系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(4) (2008, 4), 447–455

一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象迭代收敛的充要条件*

向 长 合

(重庆师范大学数学与计算机科学学院， 重庆 400047)

摘要 设 $\mathbb{E}$ 是任意的实 Banach 空间， $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{E}$ 的非空凸子集 ($\mathbb{C}$ 可以是 $\mathbb{E}$ 的无界子集), $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象，在对参数的一些限制条件下，该文给出了带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 T 的不动点的充要条件.

关键词 渐近拟伪压缩型映象，带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列，不动点.

MR(2000) 主题分类号 47H09, 47H10

1 引言及预备知识

设 $\mathbb{E}$ 是实 Banach 空间，其对偶空间为 $\mathbb{E}^*$, $\langle *,*\rangle$ 是 $\mathbb{E}$ 与 $\mathbb{E}^*$ 之间的广义对偶对，映象 $\mathbb{J}$ 是从 $\mathbb{E}$ 到 $2^{\mathbb{E}^*}$ 的正规对偶映象 [1], 即

$$J(x)=\{x^*\in\mathbb{E}^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},\quad \forall\, x\in\mathbb{E}.$$

定义 1.1 设 $\mathbb{E}$ 是实 Banach 空间， $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{E}$ 中的非空子集， T 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{E}$ 的映象， $F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合，

1) 称 T 是一致 L-Lipschitz 的 [2], 如果存在 $L\ge 1$, 使得

$$\|T^nx-T^ny\|\le L\|x-y\|,\quad \forall\, n\ge 1,\ \forall\, x,y\in\mathbb{C};$$

2) 称 T 是渐近非扩张映象 [3], 如果存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$, 使得

$$\|T^nx-T^ny\|\le k_n\|x-y\|,\quad \forall\, n\ge 1,\ \forall\, x,y\in\mathbb{C};$$

3) 称 T 是渐近拟非扩张映象 [4], 如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$, 使得

$$\|T^nx-p\|\le k_n\|x-p\|,\quad \forall\, x\in\mathbb{C},\ \forall\, p\in F(T),\ \forall\, n\ge 1;$$

* 国家自然科学基金 (10471159) 和重庆市教委项目 (KJ070806) 资助课题.
收稿日期：2005-10-24, 收到修改稿日期：2006-10-08.

4) 称 T 是渐近伪压缩映象 [5], 如果存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$, 任给 $x,y\in\mathbb{C}$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$, 使得 $\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle\le k_n\|x-y\|^2$;

5) 称 T 是渐近伪压缩型映象，如果存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$, $\forall\, y\in\mathbb{C}$, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in\mathbb{C}}\inf_{j(x-y)\in J(x-y)}[\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle-k_n\|x-y\|^2]\right\}\le 0;$$

6) 称 T 是渐近拟伪压缩型映象, 若 $F(T)$ 非空, $\forall\, p\in F(T)$, $\exists\,\{k_n\}\subset[1,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$, 有

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in\mathbb{C}}\inf_{j(x-p)\in J(x-p)}[\langle T^nx-p, j(x-p)\rangle-k_n\|x-p\|^2]\right\}\le 0,$$

其中， k_n 称为映象 T 的渐近系数.

显然, 具有不动点的渐近非扩张映象是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象的特例, 此外，渐近拟非扩张映象和具有不动点的渐近伪压缩映象及具有不动点的渐近伪压缩型映象都是渐近拟伪压缩型映象的特例.

注 1.1 渐近伪压缩型映象由文 [6] 于 2004 年首次引入，其定义如下，一个映象 $T: D(T)\subset E\to E$ 称为渐近伪压缩型的，如果存在序列 $\{k_n\}\subset(0,+\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$, 而且，对每个 $x\in D(T)$, 存在非负序列 $\{r_n(x)\}$, 使得对每个 $y\in D(T)$, 及某个 $j(x-y)\in J(x-y)$, 有

$$\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle\le k_n\|x-y\|^2+r_n(x),\quad \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0. \tag{1.1}$$

此外，在文 [6] 第 269 页中又引入了如下类型的渐近伪压缩映象 $T:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$:

$$\limsup_{n\to\infty}\Big\{\sup_{y\in\mathbb{D}}\inf_{j(x-y)\in J(x-y)}[\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle-k_n\|x-y\|^2]\Big\}\le 0,\quad \forall\, x\in\mathbb{D}, \tag{1.2}$$

