二元二值周期自相关序列偶的应用研究

刘 凯　　许成谦　　李 刚
(燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文提出了正交矩阵偶的概念，它是正交矩阵的一种扩展，尤其二元正交矩阵偶不受阶数应为 2 的幂次的限制。应用二元二值周期自相关序列偶，提出了一种构造二元正交矩阵偶的方法和一种构造正交序列偶集的方法，还提出了一种利用正交矩阵偶或正交矩阵结合正交序列偶集交织构造适于准同步码分多址通信系统应用的二元零相关区序列偶集的新方法，通过对二元二值周期自相关序列偶的选择可使构造的零相关区序列偶集获得高的能量效率，并可使集合的序列偶数量，零相关区长度及序列偶长度参数接近最大理论限。

关键词：二元二值周期自相关序列偶；差集偶；正交矩阵偶；正交序列偶集；零相关区序列偶

中图分类号：TN911.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2009)07-1536-06

Research on Application of Binary Sequence Pair with Two-Level Periodic Autocorrelation

Liu Kai　　Xu Cheng-qian　　Li Gang
(*College of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: A new concept of orthogonal matrix pair is presented, which is the extension of orthogonal matrix, and especially the binary orthogonal matrix pair is not restricted by the fact that the order of matrix should be the power of 2. Based on the binary sequence pair with two-level periodic autocorrelation, the binary orthogonal matrix pair and orthogonal sequence pair set are constructed. By interleaved technology, a new class of binary Zero Correlation Zone (ZCZ) sequence pair sets applied to Quasi-Synchronous Code Division Multiple Access (QS-CDMA) is constructed from the binary orthogonal matrix pair or orthogonal matrix and orthogonal sequence pair set. In order to achieve greater energy efficiency and upper theory bound of binary ZCZ sequence pair sets, it is necessary to select appropriate binary sequence pairs with two-level periodic autocorrelation.

Key words: Binary sequence pair with two-level periodic autocorrelation; Difference set pair; Orthogonal matrix pair; Orthogonal sequence pair set; Sequence pair with zero correlation zone

1　引言

二元二值周期自相关序列偶是近年来提出的一类失配序列设计，可应用于雷达、声纳及码分多址通信系统中，并已在定义、性能及构造等方面获得了初步的研究进展[1]。一个二元二值周期自相关序列偶由两个不同的二元(+1,−1)序列组成，分别用于通信系统中收发方的地址码，两序列的互相关函数看作为序列偶的自相关函数，其二值性表现为序列偶的所有异相周期自相关值都相同且区别于其同相周期自相关值，其二元性更便于工程中的硬件实现。文献[1]中给出了二元二值周期自相关序列偶的一些构造结果。

本文提出了正交矩阵偶的概念，它是正交矩阵的一种扩展，尤其二元正交矩阵偶弥补了二元正交矩阵的阶数须为 2 的幂次的限制，方便了工程应用。本文基于二元二值序列偶，提出了一种构造二元正交矩阵偶的方法，还提出了一种构造正交序列偶集的方法。另外，零相关区(Zero Correlation Zone，简称 ZCZ)序列偶用于准同步码分多址(QS-CDMA)通信系统中可以消除联合信道干扰和多址及多径干扰，提高通信传输质量。近来对二元 ZCZ 序列偶集的研究已有了很大进展，例如 Krengel，Trinh 和 Fan 等人利用几乎最佳二元序列和几乎最佳三元序列以及失配序列构造了二元 ZCZ 序列偶集，但二元序列中含少数零元素[2,3]，Matsufuji 利用正交对和正交码构造了不完全二元 ZCZ 序列偶集，即序列偶中两序列分别为二元序列和多元序列[4]。本文提出了一种利用二元正交矩阵偶或正交矩阵联合二元正交序列偶

2008-11-07 收到，2009-04-20 改回
国家自然科学基金(60872061)，河北省自然科学基金(F2008000855)，教育部留学回国人员科研启动基金和教育部高等学校博士学科点专项基金资助课题

集构造二元 ZCZ 序列偶集的新方法，比较现有的二元 ZCZ 序列偶，本文构造的序列偶完全由二元序列构成，参数组成灵活多样。通过选择适当的二元二值周期自相关序列偶可使构造的零相关区序列偶集获得高的能量效率，能使集合的序列偶数量，零相关区长度及序列偶长度参数接近理论上限。

