

# Hopfield 优化网络用于 DOA 估计存在的问题\*

林 盛 殷勤业

(西安交通大学信息与控制工程系 西安 710049)

**摘要** 本文讨论了用 Hopfield 优化网络解决 DOA 估计问题方法的有效性和正确性。虽然这种方法可以避免特征分解和谱峰搜索运算,但在不限制网络中输出为 1 的神经元个数的条件下,方法中代价函数的构造是不正确的。理论分析和仿真实验都证实了上述结论。

**关键词** 神经网络,波达方向估计,谱估计

## 1 引 言

在阵列信号处理中,到达波方向 (DOA) 的估计问题一直是人们广泛感兴趣的问题。解决此问题的最优方法是最大似然法,然而它需对一个很复杂的、多维的代价函数进行最优化,这是很困难的。近年来,基于阵列协方差矩阵特征分解的特征结构法成为学术界讨论的一个热点。特征结构法是通过协方差矩阵的特征分解来划分信号子空间和噪声子空间的,然后利用它们之间的正交性来估计到达波方向参数的,因此使得角度分辨率得到了很大的提高<sup>[1]</sup>。在精确的阵列协方差矩阵的情况下,特征结构法可以在实际角度位置产生无偏的谱峰,而不受信噪比和方向角间隔的影响,这一特性是最大熵 (ME) 法、线性预测 (LP) 法等所不具备的<sup>[2,3]</sup>。

特征结构法主要包括两个过程:协方差阵的特征分解和谱峰搜索。对于一个  $N \times N$  的矩阵来说,特征分解的运算量为  $O(N^3)$ ,若假设参数空间被离散化为  $P$  个量化级,信号源的个数为  $K$  个,那么谱峰搜索的运算量为  $O(PNK)$ ,所以当  $P$  很大时,即参数空间的搜索要求较细时,谱峰搜索的运算量将占主要地位。由此可以看出,虽然特征结构法可以得到渐近无偏的参数估计,但其庞大的运算量使得用传统的代数方法无法得到实时的估计结果,尤其对于实际中的二维和三维问题,这种方法几乎无法应用。

近年来,随着神经网络理论的发展,人们开始研究用神经网络的方法来解决 DOA 估计问题。这种方法主要可分为两类:一是利用神经网络分别实现 DOA 估计中运算量庞大的部分<sup>[4,5]</sup>,另一类是把 DOA 估计做为一个优化问题映射到神经网络上<sup>[6]</sup>。对于

1994-02-01 收到,1994-07-12 稿定

\* 国家自然科学基金、跨世纪优秀人才专项基金资助课题

林 盛 男,1969 年生,博士生,主要从事阵列信号处理、谱估计、神经网络等方面的研究工作。

殷勤业 男,1950 年生,教授、博士生导师,现主要从事阵列信号处理、自适应信号处理、谱估计、神经网络、时频分析等方面的研究工作。

第一类方法,我们将在另外的文章中讨论。本文主要分析第二类方法的有效性和正确性。

## 2 谱估计问题到神经网络能量函数的映射

假定用 Hopfield 优化神经网络的每个神经元代表一个特定的波达方向参数值(这里假定传感器阵列是线性等间距排列的),且被估计的参数空间被量化为  $P$  个量化级,那么就需要一个具有  $P$  个神经元的神经网络来表示每一个假设方向向量  $\mathbf{S}_i^{[6]}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i &= 1/\sqrt{N}[1 \exp(-j\tau_i) \exp(-j2\tau_i) \cdots \exp(-j(N-1)\tau_i)]^T, \\ \tau_i &= 2\pi d \cos\theta_i/\mu, \quad i = 1, 2, \cdots, P, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $N$  为传感器的数目,  $d$  为相邻传感器之间的距离,  $\mu$  为窄带信号源的中心波长。假设  $\mathbf{X}_i, i = 1, 2, \cdots, P$  为阵列所接收到的数据  $\mathbf{Y}$  在  $\mathbf{S}_i$  上的投影,那么数据  $\mathbf{Y}$  可以表示为这些投影的线性组合。使它们的误差在 2-范数的意义下最小,即求解最佳组合系数  $\mathbf{V}$ ,使得误差

$$\begin{aligned} \theta &= \|\mathbf{Y} - [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_P]\mathbf{V}\|^2 \\ &= \|\mathbf{Y} - [\mathbf{P}_1\mathbf{Y}, \mathbf{P}_2\mathbf{Y}, \cdots, \mathbf{P}_P\mathbf{Y}]\mathbf{V}\|^2 \end{aligned} \quad (2)$$

