第 33 卷 第 6 期　　昆明理工大学学报(理工版)　http://www.kustjournal.com/　　Vol. 33　No. 6
2008 年 12 月　Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology)　Dec. 2008

一种基于 SPA 的不确定多属性决策的排序方法

黄英艺,蔡光程,刘文奇
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650093)

摘要:针对具有不确定性区间数的多属性决策问题,提出了一种基于集对分析的排序方法.通过介绍一个决策分析模型,把属性权重和决策矩阵均为区间数的多属性问题转化为区间数表示的决策方案综合评价值.然后把该区间评价值转化成联系度的形式,并给出排序准则.最后,通过算例验证该算法的有效性.

关键词:多属性决策;区间数;决策模型;集对分析
中图分类号:N94　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1007-855X(2008)06-0113-04

A Ranking Approach Based on Set - Pair - Analysis in Uncertain Multiple Attribute Decision Making Problems

HUANG Ying-yi, CAI Guang-cheng, LIU Wen-qi
(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, China)

Abstract: A set - pair - analysis based method is proposed for multiple attribute decision making problems with uncertain interval numbers. By introducing a decision model, the multiple attribute decision making problems in which both the attribute weight and the elements of decision matrix are interval numbers are transformed into synthetic appraisal values (in the form of interval numbers) of alternatives. The interval evaluations are thereafter transformed into connection degree. Two ranking criteria are then presented. Finally, an example is given to illustrate the proposed method.

Key words: multiple attribute decision making; interval number; decision model; set pair analysis

0 引 言

多属性决策,亦称为有限方案多目标决策.它是决策分析理论研究的重要内容,普遍应用于工程、技术、管理等领域.然而,由于决策人思维的模糊性、系统的复杂性和不确定性,绝大多数的决策问题的评价指标及权重信息是界于完全确知和完全不知之间,即决策信息往往以区间数形式给出[2,3].因此,对这类不确定性多属性决策问题的研究具有非常重要的理论意义和较高的实用价值.而目前众多关于这方面问题的研究文献大多局限于分别对权重与属性不确定性信息进行定量化分析,以计算求出决策方案的综合评价值.这样做往往导致整个不确定信息系统的有效信息丢失,并不能较客观地表达决策者的最终决策.

为了保证整个不确定信息系统所表征的信息完全,本文引入区间数的乘法运算,将不确定性权重信息与不确定性属性信息相结合起来,构造相应的线性模型用以求得各个决策方案的综合评价值(以区间形式体现),并基于集对分析(Set Pair Analysis,简称 SPA)理论[1],提出一种关于区间数评价值所相应的决策方案的排序方法.最后通过一个算例验证所给算法的有效性.

1 区间数乘法运算法则[4]

记实数轴上的区间 $a=[a^-,a^+]$,称 a 为区间数.若 $a=\{x \mid 0 \le a^- \le x \le a^+\}$,则称 a 为正区间;若

收稿日期:2008-06-24. **基金项目**:云南省自然科学基金项目(项目编号:2005F0025M);云南省教育厅基金项目(项目编号:2006L00001).

第一作者简介:黄英艺(1982-),男,硕士研究生.主要研究方向:决策分析. **E-mail**:hyy31@tom.com

$a^- = a^+$,该区间数退化为普通的实数.

乘法运算法则:

$a \cdot b = [a^-, a^+] \cdot [b^-, b^+] = [\min(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+), \max(a^- b^-, a^- b^+, a^+ b^-, a^+ b^+)]$

特别地,当 a 和 b 为正区间数时,有

$$a \cdot b = [a^-, a^+] \cdot [b^-, b^+] = [a^- b^-, a^+ b^+] \tag{1}$$

2 区间数多属性决策问题及模型

$S = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$:$m$ 个决策方案的集合.

$Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}$:$n$ 个属性(或指标)的集合. 假设这些属性是加性独立的.

