内蒙古大学理工学院数学系

数学分析（三）

主　讲　孙 炯 教 授

习题课　贺 飞 讲 师

电话：0471-4992491（H），13947103671
Emai：masun@imu.edu.cn

向量值函数

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数,

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数，

是一元函数的另一种推广：多个因变量 (x 和 y)按某种规律，随自变量t的变化而相应变化.

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数，

是一元函数的另一种推广：多个因变量 (x 和 y)按某种规律，随自变量t的变化而相应变化.

设D是$\mathbf{R}^n$上的点集，D到$\mathbf{R}^m$的映射

$$f: \ D \to \mathbf{R}^m$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数,

是一元函数的另一种推广：多个因变量 (x 和 y)按某种规律, 随自变量t的变化而相应变化.

设D是$\mathbf{R}^n$上的点集, D到$\mathbf{R}^m$的映射

$$f: \ D \to \mathbf{R}^m$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为$\boldsymbol{n}$元$\boldsymbol{m}$维向量值函数(或多元函数组), 记为$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数,

是一元函数的另一种推广：多个因变量 (x 和 y)按某种规律, 随自变量t的变化而相应变化.

设D是$\mathbf{R}^n$上的点集, D到$\mathbf{R}^m$的映射

$$f: \ D \to \mathbf{R}^m$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为$\boldsymbol{n}$元$\boldsymbol{m}$维向量值函数(或多元函数组), 记为$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

D 称为 $\boldsymbol{f}$的定义域,

向量值函数

平面解析几何中的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

就是二维的向量值函数,

是一元函数的另一种推广：多个因变量 (x 和 y)按某种规律, 随自变量t的变化而相应变化.

设D是$\mathbf{R}^n$上的点集, D到$\mathbf{R}^m$的映射

$$f: \ D \to \mathbf{R}^m$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为n元m维向量值函数(或多元函数组), 记为$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

D 称为 $\boldsymbol{f}$的定义域,

$\Re = \{\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为$\boldsymbol{f}$的值域

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,
称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标(或分量)函数,

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,
称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标(或分量)函数,
即: $\boldsymbol{f}$可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2 = f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad \cdots\cdots \\ z_m = f_m(\boldsymbol{x}), \end{cases} \boldsymbol{x} \in D.$$

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,
称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标(或分量)函数,
即: $\boldsymbol{f}$可以表达为分量形式

$$\left\{\begin{array}{l} z_1=f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2=f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad\cdots\cdots \\ z_m=f_m(\boldsymbol{x}), \end{array}\right. \quad \boldsymbol{x}\in D.$$

$\boldsymbol{f}$又可表示为

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m).$$

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,
称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标(或分量)函数,
即：$\boldsymbol{f}$可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1=f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2=f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad\cdots\cdots \\ z_m=f_m(\boldsymbol{x}), \end{cases} \boldsymbol{x}\in D.$$

$\boldsymbol{f}$又可表示为

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m).$$

注：向量值函数是从 R^n 到 R^m 的一个映射。

显然每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i=f_i(\boldsymbol{x})$,
称为$\boldsymbol{f}$的第i个坐标(或分量)函数,
即: $\boldsymbol{f}$可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1=f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2=f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad\cdots\cdots \\ z_m=f_m(\boldsymbol{x}), \end{cases} \boldsymbol{x}\in D.$$

$\boldsymbol{f}$又可表示为

$$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m).$$

注: 向量值函数是从 R^n 到 R^m 的一个映射。
多元函数是 $m=1$ 的特殊情形.

例11.2.10 设映射

$$\boldsymbol{f}\,[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3,$$
$$(r,\theta)\mapsto(x,y,z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x=x(r,\theta)=r\cos\theta, \\ y=y(r,\theta)=r\sin\theta,\ (r\in\ [0,+\infty),\theta\in\ [0,2\pi]), \\ z=z(r,\theta)=r, \end{cases}$$

例11.2.10　设映射

$$\boldsymbol{f}\,[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3,$$
$$(r,\theta)\mapsto(x,y,z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x=x(r,\theta)=r\cos\theta, \\ y=y(r,\theta)=r\sin\theta,\ (r\in\ [0,+\infty),\theta\in\ [0,2\pi]), \\ z=z(r,\theta)=r, \end{cases}$$

这是二元三维向量值函数,

例11.2.10　设映射

$$\boldsymbol{f}\,[0,+\infty)\times[0,2\pi]\to\mathbf{R}^3,$$
$$(r,\theta)\mapsto(x,y,z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x=x(r,\theta)=r\cos\theta, \\ y=y(r,\theta)=r\sin\theta,\ (r\in\ [0,+\infty),\theta\in\ [0,2\pi]), \\ z=z(r,\theta)=r, \end{cases}$$

这是二元三维向量值函数,
它是三维空间的一张半圆锥面.

