

1/f 类分形信号的最小二乘法参数估计

郜峰利 郭树旭 张振国 于思瑶 李雪妍
(吉林大学电子科学与工程学院 长春 130012)

摘 要: 根据含噪 1/f 类分形信号的小波变换系数方差随尺度变化的特点, 该文提出了一种估计 1/f 类分形信号参数的新方法, 即对其小波系数方差进行简单的变换, 使 1/f 类分形信号参数估计满足最小二乘法参数估计的条件。仿真实验结果表明, 该方法可以有效地从加性白噪声背景下估计出 1/f 类分形信号的 γ , σ^2 等参数, 从而使 1/f 类分形信号与加性白噪声分离。

关键词: 信号处理; 1/f 类分形信号; 参数估计; 小波变换; 高斯白噪声

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)07-1746-03

Parameter Estimation of 1/f-Type Fractal Signal Using Least Square Method

Gao Feng-li Guo Shu-xu Zhang Zhen-guo Yu Si-yao Li Xue-yan
(College of Electronic Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

Abstract: A novel method to estimate the parameters of 1/f-type fractal signal is proposed according to characteristics of the wavelet coefficient variance versus scale of 1/f-type fractal signal in white noise, and namely, after the wavelet coefficient variance is simply transformed, the parameter estimation of 1/f-type fractal signal is according with parameter estimation conditions of least square method. The simulation experiment results demonstrate that, this method can effectively estimate parameters of 1/f-type fractal signal such as γ and σ^2 etc. to extract them from additive white noise.

Key words: Signal processing; 1/f-type fractal signal; Parameter estimation; Wavelet transform; White-Gauss noise

1 引言

1/f 类分形信号是一种自然界很常见的非平稳随机过程, 具有广义的自相似性质, 其频谱密度随频率 f 按 $1/f^\gamma$ 的规律变化, 也被称作类 1/f 噪声, 作为一种低频电噪声, 在电子器件的可靠性评价中得到了广泛的应用^[1,2]。在信息处理方面, 近年来许多研究集中于该信号的计算机小波生成及其参数的估计上^[3-7], Wornell 等为 1/f 类分形信号参数估计做出了重要贡献, 给出了其小波系数方差随尺度变化的特点^[5], 目前很多研究都在其研究基础上进行展开。Wornell 等提出了最大似然(ML)参数估计方法, 然而, 这种方法仅适合 $0 < \gamma < 1$ 的参数估计^[7], 另外, ML 方法是一种需要已知似然函数先验知识的参数估计方法^[8], 但是在很多情况下这种先验知识是未知的。文献[6]的方法是在已知信噪比的前提下对参数进行估计, 文献[7]提出了一种较好的方法,

由 3 个相邻尺度下的小波系数方差进行一系列的代数运算进行参数估计, 但是所取的尺度不同时参数的估计值可能略有不同, 则需要对多组 3 个相邻尺度下的估计值进行求平均。本论文对分形信号的小波系数方差进行简单的变换, 使 1/f 类分形信号参数估计满足最小二乘法参数估计的条件, 利用最小二乘法参数估计不需要任何先验知识进行参数估计。仿真实验证明, 该方法可以有效地从加性白噪声背景下估计出分形信号参数, 实现信号与噪声的分离。

2 1/f 类分形信号的小波变换与参数估计

设 $x(t)$ 为 1/f 类分形信号, 则 $x(t)$ 的功率谱密度与频率具有如下关系:

$$S_x(f) \sim \sigma_x^2 / f^\gamma \quad (1)$$

其中 σ_x^2 为谱常量, f 为频率, γ 为频率指数。设实际观测的含噪分形信号为

$$r(t) = x(t) + w(t) \quad (2)$$

其中 $w(t)$ 为加性平稳高斯白噪声。则 $r(t)$ 小波变换系数可表示为

$$r_k^j = \langle r(t), \psi_k^j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \psi_k^j(t) dt \quad (3)$$

其中 $\psi_k^j(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$, $\psi(t)$ 为母小波, j 为尺度参数, k 为时间平移指标。Wornell 等证明了^[5], 不同尺度 j 下 r_k^j 的方差满足如下关系:

$$\text{Var}(r_k^j) = \sigma^2 2^{-j\gamma} + \sigma_w^2 = \sigma_j^2 \quad (4)$$