最小,其中  $\mathbf{P}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{S}_i^H \mathbf{S}_i)^{-1} \mathbf{S}_i^H = \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H$  为投影矩阵,  $\mathbf{V} = [V_1, V_2, \cdots, V_P]^T$  表示 Hopfield 优化网络的输出,它们取值在 0 和 1 之间,且网络稳定后,它们要么接近 1,要么接近 0。那么我们认为对应于  $V_i = 1$  的假设方向  $\mathbf{S}_i$  代表源的真正入射方向。(2)式就是为了用神经网络解决 DOA 估计问题所构造的代价函数,它通过能量函数与神经网络联系起来。对于  $L$  次快拍来说,误差函数可以定义为

$$Q = 1/L \sum_{i=1}^L \|\mathbf{Y}_i - [\mathbf{P}_1\mathbf{Y}_i, \mathbf{P}_2\mathbf{Y}_i, \cdots, \mathbf{P}_P\mathbf{Y}_i]\mathbf{V}\|^2. \quad (3)$$

在高斯白噪声和传感器阵列为线性等间距排布的情况下,文献[6]中认为由(2)和(3)式得到的解相当于最大似然估计。

## 3 方法的有效性

对于一个具有  $N$  个传感器的阵列来说,每一次快拍数据  $\mathbf{Y}_1$  都是由规范正交基  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_N\}$  张成的  $N$  维复希尔伯特空间内的一点,不妨取这个空间的一组正交基为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 1/\sqrt{N}[1 \exp(-j\pi) \cdots \exp(-j(N-1)\pi)]^T, \\ \mathbf{b}_2 &= 1/\sqrt{N}[1 \exp(-j(1-2/N)\pi) \cdots \exp(-j(N-1)(1-2/N)\pi)]^T, \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_N &= 1/\sqrt{N}[1 \exp(-j(1-2(N-1)/N)\pi) \cdots \\ &\quad \exp(-j(N-1)(1-2(N-1)/N)\pi)]^T. \end{aligned} \quad (4)$$

那么对于任意一个  $N$  维复向量来说,都可以表示为这组基的线性组合,即可以由这组基完

全表示, 所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{Y}_1, \mathbf{b}_i) \mathbf{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{b}_i (\mathbf{b}_i^H \mathbf{b}_i)^{-1} \mathbf{b}_i^H \mathbf{Y}_1. \end{aligned} \quad (5)$$

这里  $(\cdot, \cdot)$  表示希尔伯特空间中的内积. 假定(1)式中  $d = \mu/2$  且  $\theta_i = \in [0, 180^\circ]$ , 那么  $\tau_i = \pi \cos(\theta_i)$ . 比较(1)和(5)式, 若令

$$\begin{aligned} \pi \cos \theta_1 &= \pi, \\ \pi \cos \theta_2 &= (1 - 2/N)\pi, \\ &\vdots \\ \pi \cos \theta_N &= (1 - 2(N-1)/N)\pi, \end{aligned} \quad (6)$$

那么  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N$  一定落在  $0^\circ$  到  $180^\circ$  之间, 并且有

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

也就是说, 如果参数空间的量化足够精细, 那么在假设方向向量  $\mathbf{S}_i$  中可以找到一组完备正交基, 这时(5)式还可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i (\mathbf{S}_i^H \mathbf{S}_i)^{-1} \mathbf{S}_i^H \mathbf{Y}_1 \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \mathbf{Y}_1. \end{aligned} \quad (8)$$

这时误差

$$Q = \|\mathbf{Y}_1 - \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \mathbf{Y}_1\|^2 = 0 \quad (9)$$

达到最小值, 且对于任意的源的入射方向, (9)式总是成立的, 与有无噪声和源个数的多少无关, 所以我们可以得到下式:

$$\|\mathbf{Y}_1 - [\mathbf{P}_1 \mathbf{Y}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_1 \cdots \mathbf{P}_P \mathbf{Y}_1] \mathbf{V}^*\|^2 = 0. \quad (10)$$

这里, 向量  $\mathbf{V}^*$  的前  $N$  个元素为 1, 余下的元素取值为 0. 比较(3)和(10)两式, 由于并没有限定神经网络中输出不为零的单元的个数<sup>[6]</sup>, 所以(3)式的最优解是  $\mathbf{V}^*$ , 这时代价函数的值为零, 达到最小. 实际上, (3)式的最优解并不是唯一的, 对应于任意一组规范正交基的向量  $\mathbf{V}$  都是它的最优解. 由于这些解的本质是一致的, 在这里我们就不做更多的讨论了.

由上面的讨论可以看到, 作为代价函数的(2)和(3)式的构造本身就是有问题的, 在参数空间的量化足够细的情况下, 它们的最优解总是对应于  $N$  维空间中的一组规范正交基, 而不是源的真实入射方向. 所以, 无论采取什么有效措施来保证神经网络收敛到全局最小值点, 都不可能得到正确的 DOA 方向参数.