定义11.2.2′（极限的定义）

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

定义11.2.2$'$（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}:\ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

定义11.2.2$'$（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D \backslash \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A} | < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\ | < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

那么称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的**极限**.

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}:\ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\ | < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

那么称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的**极限**.

并称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**收敛**. 记为

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

那么称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的**极限**.

并称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**收敛**. 记为

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \text{ 或 } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0)$$

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D \backslash \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$\mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A} \mid < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

那么称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的**极限**.

并称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**收敛**. 记为

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \text{ 或 } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0)$$

注：极限的定义与前面的类似。

定义11.2.2′（极限的定义）

设 D 是$\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$,

$\boldsymbol{f}: \ D\backslash\{\boldsymbol{x}_0\} \rightarrow \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数).

如果存在m维向量$\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}\ | < \varepsilon$$

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$成立,

那么称$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时的**极限**.

并称$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**收敛**. 记为

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \text{ 或 } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{x}_0)$$

注：极限的定义与前面的类似。

区别的仅仅是: 距离分别是定义域 R^n 和值域 R^m 中的距离.

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$.

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$.

$\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果$\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

定义11.2.4$'$　设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}:\quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果$\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在D上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在D上连续.

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果$\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在D上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在D上连续.

这时称映射$\boldsymbol{f}$为D上的**连续映射**.

定义11.2.4$'$ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在D上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在D上连续.

这时称映射$\boldsymbol{f}$为D上的**连续映射**.

定理11.2.2 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 那么

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在D上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在D上连续.

这时称映射$\boldsymbol{f}$为D上的**连续映射**.

定理11.2.2 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 那么映射 $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续的充分必要条件为

定义11.2.4′ 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

那么称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在D上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在D上连续.

这时称映射$\boldsymbol{f}$为D上的**连续映射**.

定理11.2.2 设D是$\mathbf{R}^n$上的开集, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. 那么映射 $\boldsymbol{f}: \quad D \to \mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续的充分必要条件为函数$f_1, f_2, \cdots, f_m$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

即我们可以利用坐标函数来判断 f 的连续性.

即我们可以利用坐标函数来判断 f 的连续性.

也就是说, 映射(向量值函数)的连续性可以归结到它的坐标函数的连续性上去.

即我们可以利用坐标函数来判断 f 的连续性.

也就是说, 映射(向量值函数)的连续性可以归结到它的坐标函数的连续性上去.

即：向量函数的问题转为普通的多元函数.

即我们可以利用坐标函数来判断 f 的连续性.

也就是说, 映射(向量值函数)的连续性可以归结到它的坐标函数的连续性上去.

即：向量函数的问题转为普通的多元函数.

证 这可由不等式

$$
\begin{aligned}
|f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}_0)| \leq |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_0))^2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_0)|, \ j = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

直接得到.

即我们可以利用坐标函数来判断 f 的连续性.

也就是说, 映射(向量值函数)的连续性可以归结到它的坐标函数的连续性上去.

即：向量函数的问题转为普通的多元函数.

证 这可由不等式

$$
\begin{aligned}
|\, f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}_0)\,| &\le |\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_0))^2} \\
&\le \sum_{i=1}^{m} |\, f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_0)\,|, \ \ j = 1, 2, \cdots, m
\end{aligned}
$$

直接得到.

(在第一节也用过这个不等式)

例11.2.11 设$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid a < u < b, c < v < d\}$. 映射

Home Page

Title Page

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例11.2.11 设$D=\{(u,v)\in \mathbf{R}^2 \mid a<u<b, c<v<d\}$. 映射

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: D &\to \mathbf{R}^3, \\ (u,v) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned}$$

是二元三维向量值函数,

例11.2.11 设$D=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid a<u<b, c<v<d\}$. 映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} : D &\rightarrow \mathbf{R}^3,\\ (u,v) &\mapsto (x,y,z)\end{aligned}$$

是二元三维向量值函数,

它写成分量形式就是

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

例11.2.11 设$D=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2 \mid a<u<b, c<v<d\}$. 映射

$$\boldsymbol{f}: D\to\mathbf{R}^3,$$
$$(u,v)\mapsto(x,y,z)$$

是二元三维向量值函数,

它写成分量形式就是

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

如果 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 和 $z(u,v)$ 都是 D 上的连续函数，从几何上看, 这就是空间上连续曲面的一般方程.

例11.2.11 设$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid a < u < b, c < v < d\}$. 映射

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} : D &\to \mathbf{R}^3, \\ (u,v) &\mapsto (x,y,z) \end{aligned}$$

是二元三维向量值函数,

它写成分量形式就是

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

如果 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 和 $z(u,v)$ 都是 D 上的连续函数, 从几何上看, 这就是空间上连续曲面的一般方程.