其中， $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$, 并提出了一个公开问题. 其实，文 [6] 中引入的这两类映象是相同的映象. 事实上，若 (1.1) 成立，则 $T:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, 并且， (1.2) 显然成立；反之，若 (1.2) 成立，令

$$\alpha_n(x)=\sup_{y\in\mathbb{D}}\inf_{j(x-y)\in J(x-y)}\big[\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle-k_n\|x-y\|^2\big],\quad \forall\, x\in\mathbb{D}, \tag{1.3}$$

则 $\limsup\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x)\le 0$, $\forall\, x\in\mathbb{D}$. 令 $r_n(x)=\max\{\alpha_n(x),0\}+\frac{1}{n}$, $\forall\, x\in\mathbb{D}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ 且 $r_n(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbb{D}$. 由 (1.3), $\forall\, x\in D$, $\forall\, y\in\mathbb{D}$, $\exists\, j(x-y)\in J(x-y)$, 使得

$$\langle T^nx-T^ny, j(x-y)\rangle-k_n\|x-y\|^2\le\alpha_n(x)+\frac{1}{n}\le r_n(x).$$

即 (1.1) 成立. 这就证明了文 [6] 引入的两类映象是同一类映象，也顺便解决了文 [6] 提出的公开问题. 注意到 $J(x-y)=-J(y-x)$, 本文给出的渐近伪压缩型映象的定义与 (1.2) 是等价的，所以，本文给出的渐近伪压缩型映象的定义实际上是文 [6] 中引入的渐近伪压缩型映象的另一种表述形式.

注 1.2 根据渐近拟非扩张映象的定义，本文给出的渐近拟伪压缩型映象是对具有不动点的渐近伪压缩型映象的自然推广.

定义 1.2[2] 设 $\mathbb{C}$ 是 Banach 空间 $\mathbb{E}$ 中的非空凸子集，T 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的映象，则 T 的带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n-\gamma_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + \gamma_n u_n, \\ y_n = (1-\beta_n-\delta_n)x_n + \beta_n T^n x_n + \delta_n v_n, \ n \geq 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中，x_0 是 $\mathbb{C}$ 中给定的一点，$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中有界点列，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ 及 $\{\delta_n\}$ 都是 $[0,1]$ 中的数列，并且满足 $\alpha_n+\gamma_n \leq 1$, $\beta_n+\delta_n \leq 1$ $(\forall n \geq 0)$. 特别地，若 $\gamma_n=\delta_n=0$ $(n \geq 0)$, 则 $\{x_n\}$ 称为 T 的修改的 Ishikawa 迭代序列；更特别地，若 $\gamma_n=\delta_n=\beta_n=0$ $(n \geq 0)$, 则 $\{x_n\}$ 称为 T 的修改的 Mann 迭代序列.

近来，有许多作者 (见文 [2–12] 等) 研究了带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列或修改的 Ishikawa 迭代序列及修改的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 逼近渐近伪压缩映象或渐近非扩张映象等非线性映象的不动点的问题． 2001 年，文 [2] 在一致光滑的实 Banach 空间上对渐近伪压缩映象 T 给出了带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 T 的不动点的充分条件和必要条件，但要求 $\mathbb{C}$ 有界． 2004 年，文 [7] 对一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象在一些限制条件下证明了修改的 Ishikawa 迭代序列的收敛性，此时，不需要任何有界性假设 (见文 [7] 中定理 2.1), 但是，对带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列，却需要 T 的值域有界的假设，其结果 (见文 [7] 中定理 3.1) 如下.

定理 Z 设 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{E}$ 中的非空凸集，$T:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 是具实数列 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n=1$ 的一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象．假设 T 的值域有界，且 $F(T)\neq\phi$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ 及 $\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的四个数列，满足条件

i) $\alpha_n+\gamma_n \leq 1, \quad \beta_n+\delta_n \leq 1$;

ii) $\alpha_n \to 0 \ (n\to\infty), \ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty$;

iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\beta_n+\delta_n)<+\infty, \ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<+\infty$.