$\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_n$:$n$ 个属性的区间权重向量,其中 $\tilde{\omega}_i = [(\omega_i^-, \omega_i^+](i = 1, 2, \cdots, n)$ 且 $0 \le \omega_i^- \le \omega_i^+ \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^- \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^+ \ge 1$.

$\tilde{R} = [\tilde{R}_{kj}]_{m \times n}$:带有区间数的决策矩阵,$\tilde{r}_{kj} = [r_{kj}^-, r_{kj}^+]$,其中表示第 k 个方案在第 j 个属性下的评价值. 假设 $\tilde{R}$ 已被规范化(即所有的属性转化为效益型属性),且 $r_{kj}^-, r_{kj}^+ \in [0,1]$, $\forall i, j$

3 集对分析(Set Pair Analysis)

集对分析是我国学者赵克勤于1989年提出的. 它的核心思想是把确定不确定视作一个确定不确定系统. 在这个确定不确定系统中,确定性与不确定性相互影响,相互制约,并在一定条件下相互转化. 根据文献[5],我们定义一个可以体现上述思想的确定不确定式子 $\mu = a + bi + cj$,称之为联系度.

定义1 设集合 A 和 B 构成一个具有 N 个特性的集对 $< A, B >$. 若其中有 S 个特性相同,P 个特性既不相同也不对立,Q 个特性相互对立($S + P + Q = N$),在不考虑权重情况下,$< A, B >$ 的联系度为:

$$\mu = a + bi + cj = \frac{S}{N} + \frac{P}{N} i + \frac{Q}{N} j$$

其中,$i \in [0,1]$, $j = -1$, $a + b + c = 1$. 显然,$\frac{S}{N} + \frac{P}{N} + \frac{Q}{N} = 1$.

定义2 比值 $\frac{a}{c}$ 称为联系度 μ 的集对势,记为 $\mathrm{shi}(\mu) = \frac{a}{c}$. 它表征了所分析的两个集合趋同趋势的程度.

4 区间数权重与区间数决策矩阵的处理

事实上,现今众多文献[6,7]对区间权重的处理方法基本上一致:它们都是根据区间决策矩阵来把区间权重向量转化为确定性权重向量. 这样做的不足之处,即在对权重做确定性定量处理的时候,丧失部分可能的权重信息,造成对整个决策问题的模糊性或不完全确定性的表述不完全.

因此,本文根据文献[4],对区间数权重与区间决策矩阵进行区间数乘法运算,从而保证了决策问题关于权重值和属性值的不确定性,即模糊性的完整性,更符合人们的思维习惯.

根据所给区间数多属性决策问题模型,我们假定决策者的目标就是从集合S中选择 $M(< m)$ 个最满意的方案或一个最好的方案 S^*,则由多属性决策分析的加权法及区间数乘法运算法,我们得到一个新的加权区间数决策矩阵 $\overline{\tilde{R}} = [\overline{\tilde{R}}_{kj}]_{m \times n}$,其中:

$$\overline{\tilde{r}}_{kj} = [\min(r_{kj}^- \cdot \omega_j^-, r_{kj}^- \cdot \omega_j^+, r_{kj}^+ \cdot \omega_j^-, r_{kj}^+ \cdot \omega_j^+), \max(r_{kj}^- \cdot \omega_j^-, r_{kj}^- \cdot \omega_j^+, r_{kj}^+ \cdot \omega_j^-, r_{kj}^+ \cdot \omega_j^+] \tag{2}$$

特别地,当 $\overline{\tilde{r}}_{kj} = [r_{kj}^-, r_{kj}^+]$ 和 $\tilde{\omega}_i = [\omega_i^-, \omega_i^+]$ 为正区间数时,有:

$$\overline{\tilde{r}}_{kj} = [r_{kj}^- \cdot \omega_i^-, r_{kj}^+ \cdot \omega_i^+] \tag{3}$$

5 加权区间数决策矩阵的排序方法

新的加权区间数决策矩阵根据简单加权法则,把权重不确定性与属性不确定性线性结合起来,在保证整个决策过程中的不确定信息的完整性方面较其他文献[4,6,7]来得优越.

