0&ir\beta\\0&0&1&0\\0&-ir\beta&0&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F'_W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\gamma&0&-i\gamma\beta\\0&0&1&0\\0&i\gamma\beta&0&\gamma\end{bmatrix}.$$

当 $i=4, m=3$ 时,有

$$\begin{aligned}E'_z=F'_{z43}&=\frac{-\mu/C}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}\times\left(\frac{B_x}{\sqrt{1-V^2/C^2}}+\frac{E_yV/C}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\right)\\&+\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}\ \frac{W/C}{\sqrt{1-W^2/C^2}}\times\left(\frac{B_y}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}-\frac{E_xV/C}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\right)\\&-\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}\ \frac{1}{\sqrt{1-W^2/C^2}}\left(\frac{E_z}{1-V^2/C^2}-\frac{E_zV^2/C^2}{1-V^2/C^2}\right).\end{aligned}\tag{23}$$

当 CARM 中是 TE_{mn} 模, $E_z=0$ 时,则(23)式有

$$\begin{aligned}E'_z=&-\frac{\mu/C}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}\times\left(\frac{B_x}{\sqrt{1-V^2/C^2}}+\frac{E_yV/C}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\right)\\&+\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}\ \frac{W/C}{\sqrt{1-W^2/C^2}}\\&\times\left(\frac{B_y}{\sqrt{1-\mu^2/C^2}}-\frac{E_xV/C}{\sqrt{1-V^2/C^2}}\right).\end{aligned}\tag{24}$$

(公式(23)和(24)式是对惯性系全方位的相对论变换所得到的互作用公式,物理意义上能够说明纵向互作用的存在. 但是若从电子引导中心观察相对静止的电子运动形态,就要在电磁方程的协变形式中考虑虚拟的惯性力,再张量运算,进行广义相对论变换.)

可见 $E'_z\neq 0$. 式中$(E_yV/C)/\sqrt{1-V^2/C^2}$ 和 $(E_xV/C)/\sqrt{1-V^2/C^2}$ 项在CARM器件中是不可忽略的,由于纵向速度很大,这两项反映了运动电子所看到的空间电场的变化很大,根据 Maxwell 旋度方程,它感应出 B'_y 和 B'_x 叠加在 B_y 和 B_x 上,与相对应速度W和μ产生了Z方向作用力,这就进一步论证了在 CARM 中纵向能量交换的存在.

参考文献

[1] Bratman V L. IEEE Trans. on PS, 1987, PS-15(1):1—13.
[2] McCowan R B. IEEE Trans. on ED, 1989, ED-31(9):1968—1973.
[3] Wang Q S. International Journal of Infrared Millimeter Waves, 1991, 12(4):298—299.
[4] Sprangle P, Drobot A T. IEEE Trans. on MTT, 1977, MTT—25(6):236—238.
[5] Kho T H, *et al*. Phys. Rev., 1989, 40(5): 2486—2488.

INTERACTION RELATION BETWEEN ELECTRON BEAM AND WAVES IN A CARM

Zhang Shichang

(Institute of Electronics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract　From phase equation in an electron cyclotron autoresonance maser (CA-RM) amplifier the interaction between beam and electromagnetic waves is investigated with help of four-dimesional Maxwell equations, electromangetic-field tensor, energy-momentum tensor. The new phase equation is transformed by Lorentz transformation. Being non-longitudinal electro-field component, presence of longitudinal energy change between longitudinal moving beam and TE(H_{mn}) mode is jutified in theory.

Key words　Cyclotron autoresonance maser, Electromagnetic-field tensor, Energy-momentum tensor, Phase equation