给定 $x_0\in\mathbb{D}$, $\{x_n\}$ 是由 (1.4) 所定义的带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列．如果 $q\in F(T)$ 是一给定的点，而且存在一严格增加函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\phi(0)=0$, 使得

$$\langle T^n x_{n+1}-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \leq k_n\|x_{n+1}-q\|^2-\phi(\|x_{n+1}-q\|), \quad \forall n\geq 0,$$

其中 $j(x_{n+1}-q)\in J(x_{n+1}-q)$ 是按渐近伪压缩映象定义中由 x_{n+1} 和 q 所确定的元，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 q.

因此，我们自然会问，在定理 Z 中，若去掉 T 的值域有界的假设，带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列是否强收敛于一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象的不动点呢？更一般地，若去掉 T 的值域有界的假设，带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列是否强收敛于一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象的不动点呢？本文不仅将对这些问题给出完全肯定的回答，并且还将给出带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象的不动点的充要条件．所得结果也是对文 [2–12] 中相应成果的改进和推广.

2 一些引理

引理 2.1[8] 若 $\mathbb{E}$ 是实 Banach 空间, 则对任意给定的 $x, y \in \mathbb{E}$, 有

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle\, y, j(x+y)\rangle, \quad \forall\, j(x+y) \in J(x+y).$$

引理 2.2[9] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是三个非负数列，满足

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty, \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n < \infty, \quad a_{n+1} \le (1+b_n)a_n + c_n,$$

其中 n_0 是某非负整数，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

引理 2.3 设 $\varphi(s)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格增加函数且 $\varphi(0)=0$; n_0 是某非负整数，若当 $n \ge n_0$ 时， a_n, b_n, c_n 和 α_n 都是非负数并且满足如下三个条件

i) $a_{n+1} \le (1+b_n)a_n - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + c_n$;

ii) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n < +\infty, \quad \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c_n < +\infty$;

iii) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证 由假设 i) 知 $a_{n+1} \le (1+b_n)a_n + c_n$, 根据引理 2.2, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 从而, 数列 $\{a_n\}$ 有界. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n \le M$ $(\forall\, n \ge n_0)$, 其中 a 和 M 是非负常数. 记 $d_n = Mb_n + c_n$, 则当 $n \ge n_0$ 时， $a_{n+1} \le a_n - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + d_n$ 且 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} d_n < +\infty$.

下面证明 $a=0$. 反设 $a>0$, 任意取定 $r \in (0,a)$, 则存在自然数 $n_1 \ge n_0$, 当 $n \ge n_1$ 时, $a_{n+1} \ge r$. 由 $\varphi(s)$ 的单调性得 $a_{n+1} \le a_n - \alpha_n\varphi(r) + d_n$ $(n \ge n_1)$, 从而，有

$$\varphi(r)\sum_{n=n_1}^{\infty} \alpha_n \le a_{n_1} + \sum_{n=n_1}^{\infty} d_n < +\infty.$$

由于 $\varphi(r) > 0$, 所以， $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, 与假设条件 iii) 矛盾. 这就完成了引理 2.3 的证明.

引理 2.4 设 $\varphi(s)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的严格增加函数且 $\varphi(0)=0$, n_0 是某非负整数，若当 $n \ge n_0$ 时， $a_n, b_n, c_n, \varepsilon_n$ 和 α_n 都是非负数并且满足如下三个条件

i) $a_{n+1} \le (1+b_n)a_n - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + \alpha_n\varepsilon_n + c_n$;

ii) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n < +\infty, \quad \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c_n < +\infty, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$;

iii) $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证　设 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 下面证明 $a=0$. 反设 $a>0$ 或 $a=+\infty$, 任取 $r\in(0,a)$, 则存在自然数 $n_1\geq n_0$, 当 $n\geq n_1$ 时，有 $a_n\geq r>0$ 且 $\varepsilon_n<\frac{1}{2}\varphi(r)\leq\frac{1}{2}\varphi(a_{n+1})$, 由条件 i) 得

$$\begin{aligned}a_{n+1}&\leq(1+b_n)a_n-\alpha_n\varphi(a_{n+1})+\alpha_n\times\frac{1}{2}\varphi(a_{n+1})+c_n\\&=(1+b_n)a_n-\frac{1}{2}\alpha_n\varphi(a_{n+1})+c_n,\end{aligned}$$