因此,根据新的加权区间数决策矩阵,我们提出一种基于集对分析(SPA)的排序方法. 由新的加权区间数决策矩阵 $\overline{\tilde{R}} = [\overline{\tilde{r}_{kj}}]_{m\times n}$,可以发现每个属性的加权向量值仍是以区间数形式给出. 那么,我们借鉴文献[9],构造两个线性规划模型:

$$D_k^- = \min\{\sum_{j=1}^{n} r_{kj}^- \cdot \omega_j^- \mid \omega_j^- \le \omega_j \le \omega_j^+, j = 1,2,\cdots,n\} \tag{4}$$

$$D_k^+ = \max\{\sum_{j=1}^{n} r_{kj}^+ \cdot \omega_j^+ \mid \omega_j^- \le \omega_j \le \omega_j^+, j = 1,2,\cdots,n\} \tag{5}$$

由上述线性模型,我们得到如下定理:

定理 1　$D_k^- = \sum_{j=1}^{n} r_{kj}^- \cdot \omega_j^-; D_k^+ = \sum_{j=1}^{n} r_{kj}^+ \cdot \omega_j^+, k = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n.$

证明　采用反证法. 限于篇幅,这里不加以证明.

推论 1　$0 \le D_k^- \le 1, D_k^- \le D_k^+, k = 1,2,\cdots,m.$

现我们考虑每一个决策方案的综合评价值(呈区间数形式),令其形式为 $d_k = [d_k^-, d_k^+]$, $k = 1,2,\cdots,m$. 其中 $0 \le d_k^- \le d_k^+ \le 1$.

定理 2　$$d_k^- = D_k^-, d_k^+ = \begin{cases} 1, D_k^+ \ge 1 \\ D_k^+, \text{其他} \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots,m. \tag{6}$$

根据文献[7]我们给出基于集对分析的决策准则:假定所有决策方案的综合评价值 d_k 都是客观存在的定值,且在区间$[d_k^-, d_k^+]$上均匀分布,同时假定每个区间数综合评价值的理想值即为"1".

因此,由我们之前所介绍的集对分析(SPA)思想构造如下的集对联系度式子,用以表示综合评价值与理想值"1"之间的联系关系:

$$\mu(d_k, [0,1]) = a_k + b_k i + c_k j \tag{7}$$

其中,$a_k = \dfrac{d_k^- - 0}{1 - 0} = d_k^-, b_k = \dfrac{d_k^+ - d_k^-}{1 - 0} = d_k^+ - d_k^-, c_k = \dfrac{1 - d_k^+}{1 - 0}, i \in (0,1), j = 1.$

根据 3 节中定义 2 和 5 节中定理 2,我们给出如下决策方案的排序准则:

如果 $\mathrm{shi}(\mu, [0,1]) = \dfrac{a_k}{c_k}$ 值越大,说明所对应的方案更符合决策要求.

特别地,当 $d_k^+ = 1$ 时,shi 值趋于无穷大,此时仅比较相应的 a_k 值的大小.

6 算 法

Step 1　根据式(3)式将决策矩阵 $\tilde{R}$ 转化为加权的区间数决策矩阵 $\overline{\tilde{R}} = [\overline{\tilde{r}_{kj}}]_{m\times n}$.

Step 2　根据 5 节中定理 2 将加权的区间数决策矩阵转化为所有决策方案的综合评价值 $d_k = [d_k^-, d_k^+], k = 1,2,\cdots,m$.

Step 3　根据式(7)式计算每个方案的综合评价值与理想值"1"的联系度,并依据所给的排序准则进行排序.