2　二元二值序列偶与差集偶

差集偶是近年来提出的一类新的组合数学概念，它是构造二元二值周期自相关序列偶的一种重要手段。下面给出二元二值序列偶和差集偶的相关定义及重要引理。

定义 1　长度为 N 的二元序列 $a=(a_0,\cdots,a_{N-1})$ 和 $b=(b_0,\cdots,b_{N-1})$，其中 $a_i,b_i=\pm 1$，$0\le i\le N-1$。如果 a 和 b 的周期互相关函数满足

$$P_{(a,b)}(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i b_{(i+\tau)\bmod N}=\begin{cases}E, & \tau=0\\ F, & \tau\ne 0\end{cases}\qquad(1)$$

其中 E 和 F 为常数，那么称为二元二值周期自相关序列偶，简称二元二值序列偶。序列 a 与 b 的周期互相关函数 $P_{(a,b)}=(\tau)$ 称为序列偶 (a,b) 的周期自相关函数。

定义 2[5]　任意两个 N 长序列偶 (a,b) 与 (c,d) 的周期互相关函数定义为

$$P_{(a,b)(c,d)}(\tau)=P_{(a,d)}(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i d_{(i+\tau)\bmod N}\qquad(2)$$

定义 3[6]　G_N 为一个含有 N 个元素的加群，集合 $D=\{d_0,d_1,\cdots,d_{p-1}\}$ 和 $D'=\{d'_0,d'_1,\cdots,d'_{q-1}\}$ 是 G_N 上的两个子集，分别含有 p 和 q 个元素，$e=|D\cap D'|$。对于任意 $\alpha\ne 0\bmod N$，如果等式 $d_i-d'_j\equiv\alpha\bmod N$，有 λ 个解 (d'_i,d'_j)，其中 $d_i\in D$，$d'_j\in D'$，那么称 (D,D') 为 (N,p,q,e,λ) 差集偶。

定义 4　对应上述差集偶 (D,D')，N 长二元序列 $a=(a_0,\cdots,a_{N-1})$ 和 $b=(b_0,\cdots,b_{N-1})$，$a_i,b_i=\pm 1$，$0\le i\le N-1$，如果满足 $a_i=\begin{cases}-1, & i\in D\\ 1, & i\notin D\end{cases}$，$b_i=\begin{cases}-1, & i\in D'\\ 1, & i\notin D'\end{cases}$，$i=0,1,\cdots,N-1$，那么称序列 a 和 b 分别为集合 D 和 D' 的特征序列，二元序列偶 (a,b) 称为差集偶 (D,D') 的二元特征序列偶。

如果 $D=D'$，那么差集偶 (D,D') 退化为普通差集，相应的特征序列偶 (a,b) 中 $a=b$，即序列偶退化为对应于差集 D 的特征序列，故而可将差集偶看作是差集概念的推广，而序列偶同样可以看作是序列的推广。

引理 1[6]　(N,p,q,e,λ) 差集偶 (D,D') 的特征序列偶 (a,b) 的周期自相关函数满足

$$P_{(a,b)}(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}a_i b_{(i+\tau)\bmod N}=\begin{cases}E, & \tau=0\\ F, & \tau\ne 0\end{cases}\qquad(3)$$

其中 $E=N-2(p+q)+4e$，$F=N-2(p+q)+4\lambda$。

由引理 1 和定义 1 可知差集偶 (D,D') 的特征序列偶 (a,b) 的周期自相关函数具有二值特性，因此引理 1 为二元二值序列偶的构造提供了充分条件，即构造二元二值序列偶可通过差集偶构造的数学方法来间接获得。

定理 1　由引理 1 获得的 N 长二元二值序列偶，其同相和异相自相关函数分别为 E 和 F，那么有

(1) $N+|F|=2m$；(2) $E-F=4n$；其中 m 和 n 为正整数。

证明　由引理 1 有 $|F|\equiv|N-2(p+q)+4\lambda|=\begin{cases}0\bmod 2, & N\equiv 0\bmod 2\\ 1\bmod 2, & N\equiv 1\bmod 2\end{cases}$，$E-F=[N-2(p+q)+4e]-[N-2(p+q)+4\lambda]=4(e-\lambda)$，因此 $N+|F|\equiv 0\bmod 2$；$E-F\equiv 0\bmod 4$。　证毕