由引理 2.3, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 与假设 $a>0$ 或 $a=+\infty$ 矛盾. 从而

$$\liminf_{n\to\infty}a_n=0. \tag{2.1}$$

$\forall\varepsilon>0$, 由条件 ii), $\exists n_2\geq n_0$, 当 $n\geq n_2$ 时，有

$$\varepsilon_n<\varphi(\varepsilon),\quad \sum_{n=n_2}^{\infty}b_n<\ln 2,\quad \sum_{n=n_2}^{\infty}c_n<\varepsilon, \tag{2.2}$$

由 (2.1), $\exists N\geq n_2$, 使得 $a_N<\varepsilon$. 下证

$$a_k\leq\Big(\varepsilon+\sum_{n=N}^{k-1}c_n\Big)\exp\Big(\sum_{n=N}^{k-1}b_n\Big),\quad \forall k\geq N. \tag{2.3}$$

当 $k=N$ 时，(2.3) 已经成立. 设 (2.3) 对自然数 $k\geq N$ 成立，现在证明 (2.3) 对自然数 $k+1$ 仍成立. 反设 $a_{k+1}>\Big(\varepsilon+\sum\limits_{n=N}^{k}c_n\Big)\exp\Big(\sum\limits_{n=N}^{k}b_n\Big)$, 则 $a_{k+1}\geq\varepsilon$, 从而，$\varphi(a_{k+1})\geq\varphi(\varepsilon)$, 由条件 i) 及 (2.2) 得

$$\begin{aligned}a_{k+1}&\leq(1+b_k)a_k-\alpha_k\varphi(a_{k+1})+\alpha_k\varepsilon_k+c_k\leq(1+b_k)a_k-\alpha_k\varphi(\varepsilon)+\alpha_k\varphi(\varepsilon)+c_k\\&\leq(1+b_k)\Big(\varepsilon+\sum_{n=N}^{k-1}c_n\Big)\exp\Big(\sum_{n=N}^{k-1}b_n\Big)+c_k\leq\Big(\varepsilon+\sum_{n=N}^{k-1}c_n\Big)\exp\Big(\sum_{n=N}^{k}b_n\Big)+c_k\\&\leq\Big(\varepsilon+\sum_{n=N}^{k}c_n\Big)\exp\Big(\sum_{n=N}^{k}b_n\Big),\end{aligned}$$

矛盾. 因此，(2.3) 对自然数 $k+1$ 仍成立. 由数学归纳法，(2.3) 对任何不小于 N 的自然数 k 均成立. 由 (2.2) 和 (2.3), 有

$$\limsup_{k\to\infty}a_k\leq\Big(\varepsilon+\sum_{n=N}^{\infty}c_n\Big)\exp\Big(\sum_{n=N}^{\infty}b_n\Big)<2(\varepsilon+\varepsilon)=4\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，得 $\limsup\limits_{k\to\infty}a_k=0$, 从而，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 引理 2.4 证毕.

3　主要结果

定理　3.1　设 $\mathbb{C}$ 是实 Banach 空间 $\mathbb{E}$ 中的非空凸集，$T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象，其渐近系数为 $k_n\geq 1$. 假设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ 及 $\{\delta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的四

个数列，并且满足如下四个条件

i) $\alpha_n+\gamma_n\le 1,\quad \beta_n+\delta_n\le 1\ (\forall\, n\ge 0)$;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\gamma_n<\infty,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$;

iv) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty,\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\delta_n<\infty$.

给定 $x_0\in\mathbb{C}$, $\{x_n\}$ 是由 (1.4) 定义的带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列．任给 $p\in F(T)$, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 p 的充要条件是存在 $[0,+\infty)$ 上的严格增加函数 $\phi(s)$, $\phi(0)=0$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\inf_{j(x_n-p)\in J(x_n-p)}\big[\langle T^{n-1}x_n-p,j(x_n-p)\rangle-k_{n-1}\|x_n-p\|^2+\phi(\|x_n-p\|)\big]\le 0. \tag{3.1}$$