说明:通过构造加权区间数决策矩阵,并基于集对分析提出一种新的排序方法. 但是当面对大量决策方案时,相比较于文献[9],我们提出的方法明显减少了分别对不同决策方案进行线性规划模型的多次编程求解的繁琐,在尽量保证不确定信息完整前提下,进一步简化了方案决策的过程. 最后,我们用一个算例,验证该算法的可行性.

7 算 例

考虑一个大学的学院评估问题,通常采用教学、科研和服务这三个属性作为评估指标.设有5个学院(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5)将被评估.表1和表2分别给出了属性的权重和决策矩阵[9].

表1 属性及区间数权重向量

Tab.1 Attribute and the weight with interval numbers

Q_1 教学	Q_2 科研	Q_3 服务
[0.335,0.3755]	[0.3009,0.3138]	[0.3194,0.3363]

表2 区间数决策矩阵

Tab.2 Interval number of decision making matrix

S_i	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	[0.214,0.220]	[0.166,0.178]	[0.184,0.190]
S_2	[0.206,0.225]	[0.220,0.229]	[0.182,0.191]
S_3	[0.195,0.204]	[0.192,0.198]	[0.220,0.231]
S_4	[0.181,0.190]	[0.195,0.205]	[0.185,0.195]
S_5	[0.175,0.184]	[0.193,0.201]	[0.201,0.211]

根据算法Step1和Step2,我们计算求得每个学院的综合评价值为:

$d_{S_1} = [0.1804, 0.2024]$;

$d_{S_2} = [0.1933, 0.2206]$;

$d_{S_3} = [0.1934, 0.2164]$;

$d_{S_4} = [0.1784, 0.2016]$;

$d_{S_5} = [0.1809, 0.2031]$.

再根据Step3计算求出每个学院的集对势分别为:

$\mathrm{shi}(\mu(S_1,1)) = 0.2262$, $\mathrm{shi}(\mu(S_2,1)) = 0.2480$, $\mathrm{shi}(\mu(S_3,1)) = 0.2468$, $\mathrm{shi}(\mu(S_4,1)) = 0.2234$, $\mathrm{shi}(\mu(S_5,1)) = 0.2270$.

根据排序准则,显然:$S_2 > S_3 > S_5 > S_1 > S_4$.

与文献[9]排序结果一致.但是本文的算法计算简单方便.

7 结束语

本文针对权重和属性均为具有不确定性的区间数形式的多属性决策问题,提出一种基于保证权重与属性的不确定性(或模糊性)信息的完整性,通过区间数运算法则,求出每个决策方案的综合评价值(区间数形式),并借鉴了集对分析的思想,将每个方案的综合评价值转化为与理想值“1”的集对联系度关系,分别求出它们的集对势(shi),并提出一个排序准则.最后通过一个算例,验证该算法的可行性与优势性.

参考文献:

[1] 赵克勤.集对分析及其初步应用[M].杭州:浙江科学技术出版社,2000.

[2] Gao Fengji, Wenying Z. Multiple Attribute Decision Which Power Importance be Incomplete Defined,MCDM:Theory and Applications[C]. SCI – TECH Information Service,1995.

[3] 张吉军,刘家才.区间数多指标决策问题的决策方法研究[J].预测,2002,21(1):73 – 75.

[4] 徐玖平,吴巍.多属性决策的理论方法[M].北京:清华大学出版社,2006.

[5] 赵克勤,宣爱理.集对论——一种新的不确定性理论方法与应用[J].系统工程,1996,(1):18 – 23.

[6] 徐泽水.基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J].控制与决策,2001,16(增刊):818 – 821.

[7] 叶跃祥,糜仲春.一种基于集对分析的区间多属性决策方法[J].系统工程与电子技术,2006,(9):1344 – 1347.

[8] Hwang C L, Yoon K. Multiple Attribute Decision Making, Springer – Verlag, Berlin,Heidelberg New York,1981.

[9] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. European Journal of Operational Research,1996,96:379 – 386.