式中 $\sigma^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_x^2}{|\omega|^\gamma} |\Psi(\omega)|^2 d\omega$, σ_w^2 为高斯白噪声的小波变换系数方差。

最小二乘法参数估计的应用中, 待估计参数(未知参数)与观测数据应满足线性关系, 即未知参数向量与观测数据可建模成矩阵方程的形式^[8], 此处, 分形信号的未知参数为 γ , σ^2 及 σ_w^2 , 观测数据为 j 与 $\text{Var}(r_k^j)$, 显然, 式(4)不满足最小二乘参数估计的条件, 所以不能直接基于式(4)利用最小二乘参数估计。

由式(4)同理可得, 尺度 $j+1$ 下的小波系数方差为

$$\text{Var}(r_k^{j+1}) = \sigma^2 2^{-(j+1)\gamma} + \sigma_w^2 = \sigma_{j+1}^2 \quad (5)$$

式(4), 式(5)相减并取以 2 为底数的对数得

$$\log_2(\Delta\sigma_j^2) = \log_2[\sigma^2(1 - 2^{-\gamma})] - j\gamma \quad (6)$$

其中 $\Delta\sigma_j^2 = \sigma_j^2 - \sigma_{j+1}^2$ 。此时, 观测数据视为 j 和 $\log_2(\Delta\sigma_j^2)$, 未知参数视为 γ 和 $\log_2(\sigma^2(1 - 2^{-\gamma}))$, 则式(6)满足最小二乘法的参数估计条件。当小波变换的最高尺度为 J 时, 可得 $J-1$ 组 $(j, \log_2(\Delta\sigma_j^2))$, 则根据式(6), 利用最小二乘法参数估计可得 γ , σ^2 估计值为

$$\hat{\gamma} = \frac{(J-1)S_{xy} - S_y J(J-1)/2}{(J(J-1)/2)^2 - (J-1)S_{xx}} \quad (7)$$

$$\log_2[\hat{\sigma}^2(1 - 2^{-\hat{\gamma}})] = \frac{S_y S_{xx} - S_{xy} J(J-1)/2}{(J-1)S_{xx} - (J(J-1)/2)^2} \quad (8)$$

式中 $S_y = \sum_{j=1}^{J-1} \log_2(\Delta\sigma_j^2)$, $S_{xy} = \sum_{j=1}^{J-1} j \log_2(\Delta\sigma_j^2)$,

$S_{xx} = \sum_{j=1}^{J-1} j^2$ 。根据式(7), 式(8)对 γ , σ^2 进行估计,

再代入式(4)可得尺度为 j 时的 σ_w^2 的估计值, 对所有尺度时的 σ_w^2 估计值求平均以获取 σ_w^2 的最终估计, 即

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} [\text{Var}(r_k^j) - \hat{\sigma}^2 2^{-j\hat{\gamma}}] \quad (9)$$

最后, 由 γ , σ^2 和 σ_w^2 的估计值及观测信号的小波变换系数 r_k^j 来求分形信号的小波系数, 再作离散反演小波变换, 从加性白噪声背景下分离出 1/f 类分形信号, 即

$$\hat{x}(t) = \sum_j \sum_k \left[\frac{\hat{\sigma}^2 2^{-j\hat{\gamma}}}{\hat{\sigma}^2 2^{-j\hat{\gamma}} + \hat{\sigma}_w^2} \right] \cdot r_k^j \psi_k^j(t) \quad (10)$$

3 仿真实验结果与分析

根据文献[9]分形信号的产生方法, 我们用 Matlab 计算而获得的计算机仿真 1/f 类分形信号如图 1 所示, 其中采样周期为 $\Delta T = 130 \mu\text{s}$, 采样点数为 $N = 2^{16}$ 。我们在实验中使用的小波为 Haar 小波。经 FFT 变换后得分形信号的功率谱密度如图 2 所示, 由式(4)计算的小波变换系数方差与尺度的关系如图 3 所示。从图 2 和图 3 可以看出, 该仿真信号为 $\gamma = 1.82$ 的类分形信号。