证 由于 $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是渐近拟伪压缩型映象，所以， $F(T)\neq\phi$. 任取 $p\in F(T)$, 首先，我们证明充分性．假设在 $[0,+\infty)$ 上存在一个严格增加函数 $\phi(s)$, $\phi(0)=0$, 使 (3.1) 成立，令

$$\overline{\varepsilon}_n=\inf_{j(x_{n+1}-p)\in J(x_{n+1}-p)}\big[\langle T^nx_{n+1}-p,j(x_{n+1}-p)\rangle-k_n\|x_{n+1}-p\|^2+\phi(\|x_{n+1}-p\|)\big],$$

$$\varepsilon_n=\max\{\overline{\varepsilon}_n,0\}+\frac{1}{n},\quad \forall\, n\ge 1.$$

则存在 $j(x_{n+1}-p)\in J(x_{n+1}-p)$, 使得

$$\langle\, T^nx_{n+1}-p,j(x_{n+1}-p)\rangle-k_n\|x_{n+1}-p\|^2+\phi(\|x_{n+1}-p\|)<\overline{\varepsilon}_n+\frac{1}{n}\le\varepsilon_n. \tag{3.2}$$

并且由 (3.1) 知 $\limsup\limits_{n\to\infty}\overline{\varepsilon}_n\le 0$, 从而， $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. 由于 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中有界点列，记

$$M=\sup\{\|u_n-p\|+\|v_n-p\|:n\ge 1\},$$

则 $M<+\infty$. 由于 T 是一致 L-Lipschitz 的 $(L\ge 1)$, 由 (1.4) 和 (3.2), 根据引理 2.1, 得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\|^2\\
=&\|(1-\alpha_n-\gamma_n)(x_n-p)+\alpha_n(T^ny_n-p)+\gamma_n(u_n-p)\|^2\\
\le&(1-\alpha_n-\gamma_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\langle T^ny_n-p,j(x_{n+1}-p)\rangle+2\gamma_n\langle u_n-p,j(x_{n+1}-p)\rangle\\
\le&(1-\alpha_n-\gamma_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\langle T^nx_{n+1}-p,j(x_{n+1}-p)\rangle\\
&+2\alpha_n\langle T^ny_n-T^nx_{n+1},j(x_{n+1}-p)\rangle+2\gamma_n\|u_n-p\|\cdot\|x_{n+1}-p\|\\
\le&(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-p\|^2-\phi(\|x_{n+1}-p\|)+\varepsilon_n\}\\
&+2\alpha_nL\|y_n-x_{n+1}\|\cdot\|x_{n+1}-p\|+2\gamma_nM\|x_{n+1}-p\|.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

另一方面，由 (1.4), 得

$$\begin{aligned}
&\|y_n-x_{n+1}\|\\
=&\|(\alpha_n-\beta_n)(x_n-T^nx_n)+\alpha_n(T^nx_n-T^ny_n)+\gamma_n(x_n-u_n)-\delta_n(x_n-v_n\|\\
\le&|\alpha_n-\beta_n|\cdot\|x_n-T^nx_n\|+\alpha_nL\|x_n-y_n\|+\gamma_n\|x_n-u_n\|+\delta_n\|x_n-v_n\|.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

由于

$$\|x_n - u_n\| \le \|x_n - p\| + \|p - u_n\| \le \|x_n - p\| + M, \tag{3.5}$$

$$\|x_n - v_n\| \le \|x_n - p\| + \|p - v_n\| \le \|x_n - p\| + M, \tag{3.6}$$

$$\|x_n - T^n x_n\| \le \|x_n - p\| + \|p - T^n x_n\| \le (1+L)\|x_n - p\|, \tag{3.7}$$

由 (1.4), (3.6) 和 (3.7), 得

$$\|y_n - x_n\| = \|\beta_n(T^n x_n - x_n) + \delta_n(v_n - x_n)\| \le \beta_n(1+L)\|x_n - p\| + \delta_n(\|x_n - p\| + M).$$