在实际中, 可能在所有的假设方向向量  $\mathbf{S}_i, i = 1, 2, \dots, P$  中找不到一组完备的正交基, 或者是  $M(1 < M < N)$  个正交的假设方向向量, 比如说相邻传感器之间的间距小于  $0.45\mu\text{m}$ , 参数空间的量化不够精细等. 但实验结果表明, 即使在这种情况下, 代价

函数的最优解仍不是对应于源的真正入射方向,至少当网络的输出对应于  $M(1 < M < N)$  个正交性并不是太好的假设方向向量时,代价函数的值要比对应于真正解时代价函数的值要小的多,所以不可能用这种映射方法得到 DOA 估计的正确解。

这种现象可以解释为:假设方向向量  $S_i, i = 1, 2, \dots, P$  的全体张成了整个  $N$  维复空间,而不只是信号子空间,所以噪声向量在  $S_i$  上的投影并不全为零,这将影响优化问题的解,且随着信噪比的降低,对优化问题解的影响越来越严重。另外,代表源的真正入射方向的假设方向向量一般并不是正交的,它们之间的相互投影不为零,所以当两个源相距较近时,这种现象尤为严重。

## 4 实验结果

在下面的实验中,采用线性等间距排列的具有 10 个传感器的阵列,相邻传感器之间的距离为  $0.4\mu\text{m}$ ,所以,无论参数空间的量化有多细,都不可能在假设方向向量中找到一组完备正交基。实验中所取的快拍数为 50,窄带入射源的个数为 2 个,  $\text{SNR} = 10.0\text{dB}$ 。我们用 181 个神经元对方向参数空间  $[0^\circ, 180^\circ]$  进行均匀量化,并假定神经网络稳定后神经元输出不为零的个数是正确的,即在本实验中神经元输出不为零的个数应为 2。

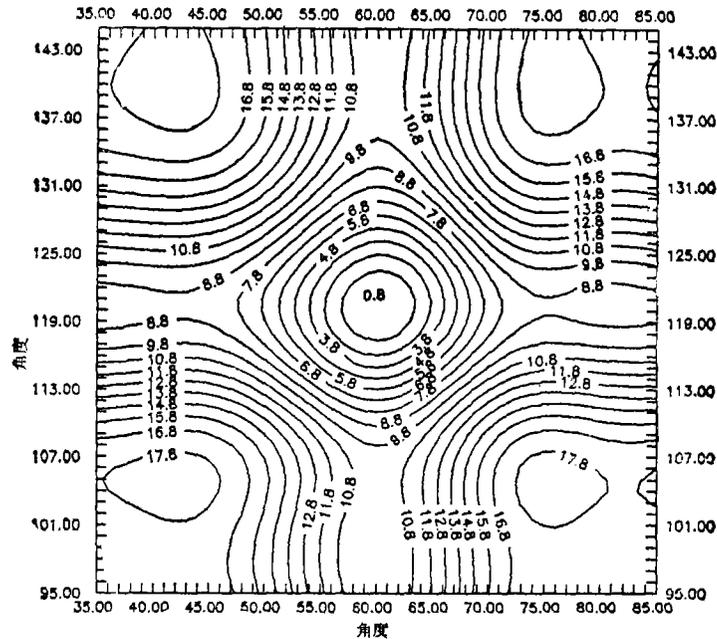


图 1 代价函数的等高线图

图 1 所示的是代价函数的等高线图,两个源的入射角分别为  $60^\circ$  和  $120^\circ$  也就是说它们所对应的  $S_i$  是正交的。两个方向角所取的可能入射区间分别为  $35^\circ \leq \theta_1 \leq 85^\circ$ ,  $95^\circ \leq \theta_2 \leq 145^\circ$ 。图 2 所示的是与图 1 相对应代价函数的能量曲面。从图中可以看到能量函数的全局最小值点与源的真正入射方向是相符的,它的最小值为 0.79,这主要是由