3　二元正交矩阵偶

定义 5　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为两个 $N\times L$ 阶矩阵，若满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=c\cdot\boldsymbol{I}_N$，其中 c 为常数，$\boldsymbol{I}_N$ 为 N 阶单位方阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转置，则称 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为正交矩阵偶。若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 内元素为 1 和−1，那么 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 称为二元正交矩阵偶。

例如，$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
-&-&+&-&+&-&+&-&-&+&+&+&+&-\\
-&+&-&+&-&+&-&-&+&+&+&+&-&-\\
+&-&+&-&+&-&-&+&+&+&+&-&-&-\\
-&+&-&+&-&-&+&+&+&+&-&-&+&-\\
+&-&+&-&-&+&+&+&+&-&-&+&-&-\\
-&+&-&-&+&+&+&+&-&-&+&-&+&-\\
+&-&-&+&+&+&+&-&-&+&-&+&-&-\\
-&-&+&+&+&+&-&-&+&-&+&-&+&-\\
-&+&+&+&+&-&-&+&-&+&-&+&-&-\\
+&+&+&+&-&-&+&-&+&-&+&-&-&-\\
+&+&+&-&-&+&-&+&-&+&-&-&+&-\\
+&+&-&-&+&-&+&-&+&-&-&+&+&-\\
+&-&-&+&-&+&-&+&-&-&+&+&+&-
\end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}
- & - & + & - & - & - & + & - & - & + & + & + & + & - \\
- & + & - & - & - & + & - & - & + & + & + & + & - & - \\
+ & - & - & - & + & - & - & + & + & + & + & - & - & - \\
- & - & - & + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - \\
- & - & + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - & - \\
- & + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - & - & - \\
+ & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - & - & - & - \\
- & - & + & + & + & + & - & - & + & - & - & - & + & - \\
- & + & + & + & + & - & - & + & - & - & - & + & - & - \\
+ & + & + & + & - & - & + & - & - & - & + & - & - & - \\
+ & + & + & - & - & + & - & - & - & + & - & - & + & - \\
+ & + & - & - & + & - & - & - & + & - & - & + & + & - \\
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & - & + & + & + & -
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}
12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12
\end{pmatrix}=12\boldsymbol{I}_{13}
$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 13×14 阶矩阵，“+”和“-”分别代表 1 和-1，那么 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为一个 13×14 阶二元正交矩阵偶。

当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=c\boldsymbol{I}_N$，则 $\boldsymbol{A}$ 满足正交矩阵定义，那么正交矩阵偶退化为正交矩阵，因此正交矩阵偶是正交矩阵的一种扩展。工程上应用较多的二元正交矩阵如 Hadamard 矩阵，Walsh 矩阵等受到阶数的限制，要求阶数为 2 的幂次，因此其应用范围受限。正交矩阵偶阶数选择较之正交矩阵更广泛，它的引入可弥补阶数不存在的正交矩阵的情况。本节将利用二元二值序列偶构造一类二元正交矩阵偶 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，使其满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=4n\boldsymbol{I}_{N_1}$，$\boldsymbol{I}_{N_1}$ 为 N_1 阶单位矩阵，N_1 为正整数。

定理 2 二元序列偶 (a,b) 是 $(N_1,p_1,q_1,e_1,\lambda_1)$ 差集偶的特征序列偶，$a=(a_0,\cdots,a_{N-1})$ 和 $b=(b_0,\cdots,b_{N-1})$，序列偶 (a,b) 的周期自相关函数具有二值特性，即同相自相关函数为 E_1，异相自相关函数为 F_1。$A_{r,k}$ 和 $B_{s,k}$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的项，其中 $0\le r,s<N_1$，$0\le k<N_1+|F_1|$，对于 $0\le i<N_1$，$N_1\le j<N_1+|F_1|$，

当 $F_1>0$ 时，

$$
\begin{cases}A_{r,i}=a_{(r+i)\bmod N_1}\\ A_{r,j}=-1\end{cases},\quad \begin{cases}B_{s,i}=b_{(s+i)\bmod N_1}\\ B_{s,j}=1\end{cases} \tag{4}
$$

当 $F_1<0$ 时，

$$
\begin{cases}A_{r,i}=a_{(r+i)\bmod N_1}\\ A_{r,j}=-1\end{cases},\quad \begin{cases}B_{s,i}=b_{(s+i)\bmod N_1}\\ B_{s,j}=-1\end{cases} \tag{5}
$$