将上式及 (3.5), (3.6) 和 (3.7) 代入 (3.4) 并整理得

$$\|y_n - x_{n+1}\| \le d_n\|x_n - p\| + e_n, \tag{3.8}$$

其中

$$d_n = (1+L)\cdot|\alpha_n - \beta_n| + L(1+L)\alpha_n\beta_n + L\alpha_n\delta_n + \gamma_n + \delta_n,$$

$$e_n = LM\alpha_n\delta_n + M(\gamma_n + \delta_n).$$

将 (3.8) 代入 (3.3), 有

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - p\|^2 \\
\le\ & (1-\alpha_n)^2\|x_n - p\|^2 + 2\alpha_n k_n\|x_{n+1} - p\|^2 - 2\alpha_n\phi(\|x_{n+1} - p\|) + 2\alpha_n\varepsilon_n \\
& + 2L\alpha_n(d_n\|x_n - p\| + e_n)\|x_{n+1} - p\| + 2M\gamma_n\|x_{n+1} - p\|, \quad \forall\, n \ge 1.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

现在，我们引入下列记号

$$a_n = \|x_n - p\|^2, \quad \forall\, n \ge 1; \quad \varphi(s) = 2\phi(\sqrt{s}), \quad \forall\, s \ge 0;$$

$$\lambda_n = L\alpha_n d_n = L(1+L)\alpha_n\cdot(|\alpha_n - \beta_n| + L\alpha_n\beta_n) + L^2\alpha_n^2\delta_n + L\alpha_n(\gamma_n + \delta_n); \tag{3.10}$$

$$\mu_n = L\alpha_n e_n + M\gamma_n = L^2 M\alpha_n^2\delta_n + LM\alpha_n(\gamma_n + \delta_n) + M\gamma_n, \quad \forall\, n \ge 1. \tag{3.11}$$

则 (3.9) 简化为

$$a_{n+1} \le (1-\alpha_n)^2 a_n + 2\alpha_n k_n a_{n+1} - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + 2\alpha_n\varepsilon_n + 2(\lambda_n\|x_n - p\| + \mu_n)\|x_{n+1} - p\|,$$

利用不等式 $2ab \le a^2 + b^2$ 得

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\le (1-\alpha_n)^2 a_n + 2\alpha_n k_n a_{n+1} - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + 2\alpha_n\varepsilon_n \\
&\quad + \lambda_n(a_n + a_{n+1}) + \mu_n(1 + a_{n+1}) \\
&= (1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + \lambda_n)a_n + (2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n)a_{n+1} \\
&\quad - \alpha_n\varphi(a_{n+1}) + 2\alpha_n\varepsilon_n + \mu_n.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

根据假设条件 iii) 和 iv), 由 (3.10) 和 (3.11), 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < +\infty, \tag{3.13}$$

因此， $2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n \to 0$ $(n \to \infty)$. $\exists\, n_0$, 当 $n \geq n_0$ 时， $2\alpha_n k_n + \lambda_n + \mu_n \leq \frac{1}{2}$, 令

$$b_n = \frac{1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2 + \lambda_n}{1 - 2\alpha_n k_n - \lambda_n - \mu_n} - 1 = \frac{2\alpha_n(k_n - 1) + \alpha_n^2 + 2\lambda_n + \mu_n}{1 - 2\alpha_n k_n - \lambda_n - \mu_n},$$

$$c_n = \frac{\mu_n}{1 - 2\alpha_n k_n - \lambda_n - \mu_n},$$

当 $n \geq n_0$ 时， $0 \leq b_n \leq 2\big[2\alpha_n(k_n - 1) + \alpha_n^2 + 2\lambda_n + \mu_n\big]$， $0 \leq c_n \leq 2\mu_n$, 由 (3.12), 得

$$a_{n+1} \leq (1 + b_n)a_n - \alpha_n \varphi(a_{n+1}) + 4\alpha_n \varepsilon_n + c_n, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

由 (3.13) 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n(k_n - 1) < \infty$, 得 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n < +\infty$, $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c_n < +\infty$. 根据引理 2.4, 有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|^2 = 0,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - p\| = 0$. 即， $\{x_n\}$ 强收敛于 p, 充分性得证.

最后，我们证明必要性．设 $\{x_n\}$ 强收敛于 $p \in F(T)$, 由于 $x_n \in \mathbb{C}$ 且 $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是渐近拟伪压缩型映象，根据渐近拟伪压缩型映象的定义，有

$$\limsup_{n\to\infty} \inf_{j(x_n - p) \in J(x_n - p)} \Big[\langle T^{n-1}x_n - p, j(x_n - p)\rangle - k_{n-1}\|x_n - p\|^2\Big] \leq 0. \tag{3.14}$$

任取一个在 $[0, +\infty)$ 上的严格增加的连续函数 $\phi(s)$, 且满足条件 $\phi(0) = 0$(例如，取 $\phi(s) = s$), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(\|x_n - p\|) = 0$, 由此及 (3.14) 即知 (3.1) 成立．定理 3.1 证毕.