例如：地球上的每一点可以用它的经纬度确定下来。

向量值函数的复合函数

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}:\ D \to \mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}:\ \Omega \to \mathbf{R}^m$为映射.

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}: \ D \to \mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}: \ \Omega \to \mathbf{R}^m$为映射.

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足$\mathfrak{R}_g \subset \Omega$, 则可以定义复合映射

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}:\ D \to \mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}:\ \Omega \to \mathbf{R}^m$为映射.

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足$\mathfrak{R}_g \subset \Omega$, 则可以**定义复合映射**

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} D \to \mathbf{R}^m,$$

$$\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})).$$

Home Page
Title Page
Page 11 of 26
Go Back
Full Screen
Close
Quit

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}: \ D \to \mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}: \ \Omega \to \mathbf{R}^m$为映射.

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足$\mathfrak{R}_g \subset \Omega$, 则可以**定义复合映射**

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} D \to \mathbf{R}^m,$$

$$\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})).$$

关于复合映射的连续性有下述结论:

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}:\ D\to\mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}:\ \Omega\to\mathbf{R}^m$为映射.

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足$\mathfrak{R}_g\subset\Omega$, 则可以定义复合映射

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g} D\to\mathbf{R}^m,$$
$$\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})).$$

关于复合映射的连续性有下述结论:

定理11.2.3 如果$\boldsymbol{g}$在D上连续, $\boldsymbol{f}$在Ω上连续,

向量值函数的复合函数

设Ω是$\mathbf{R}^n$上的开集, D为$\mathbf{R}^m$上的开集.

$\boldsymbol{g}: \ D \to \mathbf{R}^n$与$\boldsymbol{f}: \ \Omega \to \mathbf{R}^m$为映射.

若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足$\mathfrak{R}_g \subset \Omega$, 则可以定义复合映射

$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} D \to \mathbf{R}^m,$$

$$\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})).$$

关于复合映射的连续性有下述结论:

定理11.2.3 如果$\boldsymbol{g}$在D上连续, $\boldsymbol{f}$在Ω上连续,
那么复合映射$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$在$D$上连续.

§ 3 连续函数的性质

§ 3　连续函数的性质

紧集上的连续映射

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况: 闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标: 我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况: 闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

(闭区域上连续函数的性质)

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标: 我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况: 闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

(闭区域上连续函数的性质)

更一般的: 闭的区域 $\Longrightarrow$ 有界的闭集

§3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况：闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

（闭区域上连续函数的性质）

更一般的：闭的区域 $\Longrightarrow$ 有界的闭集

（有界闭集上连续函数的性质）

§3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况: 闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

（闭区域上连续函数的性质）

更一般的：闭的区域 $\Longrightarrow$ 有界的闭集

（有界闭集上连续函数的性质）

而有界闭集就是紧集（定理11.1.9）

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况：闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

（闭区域上连续函数的性质）

更一般的：闭的区域 $\Longrightarrow$ 有界的闭集

（有界闭集上连续函数的性质）

而有界闭集就是紧集（定理11.1.9）

（紧集上连续函数的性质）

§ 3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

目标：我们将闭区间上一元连续函数的重要性质推广到多元连续函数.

二元的情况: 闭区间 $\Longrightarrow$ 闭的区域

（闭区域上连续函数的性质）

更一般的：闭的区域 $\Longrightarrow$ 有界的闭集

（有界闭集上连续函数的性质）

而有界闭集就是紧集（定理11.1.9）

（紧集上连续函数的性质）

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap K$成立,

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}:\ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap K$成立,

则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续.

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \; K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap K$成立,

则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在K上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在K上连续.

当$\boldsymbol{x}_0$是K的内点时, 这就是原来的定义;

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap K$成立,

则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在K上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在K上连续.

当$\boldsymbol{x}_0$是K的内点时, 这就是原来的定义;

当$\boldsymbol{x}_0$是K的边界点时, 只要求$\boldsymbol{x}_0$ 的δ领域中属于K的那些点满足不等式

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| < \varepsilon.$$

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0 \in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| < \varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \bigcap K$成立,

则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在K上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在K上连续.

当$\boldsymbol{x}_0$是K的内点时, 这就是原来的定义;

当$\boldsymbol{x}_0$是K的边界点时, 只要求$\boldsymbol{x}_0$ 的δ领域中属于K的那些点满足不等式

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,| < \varepsilon.$$

这与在 $[a, b]$ 上一元函数在 a 点的单侧连续定义类似.

下面的定义将连续的概念扩展到边界（不仅仅在内点）。

定义11.3.1 设点集 $K\subset \mathbf{R}^n$,

$\boldsymbol{f}:\ K\to \mathbf{R}^m$为映射(向量值函数), $\boldsymbol{x}_0\in K$.