那么 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为二元正交矩阵偶，满足 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=4n\boldsymbol{I}_{N_1}$。

证明 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的任意行向量 $\boldsymbol{A}_r$ 与 $\boldsymbol{B}_s$ 的周期相关函数为

$$
\begin{aligned}
P_{(\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{B}_s)}(0)&=\boldsymbol{A}_r\cdot\boldsymbol{B}_s^{\mathrm{T}}=\sum_{k=0}^{N_1+|F_1|-1}A_{r,k}B_{s,k}\\
&=\sum_{i=0}^{N_1-1}a_{(r+i)\bmod N_1}b_{(s+i)\bmod N_1}\\
&\quad+\sum_{j=N_1}^{N_1+|F_1|-1}A_{r,j}B_{s,j}=P_{(a,b)}(s-r)-F_1\\
&=\begin{cases}E_1-F_1, & r=s\\ 0, & r\ne s\end{cases}
\end{aligned} \tag{6}
$$

再由定理 1 的(2)有 $P_{(\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{B}_s)}(0)==\begin{cases}4n, & r=s\\ 0, & r\ne s\end{cases}$，其中 n 为大于零的整数，因此向量 $\boldsymbol{A}_r$ 与 $\boldsymbol{B}_s$ 相互正交，那么有 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=4n\boldsymbol{I}_{N_1}$，$\boldsymbol{I}_{N_1}$ 为 N_1 阶单位方阵。 证毕

在二元正交矩阵偶 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 皆为 $N_1\times(N_1+|F_1|)$ 阶矩阵，若 $F_1=0$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 N_1 阶方阵。对于 $E_1=N_1$，$F_1=0$ 的二元二值序列即最佳序列目前发现只存在 $(1\ 1\ 1-1)$，所以应用的意义并不大，而对于最佳序列偶的数量已证明存在很多，且其序列偶长度为 $4n$，n 为正整数。下面给出由二元二值序列偶构造二元正交矩阵偶的例子。

例 1 (D,D') 为(5,2,3,2,1)差集偶，$D=\{0,1\}$，$D'=\{0,1,3\}$，集合 D 的特征序列 $a=(-1-1\ 1\ 1\ 1)$，集合 D' 的特性序列 $b=(-1-1\ 1-1\ \ 1)$，那么差集偶 (D,D') 的特征序列偶 (a,b) 的周期自相关函数为 $P_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}(\tau)=(3-1-1-1-1)$，即 $E_1=3$，$F_1=-1$。分别由序列 a 和 b 构造出 5×6 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{I}_5$，故 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为 5×6 阶二元正交矩阵偶。

4 正交序列偶集的构造

(D,D') 是 $(N_2,p_2,q_2,e_2,\lambda_2)$ 差集偶，$D=\{d_0,d_1,\cdots,d_{p_2-1}\}$，$D'=\{d_0',d_1',\cdots,d_{q_2-1}'\}$，$(D,D')$ 的特征序列偶为 (w,t)，其同相及异相周期自相关函数分别为

常数 E_2 和 F_2。利用二元序列偶 (w,t) 可构造出一类正交序列偶集合 $\{(f_r,g_r)\}_{r=0}^{\max\{p_2,q_2\}-1}$，集合内序列偶数量为 $\max\{p_2,q_2\}$，序列偶长为 $N_2+|F_2|$。

首先我们取集合 $\underline{D}=\begin{cases}D, & p_2\ge q_2\\ D', & p_2<q_2\end{cases}$，旨在获得最大数量的正交序列偶。利用集合 $\underline{D}$ 给出下标向量 $\boldsymbol{l}=(l_r)$，其中 l_r 由集合 $\underline{D}$ 内元素从大到小排列组成，例如若 $p_2\ge q_2$，那么 $\boldsymbol{l}=(l_r)=(d_{p_2-1},d_{p_2-2},\cdots,d_0)$，也就是说向量 $\boldsymbol{l}$ 中的元素总是比其左临的元素小。特别地，当正交序列偶集与正交矩阵偶结合应用时，由于二元矩阵偶的列数为偶数，那么如果 $\max\{p_2,q_2\}$ 为奇数时，则可以除去该集合中最小的元素再进行向量组合，以保证向量内的元素个数为偶数，例如若 $p_2\ge q_2$，且 p_2 为奇数，那么 $\boldsymbol{l}=(d_{p_2-1},d_{p_2-2},\cdots,d_1)$，即向量 $\boldsymbol{l}$ 中含有 (p_2-1) 个偶数元素。