注 3.1　在定理 3.1 中，若去掉 T 是一致 L-Lipschitz 映象的假设， (3.1) 仍然是带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 p 的必要条件；若去掉 T 是渐近拟伪压缩型映象的假设， (3.1) 也是带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 p 的充分条件.

注 3.2　由于本文定理 3.1 讨论的是带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列，因此，对于修改的 Ishikawa 迭代序列和修改的 Mann 迭代序列，相应结论都成立．此外，由于以下四个类型的映象都是一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象的特例，

1) 具有不动点的渐近非扩张映象；

2) 一致 L-Lipschitz 的渐近拟非扩张映象；

3) 具有不动点的一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象；

4) 具有不动点的一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩型映象.

所以，对于上述四种特殊类型的映象，也有相应结论成立，在此，不再赘述.

注 3.3　本文主要在如下三个方面对文 [7] 进行了改进和推广

1) 在对迭代参数 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\delta_n\}$ 及误差序列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 的限制条件与定理 Z 保持一致的前提下，取消了定理 Z 中 T 的值域有界的假设；

2) 将具有不动点的一致 L-Lipschitz 的渐近伪压缩映象推广到一致 L-Lipschitz 的渐近拟伪压缩型映象；

3) 本文给出的 (3.1) 是带误差的修改的 Ishikawa 迭代序列强收敛于 p 的充要条件，并且本文给出的充分条件 (3.1) 也弱于定理 Z 中相应的条件.

参 考 文 献

[1] Asplund E. Positivity of duality mappings. *Bull Amer. Math. Soc.*, 1967, **73**: 200–203.

[2] Chang S S. Some results for asymptotically pseudo-contractive mappings and asymptotically nonexpansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2001, **129**(3): 845–853.

[3] Goebel K and Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, **35**(1): 171–174.

[4] Liu Q H. Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with error member of uniformly convex Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **266**: 468–471.

[5] Schu J. Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **158**: 407–413.

[6] 曾六川. 关于渐近伪压缩型映象的不动点的迭代构造. 系统科学与数学， 2004, **24**(2): 261–270.

[7] 曾六川. Banach 空间中带误差的修改的 Ishikawa 迭代程序. 数学学报， 2004, **47**(2): 219–228.

[8] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis. *Nonlinear Anal. TMA*, 1997, **30**(7): 4197–4208.

[9] Gornicki J. Week convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces. *Comment Math. Univ. Carolin*, 1989, **301**: 249–252.

[10] 谷峰，堵秀凤. 赋范空间中渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近 (英文). 应用泛函分析学报， 2003, **5**(2): 125–131.

[11] 曾六川. 一致光滑 Banach 空间中渐近伪压缩映象不动点的迭代逼近. 数学年刊， 2005, **26A**(2): 283–290.

[12] 张石生. Banach 空间中渐近非扩张映象不动点的迭代逼近问题. 应用数学学报， 2001, **24**(2): 236–241.

A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE ITERATIVE SEQUENCE CONVERGENCE TO THE FIXED POINT OF UNIFORMLY L-LIPSCHITZIAN ASYMPTOTICALLY QUASI PSEUDO-CONTRACTIVE TYPE MAPPING

XIANG Changhe

(*College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing* 400047)

Abstract Suppose $\mathbb{E}$ is a real Banach space, $\mathbb{C}$ is a nonempty convex subset of $\mathbb{E}$($\mathbb{C}$ may be a unbounded subset of $\mathbb{E}$), $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ is a uniformly L-Lipschitzian asymptotically quasi pseudo-contractive type mapping, under some restrictive conditions on the parameters, a necessary and sufficient condition is given for the modified Ishikawa iterative sequence with error to converge strongly to a fixed point of T.

Key words Asymptotically quasi pseudo-contractive type mapping, modified Ishikawa iterative sequence with error, fixed points.