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,|<\varepsilon$$

(即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\varepsilon)$)

对于所有$\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\bigcap K$成立,

则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续.

如果映射$\boldsymbol{f}$在K上每一点连续, 就称$\boldsymbol{f}$在K上连续.

当$\boldsymbol{x}_0$是K的内点时, 这就是原来的定义;

当$\boldsymbol{x}_0$是K的边界点时, 只要求$\boldsymbol{x}_0$ 的δ领域中属于K的那些点满足不等式

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\,|<\varepsilon.$$

这与在 $[a,b]$ 上一元函数在 a 点的单侧连续定义类似.

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$为$\boldsymbol{f}(K)$的任意一个无限点集,

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$为$\boldsymbol{f}(K)$的任意一个无限点集,

对于每个$\boldsymbol{y}_k$,

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$为$\boldsymbol{f}(K)$的任意一个无限点集,

对于每个$\boldsymbol{y}_k$,

任取一个满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$ 的 $\boldsymbol{x}_k \in K$, $k = 1, 2, \cdots$,

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$为$\boldsymbol{f}(K)$的任意一个无限点集,

对于每个$\boldsymbol{y}_k$,

任取一个满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$ 的 $\boldsymbol{x}_k \in K$, $k = 1, 2, \cdots$,

则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$为紧集K中的无限点集, 它必有聚点 a 属于K,

定理11.3.1 连续映射将紧集映射成紧集.

证 设K是$\mathbf{R}^n$中的紧集,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射. 记$K$的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

我们要证明的是 $\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集。

由定理11.1.10知, 只要证明$\boldsymbol{f}(K)$中的任意一个无限点集必有聚点属于$\boldsymbol{f}(K)$.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$为$\boldsymbol{f}(K)$的任意一个无限点集,

对于每个$\boldsymbol{y}_k$,

任取一个满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$ 的 $\boldsymbol{x}_k \in K$, $k = 1, 2, \cdots$,

则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$为紧集K中的无限点集, 它必有聚点 a 属于K,

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_l}=\boldsymbol{a}\in K.$$

由f 在a点的连续性得

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在a点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在a点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a} \in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{a}$点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a} \in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

因此, $\boldsymbol{f}(K)$是紧集.

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由f 在a点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a} \in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

因此, $\boldsymbol{f}(K)$是紧集.

因为在任给的 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 中有聚点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 属于 $\{\boldsymbol{y}_k\}$.

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在a点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a} \in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

因此, $\boldsymbol{f}(K)$是紧集.

因为在任给的 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 中有聚点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 属于 $\{\boldsymbol{y}_k\}$.

定理说明连续函数把紧集映成紧集。

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{x}_{k_l}=\boldsymbol{a}\in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{a}$点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{y}_{k_l}=\lim_{l\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a}\in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

因此, $\boldsymbol{f}(K)$是紧集.

因为在任给的 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 中有聚点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 属于 $\{\boldsymbol{y}_k\}$.

定理说明连续函数把紧集映成紧集。

紧集是一个拓扑性质，在连续变换下保持不变

由聚点存在的充分必要条件，存在$\{\boldsymbol{x}_k\}$的子列$\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$满足

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由$\boldsymbol{f}$ 在a点的连续性得

$$\lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\boldsymbol{y}_k$的一个聚点,

因为 $\boldsymbol{a} \in K$, 所以 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 显然属于$\boldsymbol{f}(K)$.

因此, $\boldsymbol{f}(K)$是紧集.

因为在任给的 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 中有聚点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 属于 $\{\boldsymbol{y}_k\}$.

定理说明连续函数把紧集映成紧集。

紧集是一个拓扑性质，在连续变换下保持不变

topologe: Study of geometrical properties and spatial relations unaffected by continuous change of shape or size of figures.

定理11.3.2(有界性定理)

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(x)$在K上有界.

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(x)$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(x)$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$f(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(x)$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$f(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.3(最值定理)

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(\boldsymbol{x})$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$\boldsymbol{f}(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.3(最值定理)

设$f(\boldsymbol{x})$是紧集$K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

Home Page

Title Page

Page 16 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(x)$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(x)$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$f(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.3(最值定理)

设$f(x)$是紧集$K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则它在K上必能取到最大值和最小值,

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(\boldsymbol{x})$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$\boldsymbol{f}(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.3(最值定理)

设$f(\boldsymbol{x})$是紧集$K \subset \mathbf{R}^n$上的连续函数,

则它在K上必能取到最大值和最小值,

即存在$\xi_1, \xi_2 \in K$, 使得对于一切$x \in K$成立

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2).$$

证明：$\boldsymbol{f}(K)$是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭集,

定理11.3.2(有界性定理)

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$上的连续函数,

则$f(\boldsymbol{x})$在K上有界.