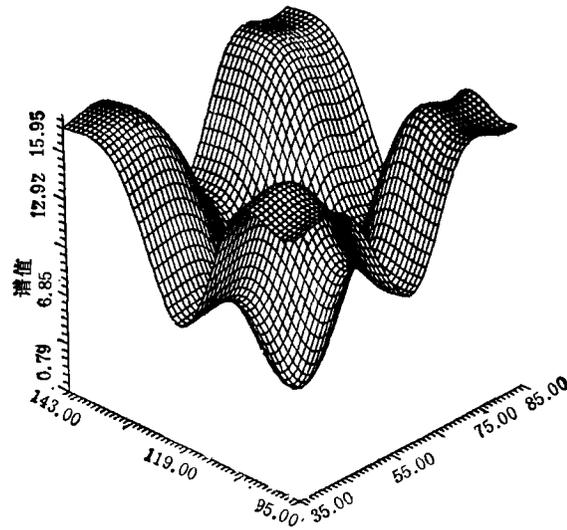


图 2 代价函数的能量曲面

噪声决定的。然而，如果我们取对应于  $\theta = 42^\circ, 60^\circ, 76^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 138^\circ$  的 7 个神经元的输出不为 0，所得到的能量函数的最小值为 0.32。更进一步，取对应于  $\theta = 0^\circ, 42^\circ, 60^\circ, 76^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ, 138^\circ, 180^\circ$  的 9 个神经元的输出不为 0，则得到的能量函数的最小值为 0.11。在上面的仿真实验中，对应于两个源的真实方向向量包含在所取的  $M$  个 ( $1 < M < N$ ) 假设方向向量之内。所取基的最大偏差为  $1^\circ$ ，也就是说它们不是完全正交的，但所得到的结果仍与我们的结论相符。

因此，上面的仿真实验说明，在  $P$  和  $\mu$  不是很小的情况下，我们的结论是正确的。在实际中，一般是满足上述条件的。另外，从图中可以看出，能量函数是有很多局部极小值点的。

## 5 小 结

本文主要讨论了 S. Jha 等人<sup>[6]</sup>提出的用 Hopfield 优化网络解决 DOA 估计的方法的有效性和正确性。从上面的理论分析和仿真实验结果来看，实际上，S. Jha 等人关于代价函数的构造是不正确的，代价函数本身的全局最小值点并不是对应于源的真实入射方向，所以用神经网络来求解也不会得到正确的结果。

同时，我们也看到 Hopfield 优化网络用于解决优化问题上本身存在着难以克服的缺点，它实现的是最速梯度下降法，因此不能保证收敛到能量函数的最小值点。虽然目前已提出了很多模拟退火方法来使得网络尽可能收敛到全局最小点，但效果并不是很理想<sup>[7]</sup>，这是 Hopfield 优化网络在解决优化问题上所面临的困难之一。

另外，对于某些问题来说，神经元的个数不能太多，否则连接矩阵将非常庞大而无法实现，这就限制了所能解决的问题的规模。

实际上每种神经网络都有其特有的优点和缺点,并不是对任何问题都是合适的,所以如何选择或构造一个适当的神经网络模型是很重要的。另外,如何把一个待解决的问题有效地与神经网络联系起来,也是一个很重要的问题。关于 DOA 估计运算量庞大的问题,我们已经通过其它的方法解决了,详细内容请参见文献[8,9]。

### 参 考 文 献

- [1] Schmidt R O. IEEE Trans. on AP, 1986, Ap-34(3): 276—280.
- [2] Stoica P, Nehorai A. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(5): 720—741.
- [3] Stoica P, Nehorai A. MUSIC, Maximum Likelihood, and Cramer-Rao Bound: Further Results and Comparisons. IEEE Proc. ASSP, 1989, 2605—2608.
- [4] Kung S Y, Diamantaras K I. A Neural Network Learning Algorithm for Adaptive Principal Component Extraction (APEX), Proc. ICASSP, 1990, Vol. 2, 861—864.
- [5] Lin Sheng, Yin Qin-Ye. Adaptive Principal Component Analysis Via Neural Networks. IEEE International Conference on Signal Processing, China: 1993, 1224—1227.
- [6] Jha S, Durrani T. IEEE Trans. on SMC, 1991, SMC-21(5): 1192—1201.
- [7] Sharman K C. Maximum Likelihood Parameter Estimation by Simulated Annealing. Proc. ICASSP, 1988, 2741—2744.
- [8] 林 盛,殷勤业. 信号处理学报,1994,10(2): 66—74.
- [9] 林 盛,殷勤业. 电子科学学刊,1994,17(1): 1—6.

## SIMPLE ANALYSIS OF THE NEURAL OPTIMIZATION METHOD FOR DOA ESTIMATION

Lin Sheng Yin Qinye

(Department of Information & Control Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

**Abstract** This paper gives a simple analysis of the method of using the Hopfield's optimization neural network to solve the DOA estimation problem. Although the method can avoid the eigendecomposition of data autocorrelation matrix and the orthogonality search of parameter space, theoretical analysis and simulation results show that the construction of the DOA cost function is incorrect on the condition that there is no constraint on the number of outputs of the network.

**Key words** Neural networks, DOA estimation, Spectral estimation