根据向量坐标 $\boldsymbol{l}$ 可知，若 $0\le r,s<\max\{p_2,q_2\}$，$r>s$，则 $l_r<l_s$，那么对于 $0\le j<N_2+|F_2|$，当 $F_2\ge 0$ 时，

$$\left.\begin{array}{l}f_{r,j}=\begin{cases}1, & N_2\le j<N_2+|F_2|\\ w_{j+l_r}, & p_2<q_2, 0\le j<N_2\\ t_{j+l_r}, & p_2\ge q_2, 0\le j<N_2\end{cases}\\ g_{s,j}=\begin{cases}-1, & N_2\le j<N_2+|F_2|\\ t_{j+l_s}, & p_2<q_2, 0\le j<N_2\\ w_{j+l_s}, & p_2\ge q_2, 0\le j<N_2\end{cases}\end{array}\right\}\tag{7}$$

当 $F_2<0$ 时，

$$\left.\begin{array}{l}f_{r,j}=\begin{cases}-1, & N_2\le j<N_2+|F_2|\\ w_{j+l_r}, & p_2<q_2, 0\le j<N_2\\ t_{j+l_r}, & p_2\ge q_2, 0\le j<N_2\end{cases}\\ g_{s,j}=\begin{cases}-1, & N_2\le j<N_2+|F_2|\\ t_{j+l_s}, & p_2<q_2, 0\le j<N_2\\ w_{j+l_s}, & p_2\ge q_2, 0\le j<N_2\end{cases}\end{array}\right\}\tag{8}$$

由式(7)和式(8)得

$$\begin{cases}g_{s,0}=-1, & j=0\\ g_{s,j}=-1, & N_2\le j<N_2+|F_2|\end{cases}\tag{9}$$

因此集合中任意两个序列偶的周期相关函数为

$$\begin{aligned}P_{(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{g}_s)}(0)&=\sum_{i=0}^{N_2-1}f_{r,i}g_{s,i}+\sum_{j=N_2}^{N_2+|F_2|-1}f_{r,j}g_{s,j}\\&=\left[\sum_{i=0}^{N_2-1}w_{(i+l_r)\bmod N_2}t_{(i+l_s)\bmod N_2}\right]-F_2\\&=\begin{cases}E_2-F_2, & l_r=l_s\\ 0, & l_r\ne l_s\end{cases}\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}P_{(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{g}_s)}(1)&=\sum_{i=0}^{N_2-2}f_{r,i}g_{s,i+1}+f_{r,N_2-1}g_{s,N_2}\\&\quad+\sum_{j=N_2}^{N_2+|F_2|-2}f_{r,j}g_{s,j+1}+f_{r,N_2+|F_2|-1}g_{s,0}\\&=\begin{cases}\sum_{i=0}^{N_2-1}w_{(i+l_r)\bmod N_2}t_{(i+l_s+1)\bmod N_2}-F_2, & p_2<q_2\\ \sum_{i=0}^{N_2-1}t_{(i+l_r)\bmod N_2}w_{(i+l_s+1)\bmod N_2}-F_2, & p_2\ge q_2\end{cases}\\&=\begin{cases}E_2-F_2, & l_r=l_s+1\\ 0, & l_r\ne l_s+1\end{cases}\end{aligned}\tag{11}$$

由此可知，对于 $0\le r,s<\max\{p_2,q_2\}$，当 $r\ne s$，那么

$$P_{(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{g}_s)}(0)=0\tag{12}$$

当 $r>s$，则 $l_r<l_s$，那么

$$P_{(\boldsymbol{f}_r,\boldsymbol{g}_s)}(1)=0\tag{13}$$

5　二元零相关区序列偶集的构造

零相关区(ZCZ)序列是指序列的周期异相自相关和序列间的互相关在一定区域内都为零，从而保证其用于 QS-CDMA 系统中减少或消除多址和多径干扰以及联合信道干扰，ZCZ 序列集的构造已经得到了广泛深入的研究[7–10]，并获得了 ZCZ 序列集的理论限[11]。ZCZ 序列偶将两个不同序列作为 QS-CDMA 系统中的收发扩频序列，它作为 ZCZ 序列的扩展可以获得更多数量的地址码，尤其是二元 ZCZ 序列偶集可以提高二元 ZCZ 序列集的理论上限[12]。本文应用二元二值序列偶，借助二元正交矩阵偶或正交矩阵和正交序列偶集，采用交织法构造出一类新的二元零相关区序列偶集合。