证明：由于R中的紧集就是有界闭集,

由定理11.3.1知：$\boldsymbol{f}(K)$是紧集，所以有界.

定理11.3.3(最值定理)

设$f(\boldsymbol{x})$是紧集$K\subset\mathbf{R}^n$上的连续函数,

则它在K上必能取到最大值和最小值,

即存在$\xi_1,\xi_2\in K$, 使得对于一切$x\in K$成立

$$f(\xi_1)\le f(x)\le f(\xi_2).$$

证明：$\boldsymbol{f}(K)$是 R 中的有界闭集，

所以有最大最小值

一致连续

定义11.3.2 设K是$\mathbf{R}^n$中点集, $\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射.

一致连续

定义11.3.2 设K是$\mathbf{R}^n$中点集, $\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为映射.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

一致连续

定义11.3.2 设K是$\mathbf{R}^n$中点集, $\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为映射.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\,| < \varepsilon$$

一致连续

定义11.3.2 设K是$\mathbf{R}^n$中点集, $\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为映射.

如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$$

对于 K 中所有满足 $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| < \delta$ 的 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ 成立,

一致连续

定义11.3.2 设K是$\mathbf{R}^n$中点集, $\boldsymbol{f}:\ K\to\mathbf{R}^m$为映射.

如果对于任意给定的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\,|<\varepsilon$$

对于 K 中所有满足 $|\,\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\,|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}''$ 成立, 则称$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上**一致连续**.

和一元函数一样, 紧集上的连续映射一致连续.

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $f: \ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集,

$\boldsymbol{f}: \; K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集,
$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.
那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.
证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,
因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集,

$\boldsymbol{f}: \ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,

使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}, \delta_a) \bigcap K$ 时,

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,

使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}, \delta_a) \bigcap K$ 时,

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,

使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}, \delta_a) \bigcap K$ 时,

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然$\{O(\boldsymbol{a}, \frac{\delta_a}{2}), \boldsymbol{a} \in K\}$ 是K的开覆盖.

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $\boldsymbol{f}:\ K\to\mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon>0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

因此对于任意的$\boldsymbol{a}\in K$, 存在$\delta_a>0$,

使得当 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a},\delta_a)\bigcap K$ 时,

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然$\{O(\boldsymbol{a},\frac{\delta_a}{2}),\boldsymbol{a}\in K\}$ 是K的开覆盖.

由于K是紧集, 因此存在其中有限个开集

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $\boldsymbol{f}:\ K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.
那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,
因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,
使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}, \delta_a) \bigcap K$ 时,

$$|\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\,| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然$\{O(\boldsymbol{a}, \frac{\delta_a}{2}), \boldsymbol{a} \in K\}$ 是K的开覆盖.
由于K是紧集, 因此存在其中有限个开集
$O(\boldsymbol{a}_1, \frac{\delta_{a_1}}{2}), O(\boldsymbol{a}_2, \frac{\delta_{a_2}}{2}), \cdots, O(\boldsymbol{a}_m, \frac{\delta_{am}}{2})$覆盖了$K$.

定理11.3.4(一致连续性定理) 设K 是$\mathbf{R}^n$ 中紧集, $\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$为连续映射.

那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的$\varepsilon > 0$, 由于$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$K$上连续,

因此对于任意的$\boldsymbol{a} \in K$, 存在$\delta_a > 0$,

使得当 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a}, \delta_a) \bigcap K$ 时,

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然$\{O(\boldsymbol{a}, \frac{\delta_a}{2}), \boldsymbol{a} \in K\}$ 是K的开覆盖.

由于K是紧集, 因此存在其中有限个开集

$O(\boldsymbol{a}_1, \frac{\delta_{a_1}}{2}), O(\boldsymbol{a}_2, \frac{\delta_{a_2}}{2}), \cdots, O(\boldsymbol{a}_m, \frac{\delta_{a_m}}{2})$覆盖了$K$.

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\leq j\leq m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

记 $\delta=\frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}\{\delta_{a_j}\}>0$,

那么对于 K 中满足 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\leq j\leq m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

那么对于 K 中满足 $|\ \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\ | < \delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

不妨设$\boldsymbol{x}' \in O(\boldsymbol{a}_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})(1 \leq t \leq m)$, 则有

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

那么对于 K 中满足 $|\,\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''\,| < \delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

不妨设$\boldsymbol{x}' \in O(\boldsymbol{a}_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})(1 \le t \le m)$, 则有

$$|\,\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{a}_t\,| \le |\,\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'\,| + |\,\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_t\,| < \frac{1}{2}\delta_{a_t} + \frac{1}{2}\delta_{a_t} = \delta_{a_t},$$

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

那么对于 K 中满足 $|\, \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' \,| < \delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

不妨设$\boldsymbol{x}' \in O(\boldsymbol{a}_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})(1 \le t \le m)$, 则有

$$|\, \boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{a}_t \,| \le |\, \boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}' \,| + |\, \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_t \,| < \frac{1}{2}\delta_{a_t} + \frac{1}{2}\delta_{a_t} = \delta_{a_t},$$

于是成立$|\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t) \,| < \frac{\varepsilon}{2}$.