在原分形信号中加入高斯白噪声后的波形如图 4 所示, 其信噪比(SNR)为 -10 dB, 可以看出, 分形信号已淹没在加性白噪声中, 由式(4)进一步计算该含噪分形信号的小波变换系数方差如图 5 所示, 显然, 在加性白噪声背景下观测信号的小波变换系数方差取对数后与尺度不再成线性关系。

式(6)的计算结果如图 6 所示。由式(6)知, 计算结果理论上应与尺度成线性关系。从图 6 可以看出, 该计算结果与尺度有较好的线性度, 特别是在尺度较小时, 线性度更优, 这是由 1/f 类分形信号的特征造成的, 即频率越低 1/f 类分形信号的强度越强。而由式(3)知, 尺度小的小波变换系数表征了分形信号低频区的强度。由式(7)计算可得 $\hat{\gamma} = 1.85$ ($\hat{\gamma}$ 对应图 6 中所示直线的斜率), 误差仅 0.03, 这说明了本文提出的方法具有可行性。

最后, 由式(10)估计出的分形信号的波形如图 7 所示。对比图 7 与图 1 可以看出, 估计出的分形信号与原分形信号能较好地相吻合, 进一步说明了本文的方法可以有效地从加性白噪声背景下估计出分形信号, 实现信号与白噪声的分离。通过不同信噪比下的仿真实验知, 随着信噪比的减小, γ, σ^2 估计

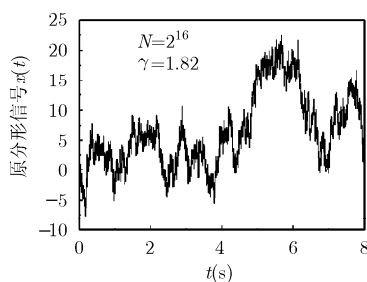


图 1 1/f 类分形信号的时域波形

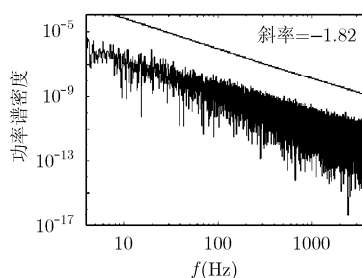


图 2 1/f 类分形信号的功率谱密度

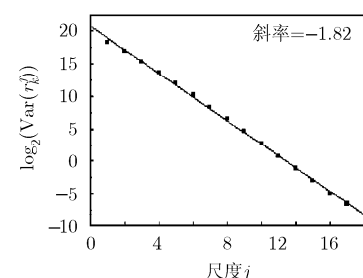


图 3 1/f 类分形信号的小波系数方差

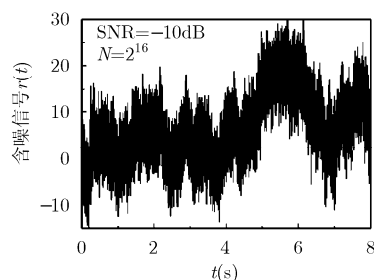


图4 含高斯白噪声的分形信号

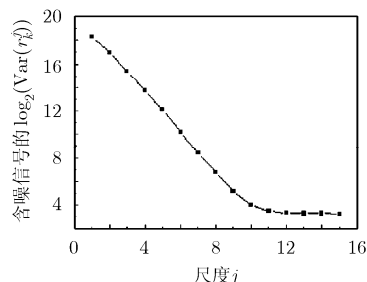


图5 含噪分形信号的小波系数方差

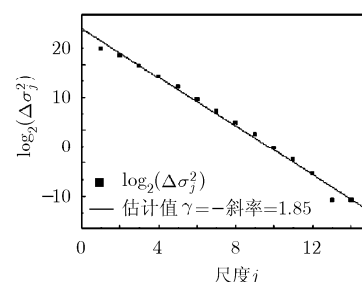
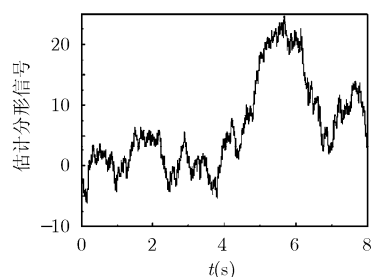
图6 $\Delta\sigma_j^2$ 与尺度 j 的关系