定义 6　二元序列偶集 $\{(a_r,b_r)\}_{r=0}^{M-1}$ 如果序列偶的周期相关函数满足

$$\forall r,\ 0<|\tau|\le Z,\ P_{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_r)}(\tau)=0;\ P_{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_r)}(0)\ne 0\tag{14}$$

$$\forall r,s(r\ne s),\ |\tau|\le Z,\ P_{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_r)(\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}_s)}(\tau)=P_{(\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_s)}(\tau)=0\tag{15}$$

那么 $\{(a_r,b_r)\}$ 称为二元零相关区序列偶集，其中零相关区长为 Z，集合内序列偶数量为 M，序列偶长度为 N，可表示为 $(N,M,Z)-\mathrm{ZCZ}$。

为了构造二元零相关区序列偶集，首先利用由式(4)和式(5)构造的 $N_1+(N_1+|F_1|)$ 阶正交矩阵偶 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 和由式(7)和式(8)构造的正交序列偶集合 $\{(f_k,g_k)\}$ 构造出二元零相关区序列偶集 $\{(u_r,v_r)\}$，零相关区长度 Z 为 $(N_1+|F_1|)$，序列偶长度 N 为 $(N_1+|F_1|)\cdot(N_2+|F_2|)$，数量 M 为 N_1，构造方法如下：

$$u_{r,x+(N_1+|F_1|)y}=A_{r,x}\cdot f_{x,y},\ v_{r,x+(N_1+|F_1|)y}=B_{r,x}\cdot g_{x,y}\tag{16}$$

其中 $0\le r<N_1$，$0\le x<N_1+|F_1|$，$0\le y<N_2+|F_2|$。

(1)当 $\tau=0$，

$$\begin{aligned}P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(0)&=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1}\left(\sum_{y=0}^{N_2+|F_2-1|}A_{r,x}f_{x,y}B_{s,x}g_{x,y}\right)\\&=P_{(\boldsymbol{A}_r,\boldsymbol{B}_s)}(0)\cdot P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_x)}(0)\\&=\begin{cases}(E_1-F_1)(E_2-F_2), & r=s\\0, & r\ne s\end{cases}\end{aligned}\tag{17}$$

(2)当 $0<\tau<N_1+|F_1|$，

$$\begin{aligned}&P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(\tau)\\&=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1}\sum_{y=0}^{N_2+|F_2|-1}u_{r,x+(N_1+|F_1|)y}v_{s,[x+\tau+(N_1+|F_1|)y]\bmod N}\\&=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1-\tau}\left(\sum_{y=0}^{N_2+|F_2|-1}A_{r,x}f_{x,y}B_{s,x+\tau}g_{x+\tau,y}\right)\\&\quad+\sum_{x=N_1+|F_1|-\tau}^{N_1+|F_1|-1}\left(\sum_{y=0}^{N_2+|F_2|-1}A_{r,x}f_{x,y}B_{s,[x+\tau-(N_1+|F_1|)]}\right.\\&\quad\left.\cdot g_{[x+\tau-(N_1+|F_1|)],y+1}\right)=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1-\tau}A_{r,x}B_{s,x+\tau}P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_{x+\tau})}(0)\\&\quad+\sum_{x=N_1+|F_1|-\tau}^{N_1+|F_1|-1}A_{r,x}B_{s,[x+\tau-(N_1+|F_1|)]}P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_{[x+\tau-(N_1+|F_1|)]})}(1)\end{aligned}$$

由于 $x>x+\tau-(N_1+|F_1|)$，根据式(12)和式(13)，有 $P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_{x+\tau})}(0)=0$，$P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_{[x+\tau-(N_1+|F_1|)]})}(1)=0$。因此，当 $0<\tau<N_1+|F_1|$ 时，$P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(\tau)=0$。同理，当 $0<-\tau<N_1+|F_1|$，

$$\begin{aligned}P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(-\tau)=P_{(\boldsymbol{v}_s,\boldsymbol{u}_r)}(\tau)=&\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1-\tau}B_{s,x}A_{r,x+\tau}P_{(\boldsymbol{g}_x,\boldsymbol{f}_{x+\tau})}(0)\\&+\sum_{x=N_1+|F_1|-\tau}^{N_1+|F_1|-1}B_{s,x}A_{r,[x+\tau-(N_1+|F_1|)]}P_{(\boldsymbol{g}_x,\boldsymbol{f}_{[x+\tau-(N_1+|F_1|)]})}(1)\end{aligned}$$