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

那么对于 K 中满足 $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| < \delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

不妨设$\boldsymbol{x}' \in O(\boldsymbol{a}_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})(1 \le t \le m)$, 则有

$$|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{a}_t| \le |\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'| + |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_t| < \frac{1}{2}\delta_{a_t} + \frac{1}{2}\delta_{a_t} = \delta_{a_t},$$

于是成立$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')| &\le |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

记 $\delta = \frac{1}{2}\min_{1\le j\le m}\{\delta_{a_j}\} > 0$,

那么对于 K 中满足 $|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''| < \delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$,

不妨设$\boldsymbol{x}' \in O(\boldsymbol{a}_t, \frac{\delta_{a_t}}{2})(1 \le t \le m)$, 则有

$$|\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{a}_t| \le |\boldsymbol{x}'' - \boldsymbol{x}'| + |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_t| < \frac{1}{2}\delta_{a_t} + \frac{1}{2}\delta_{a_t} = \delta_{a_t},$$

于是成立$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')| &\le |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由定义, $\boldsymbol{f}$在K上一致连续.

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集,

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1] \to \mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中,

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1] \to \mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中, 即满足$\gamma([0,1]) \subset S$, 则称γ为S中的道路,

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1] \to \mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中,

即满足$\gamma([0,1]) \subset S$, 则称γ为S中的道路, $\gamma(0)$与$\gamma(1)$分别称为道路的起点与终点.

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1] \to \mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中,

即满足$\gamma([0,1]) \subset S$, 则称γ为S中的道路,

$\gamma(0)$与$\gamma(1)$分别称为道路的起点与终点.

若S中的任意两点$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$之间, 都存在$S$ 中满足$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$的道路$\gamma$,

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是 “连成一体” 的点集,

在高维 “连成一体” 的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1]\to\mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中,

即满足$\gamma([0,1])\subset S$, 则称γ为S中的道路,

$\gamma(0)$与$\gamma(1)$分别称为道路的起点与终点.

若S中的任意两点$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$之间, 都存在$S$ 中满足$\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$的道路$\gamma$,

则称S为(道路)连通的, 或称S为连通集.

连通集与连通集上的连续映射

在直线上, 区间实质上是“连成一体”的点集, 在高维“连成一体”的点集称为连通集.

定义11.3.3 设S是$\mathbf{R}^n$中点集, 若连续映射

$$\gamma[0,1]\to\mathbf{R}^n$$

的值域全部落在S中,

即满足$\gamma([0,1])\subset S$, 则称γ为S中的道路,

$\gamma(0)$与$\gamma(1)$分别称为道路的起点与终点.

若S中的任意两点$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$之间, 都存在$S$ 中满足$\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$的道路$\gamma$,

则称S为(道路)连通的, 或称S为连通集.

即：连通意味着 S 中任意两点可以用全部位于 S 中的曲线相联结(参见图11.3.1).

即：连通意味着 S 中任意两点可以用全部位于 S 中的曲线相联结(参见图11.3.1).

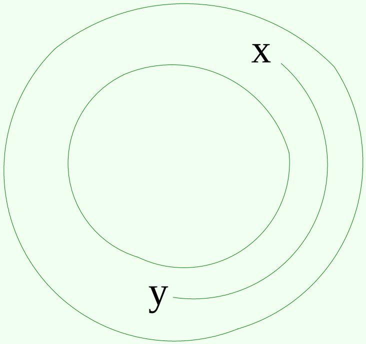

图11.3.1

注：1.**R**上的连通子集为区间,

即：连通意味着 S 中任意两点可以用全部位于 S 中的曲线相联结(参见图11.3.1).

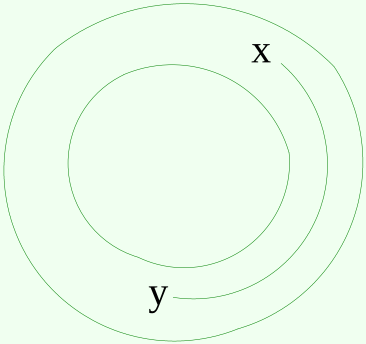

图11.3.1

注：1.**R**上的连通子集为区间,

2.**R**上的连通子集为紧集的充要条件为：

即：连通意味着 S 中任意两点可以用全部位于 S 中的曲线相联结(参见图11.3.1).