图7 估计出的分形信号

估计值 $\hat{\gamma}=1.85$

值减小, 如当信噪比为-20 dB 时, $\hat{\gamma} = 1.59$, 表明了信噪比越小, 参数估计值的误差越大, 所以, 在实际应用中可根据待估计参数和波形的误差允许范围, 对其进行合理的估计。

4 结束语

本论文对 $1/f$ 类分形信号的小波变换系数方差与尺度的关系, 进行简单的变换, 使得待估计参数与观测数据满足最小二乘法参数的估计条件, 利用最小二乘法参数估计不需要任何先验知识的优点进行参数估计, 论文详细描述了基于该方法的分形信号参数估计的过程。从仿真计算结果上看, 本文的方法对加性白噪声背景下 $1/f$ 类分形信号参数估计, 具有可行性, 同时, 对最终估计出的分形信号与原分形信号的对比可以看出, 估计出的分形信号与原分形信号能较好地相吻合, 说明了该方法可以有效地从加性白噪声背景下估计出分形信号, 能够实现分形信号与白噪声的分离。

参考文献

- [1] 胡瑾, 杜磊, 庄奕琪等. 光电耦合器电流传输比的噪声表征[J]. 半导体学报, 2007, 28(4): 597-603.
Hu Jin, Du Lei, and Zhuang Yi-qi, et al. Noise as a representation for CTR of optoelectronic coupled devices[J]. *Chinese Journal of Semiconductors*, 2007, 28(4): 597-603.
- [2] 李瑞珉, 杜磊, 庄奕琪等. MOSFET辐射诱导界面陷阱形成过程的 $1/f$ 噪声研究[J]. 物理学报, 2007, 56(6): 3400-3406.
Li Rui-min, Du Lei, and Zhuang Yi-qi, et al. A $1/f$ noise

based research of radiation induced interface trap buildup process[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(6): 3400-3406.

- [3] 阎晓红, 刘贵忠, 刘峰. $1/f$ 信号的积分小波变换表示[J]. 电子与信息学报, 2004, 26(10): 1638-1644.
Yan Xiao-hong, Liu Gui-zhong, and Liu Feng. Integral multiwavelet representation of $1/f$ signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2004, 26(10): 1638-1644.
- [4] 李强, 王其申. $1/f$ 分形噪声的一种多尺度 Kalman 滤波方法[J]. 量子电子学报, 2007, 24(1): 7-12.
Li Qiang and Wang Qi-shen. $1/f$ fractal noise attenuation using multiscale Kalman filter[J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2007, 24(1): 7-12
- [5] Wornell G W. Wavelet-based representations for the $1/f$ family of fractal processes [J]. *Proc. IEEE*, 1993, 81(10): 1428-1450.
- [6] 何凯, 王树勋, 戴逸松. $1/f$ 类分形信号的小波去噪方法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2003, 33(1): 77-81.
He Kai, Wang Shu-xun, and Dai Yi-song. Study on the wavelet-based denoising for $1/f$ fractional signals [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2003, 33(1): 77-81.
- [7] 陆伟宏, 卢鹏飞. 基于小波分析的分形参数估计新方法[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(10): 1527-1530.
Lu Wei-hong and Lu Peng-fei. A new parameter estimation of ($1/f$)-type fractal signal based on wavelet analysis[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(10): 1527-1530.
- [8] 张贤达. 现代信号处理(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 49-59.
Zhang Xian-da. *Modern Signal Processing (Second Edition)* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 49-59.
- [9] Hashiguchi S, Yamagishi Y, and Fukuda T, et al. Generation of $1/f$ spectrum by relaxation process in thin film resistors [J]. *Qual. Reliab. Engng. Int.*, 1998, 14(2): 69-71.

- 郜峰利: 男, 1977年生, 讲师, 博士生, 研究方向为半导体激光器 $1/f$ 噪声特性检测。
郭树旭: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为半导体激光器可靠性、数字信号处理。
张振国: 男, 1962年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为数字信号处理、信息处理。