根据式(11)知只有当 $g_{r,N_2-1}=-1$ 时才能保证当 $s>r$ 时，$P_{(\boldsymbol{g}_s,\boldsymbol{f}_r)}(1)=0$，即 $P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(-\tau)=0$，即

$$P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(\tau)=0,\ \ 0<|\tau|<N_1+|F_1|\tag{18}$$

(3)当 $\tau=N_1+|F_1|$，

$$\begin{aligned}P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(N_1+|F_1|)&=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1}\left(\sum_{y=0}^{N_2+|F_2|-1}A_{r,x}f_{x,y}B_{s,x}g_{x,y+1}\right)\\&=\sum_{x=0}^{N_1+|F_1|-1}A_{r,x}B_{s,x}P_{(\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{g}_x)}(1)=0\end{aligned}\tag{19}$$

同理当 $-\tau=N_1+|F_1|$ 时，只有 $g_{r,N_2-1}=-1$ 时，$P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(-N_1-|F_1|)=0$。

因此，由式(17)，式(18)，式(19)可知集合 $\{(u_r,v_r)\}$ 满足定义 6 的条件，即 $\forall r$，$0<|\tau|\le N_1+|F_1|$，$P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_r)}(\tau)=0$；$\forall r,s(r\ne s)$，$|\tau|\le N_1+|F_1|$，$P_{(\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_s)}(\tau)=0$，那么 $\{(u_r,v_r)\}$ 是 $((N_1+|F_1|)(N_2+|F_2|),N_1,N_1+|F_1|)-\mathrm{ZCZ}$。

例 2 二元二值周期自相关序列偶 (w,t)，其中 $w=(-1-1-1-1-1-1-111)$，$t=(-11-11-11-111)$，(w,t) 的同相和异相自相关值分别为 3 和-1，由式(8)可构造出 10 长的正交序列偶集合 $\{(f_r,g_r)\}_{r=0}^{5}$，再联合例 1 中构造的 5×6 阶正交矩阵偶 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 通过式(16)交织得出零相关区序列偶集 $(60,5,6)-\mathrm{ZCZ}$。

上述构造方法也适用于正交矩阵与正交序列偶集交织的构造，例如当正交序列偶集中的序列偶个数为 2^n 时即可以用正交矩阵代替正交矩阵偶，可见利用二元正交矩阵偶可以弥补二元正交矩阵无法存在的情况，由此可获得更多参数组合的零相关区序列偶集合，同时也可补充由递归法和由互补序列构造法所不能得到的二元零相关区序列偶集参数组合。

由于零相关区序列偶是将不同的序列分别作为收发地址信号使用，因此衡量零相关区序列偶的能量效率是十分必要的，零相关区序列偶 (f,g) 的能量效率可表示为[13]

$$\eta=\frac{P_{(f,g)}^2(0)}{P_{(f,f)}(0)P_{(g,g)}(0)}=\left[\frac{(E_1-F_1)(E_2-F_2)}{(N_1+|F_1|)(N_2+|F_2|)}\right]^2\tag{20}$$