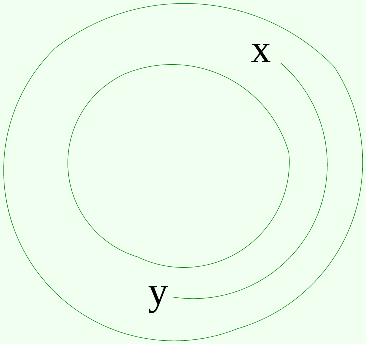

图11.3.1

注：1.**R**上的连通子集为区间,

2.**R**上的连通子集为紧集的充要条件为：

它是闭区间.

定义11.3.4 连通的开集称为(开)区域.

定义11.3.4 连通的开集称为(开)**区域**.

(开)区域的闭包称为**闭区域**.

定义11.3.4 连通的开集称为(开)区域.

(开)区域的闭包称为**闭区域**.

例如, 若$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 那么开球

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \big| \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \mid < r\}$$

是区域;

定义11.3.4 连通的开集称为(开)区域.

(开)区域的闭包称为**闭区域**.

例如, 若$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 那么开球

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \big| \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \mid < r\}$$

是区域;

集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

也是区域.

定义11.3.4 连通的开集称为(开)区域.

(开)区域的闭包称为**闭区域**.

例如, 若$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 那么开球

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \big| \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \mid < r\}$$

是区域;

集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

也是区域.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $f: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

Home Page

Title Page

Page 23 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射, 记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \,|\, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,
记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.
由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f} \circ \gamma = \boldsymbol{f}(\gamma(t)), t \in [0,1]$来说,

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f} \circ \gamma = \boldsymbol{f}(\gamma(t)), t \in [0,1]$来说,

有$\boldsymbol{f}(\gamma([0,1])) \subset \boldsymbol{f}(D)$, 即

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}:\ D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f} \circ \gamma = \boldsymbol{f}(\gamma(t)), t \in [0,1]$来说,

有$\boldsymbol{f}(\gamma([0,1])) \subset \boldsymbol{f}(D)$, 即

$$\boldsymbol{f} \circ \gamma[0,1] \to \boldsymbol{f}(D),$$

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}:\ D\to\mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m\big|\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{f}(D),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1]\to D\subset\mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f}\circ\gamma=\boldsymbol{f}(\gamma(t)),t\in[0,1]$来说,

有$\boldsymbol{f}(\gamma([0,1]))\subset\boldsymbol{f}(D)$, 即

$$\boldsymbol{f}\circ\gamma[0,1]\to\boldsymbol{f}(D),$$

且$\boldsymbol{f}(\gamma(0))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$及$\boldsymbol{f}(\gamma(1))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}:\ D\to\mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D)=\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^m\big|\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{f}(D),\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1]\to D\subset\mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f}\circ\gamma=\boldsymbol{f}(\gamma(t)),t\in[0,1]$来说,

有$\boldsymbol{f}(\gamma([0,1]))\subset\boldsymbol{f}(D)$, 即

$$\boldsymbol{f}\circ\gamma[0,1]\to\boldsymbol{f}(D),$$

且$\boldsymbol{f}(\gamma(0))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$及$\boldsymbol{f}(\gamma(1))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

即：它是 $\boldsymbol{f}(D)$, 中的一条道路.

定理11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设D是$\mathbf{R}^n$中的连通集, $\boldsymbol{f}: \ D \to \mathbf{R}^m$为连续映射,

记$\boldsymbol{f}$的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \big| \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D), \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$.

由D的连通性知, 存在连续映射

$$\gamma[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得$\gamma(0) = \boldsymbol{x}, \gamma(1) = \boldsymbol{y}$.

因此对连续映射$\boldsymbol{f} \circ \gamma = \boldsymbol{f}(\gamma(t)), t \in [0,1]$来说,

有$\boldsymbol{f}(\gamma([0,1])) \subset \boldsymbol{f}(D)$, 即

$$\boldsymbol{f} \circ \gamma[0,1] \to \boldsymbol{f}(D),$$

且$\boldsymbol{f}(\gamma(0)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$及$\boldsymbol{f}(\gamma(1)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.

即：它是 $\boldsymbol{f}(D)$, 中的一条道路.

由$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ 的任意性即知$\boldsymbol{f}(D)$是连通的.

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K \subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数.

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)
设$K\subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数. 那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K \subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数.
那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即： f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K \subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数.

那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即： f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

闭区间上定义的一元连续函数的性质:

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K\subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数. 那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即: f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

闭区间上定义的一元连续函数的性质:
有界、可以取到最大最小值、

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K\subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数.