由式(20)可见选择适当的二元二值序列偶对构造高能量效率的零相关区序列偶是十分重要。

零相关区序列偶集的理论限是衡量集合构造是否达到最佳的标准，即序列偶的长度 N，序列偶的个数 M 以及零相关区长度 Z 关系满足[12]：

$$M(Z+1)\le N\tag{21}$$

即比值 $M(Z+1)/N\le 1$，当比值为 1 时说明构造的序列偶集合为最佳。为了衡量上述构造的零相关区序列偶集，定义比值系数

$$\xi=\frac{M(Z+1)}{N}=\frac{N_1(N_1+|F_1|+1)}{(N_1+|F_1|)(N_2+|F_2|)}\tag{22}$$

为了使集合达到最大理论限，同样要选择合适的二元二值序列偶，例如由 $(2n+1,2n-1,n,n-3)$ 差集偶得到的二元二值序列偶的异相自相关函数值为-1，由其可得到 $(2n-3)\times(2n-2)$ 阶二元正交矩阵偶和含 $(2n-2)$ 个长度为 $(2n+2)$ 的正交序列偶集合，通过上述交织构造可得 $(4n^2-4,2n-3,2n-2)-\mathrm{ZCZ}$，那么 $\xi=M(Z+1)/N=1-(8n-7)/(4n^2-4)$ 显然当正整数 n 增大时即二元二值序列偶长度增加时，$\xi\approx 1$，即所构造的零相关区序列偶集可达到理论上限。而二元零相关序列的理论上限只能达到 $MZ/N\le 1/2$[11,14]，可见远低于二元零相关区序列偶的最大理论限。

6　结论

本文提出了正交矩阵偶的概念，应用根据差集偶得到的二元二值序列偶，构造了二元正交矩阵偶，其阶数不受 2 的幂次的限制，为信号处理提供了更多的变换形式。通过选择适当的二元二值序列偶，可构造出大容量的正交序列偶集合，结合正交矩阵偶或正交矩阵构造的二元零相关区序列偶集具有新的参数组合形式，并且通过对二元二值序列偶的选择可实现高能量效率和接近最大理论限的零相关区序列偶集合的构造。

参 考 文 献

[1] Xu Cheng-qian, Liu Kai, Li Gang, and Yu Wang-bo. Bianry sequence pairs with two-level autocorrelation functions[C]. IEEE 2007 International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Shanghai, China, Sep. 21–25, 2007: 1361–1364.

[2] Krengel E I. Family of uncorrelated binary ZCZ sequence pairs with mismatched filtering[J]. *Electronics Letters*, 2007, 43(14): 748–749.

[3] Trinh Q K, Fan Ping-zhi, and Tang Xiao-hu. Sequence set with zero correlation zones using mismatched filtering[C]. Proceeding of IWSDA'07, Chengdu, China, 2007: 61–64.

[4] Matrsufuji S. Families of sequence pairs with zero correlation zone[J]. *IEICE Transactions Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2006, E89-A(11): 3013–3017.

[5] 赵晓群，贾世楼，王仲文．序列偶及其应用[J]．遥测遥控，1998, 19(3): 31–35.
Zhao Xiao-qun, Jia Shi-lou, and Wang Zhong-wen. Sequence pairs and their application[J]. *Journal of Telemetry, Tracking and Command*, 1998, 19(3): 31–35.

[6] 许成谦．差集偶与最佳二进阵列偶的组合研究方法[J]．电子学报, 2001, 29(1): 87–89.
Xu Cheng-qian. Difference set pairs and approach for the study of perfect binary array pairs[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(1): 87–89.

[7] Kenji Takatsukasa, Matrsufuji S, and Yoshihiro Tanada. Formalization of binary sequence sets with zero corrlation zone[J]. *IEICE Transactions Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2004, E87-A(4): 887–891.

[8] Hayashi Takafumi. Binary zero-correlation zone sequence set construction using a cyclic Hadamard sequence[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2006, E89-A(10): 2649–2655.

[9] Hayashi Takafumi. Binary zero-correlation zone sequence set construction using a primitive linear recursion[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2005, E88-A(7): 2034–2038.

[10] 左会娟，佟鑫，温巧燕．由完备序列构造零相关区序列集的方法[J]．北京邮电大学学报, 2008, 31(4): 122–125.
Zuo Hui-juan, Tong Xin, and Wen Qiao-yan. Constructions of zcz sequence set from a perfect sequence[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2008, 31(4): 122–125.

[11] Tang X H, Fan P Z, and Matsufuji S. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(16): 551–552.

[12] Li Gang, Xu Cheng-qian, Liu Kai, and Liang Qing-mei. Some novel results on 1-dimension and 2-dimension sequence pairs with zero correlation zone[C]. 2007 Global Mobile Congress, Shanghai, China, 2007: 199–204.

[13] Luke H D and Busboon A. Mismathed filtering of odd-periodic binary sequences[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(4): 1345–1349.

[14] Torii H. A new class of zero-correlation zone sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(3): 559–565.

刘　凯：　女，1977 年生，讲师，研究方向为扩频通信、编码理论、序列设计．

许成谦：　男，1961 年生，教授，研究方向为编码理论、扩频序列设计、密码学．

李　刚：　男，1979 年生，讲师，研究方向为扩频通信、最佳离散信号设计．