那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即： f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

闭区间上定义的一元连续函数的性质：

有界、可以取到最大最小值、

可以取到任何中间值

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K\subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数. 那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即： f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

闭区间上定义的一元连续函数的性质：

有界、可以取到最大最小值、

可以取到任何中间值

闭区间上的连续函数是一致连续的

推论11.3.1连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理11.3.6(中间值定理)

设$K \subset \mathbf{R}^n$为连通的紧集, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是K上的连续函数. 那么$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$可取到它在$K$上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.

即： f 的值域是闭区间 $[m, M]$.

闭区间上定义的一元连续函数的性质：
有界、可以取到最大最小值、
可以取到任何中间值
闭区间上的连续函数是一致连续的
都推广到紧集合上定义的连续函数上。

平面有界闭区域上连续函数的性质

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0,\delta)$

使得：对于任何的 $y\in O(x_0,\delta)$, 都有

$$|\ f(y)-f(x)\ |<1$$

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$\mid f(y) - f(x) \mid < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

证明要点：因为函数值有界，所以存在上下确界 α, β,

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

证明要点：因为函数值有界，所以存在上下确界 α, β,

由上下确界的定义，存在 $y_n = f(x_n) \to \alpha$,

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

证明要点：因为函数值有界，所以存在上下确界 α, β,

由上下确界的定义，存在 $y_n = f(x_n) \to \alpha$,

由于 D 是紧的, 存在收敛的子列 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k} \to x_0$

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

证明要点：因为函数值有界，所以存在上下确界 α, β,

由上下确界的定义，存在 $y_n = f(x_n) \to \alpha$,

由于 D 是紧的, 存在收敛的子列 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k} \to x_0$

由函数的连续性推出 $f(x) = \alpha$.

平面有界闭区域上连续函数的性质

1. **有界性**

证明要点：对于闭区域上 D 的任何一点 x,

存在一个开邻域 $O(x_0, \delta)$

使得：对于任何的 $y \in O(x_0, \delta)$, 都有

$$| f(y) - f(x) | < 1$$

由于 D 是紧的，所以存在有限覆盖，

由于这些小球的个数是有限的，推出 $f(x)$ 有界.

2. **可以取到最大（小）值**

证明要点：因为函数值有界，所以存在上下确界 α, β，

由上下确界的定义，存在 $y_n = f(x_n) \to \alpha$,

由于 D 是紧的, 存在收敛的子列 x_{n_k}, 使得 $x_{n_k} \to x_0$

由函数的连续性推出 $f(x) = \alpha$.

类似的有 $\exists x_1$，$f(x_1) = \beta$.

3. 中间值定理

3. 中间值定理

设 $f(a) > 0,\ \ f(b) < 0$, 要证明存在 $\xi \in D$, 使得： $f(\xi) = 0$.

3. **中间值定理**

设 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, 要证明存在 $\xi \in D$, 使得： $f(\xi) = 0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 $a,\ b$两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0$, $f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分， .... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0$, $f(b)<0$, 要证明存在 $\xi \in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi \in [a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 $a,\ b$两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分， .... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

证法二：用反证法，由定义找出两个点列 $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, 且

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

证法二：用反证法，由定义找出两个点列 $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, 且

$$|\ x_n^1-x_n^2\ |<\frac{1}{n}$$

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

证法二：用反证法，由定义找出两个点列 $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, 且

$$|\ x_n^1-x_n^2\ |<\frac{1}{n}$$

$$|\ f(x_n^1)-f(x_n^2)\ |>\varepsilon_o$$

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0,\ \ f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 $a,\ b$两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

证法二：用反证法，由定义找出两个点列 $\{x_1\},\ \{x_2\}$, 且

$$|\ x_n^1-x_n^2\ |<\frac{1}{n}$$

$$|\ f(x_n^1)-f(x_n^2)\ |>\varepsilon_o$$

由Weierstrass 定理找出共同收敛到 x_0 的子列，

3. **中间值定理**

设 $f(a)>0$, $f(b)<0$, 要证明存在 $\xi\in D$, 使得： $f(\xi)=0$.

由于区域是连通的，所以存在折线联结 a, b两点，

把折线按长度二等分, 如分点的函数值等于零，已证.

否则在其中选取新的区间，使两点的函数值异号，

再二等分，.... ,形成闭区域套，由闭区域套定理，

推出: 存在 $\xi\in[a,b]$, 且： $f(\xi)=0$.

4. **闭区间上的连续函数一致连续**

证法一：同书上, 用有限覆盖定理;

证法二：用反证法，由定义找出两个点列 $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, 且

$$|\ x_n^1-x_n^2\ |<\frac{1}{n}$$

$$|\ f(x_n^1)-f(x_n^2)\ |>\varepsilon_o$$

由Weierstrass 定理找出共同收敛到 x_0 的子列，

再由函数的连续性，推出矛盾.