系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(4) (2006, 8), 433–439

一类几乎唯一泛圈图*

施 永 兵

(上海师范大学数理信息学院， 上海 200234)

摘要 设 G 是阶为 n 的简单 Hamilton 图. 若存在 $m(3 \leq m < n)$ 使对每个 $l \in \{3,4,\cdots,n\}-\{m\}$, G 恰有一个长为 l 的圈且不含长为 m 的圈，则称 G 是几乎唯一泛圈图. 用 Γ_k^0 表示具有 $n+k$ 条边和恰有 $\frac{k^2+5k-2}{2}$ 个圈的简单 H 图的集合. 作者确定了 Γ_k^0 中所有几乎唯一泛圈图，并证明这些图都是简单 MCD 图.

关键词 圈，几乎唯一泛圈图，简单 MCD 图.

MR(2000) 主题分类号 05C38, 05C75

1 引言

令 $F_n(S_n)$ 是具有 n 个顶点没有两个等长圈的图（简单图）的集合. $F_n(S_n)$ 中具有最大边数的图称为 MCD 图 (简单 MCD 图). 用 $f(n)(f^*(n))$ 表示具有 n 个顶点的 MCD 图 (简单 MCD 图) 的边数. 确定 $f(n)$ 是 Erdös 于 1975 年提出的一个至今未解决的问题 [1]. 与确定 $f(n)$ 直接有关的问题是确定 MCD 图. 作者在 [2] 中已经证明 $f(n)=f^*(n-1)+3$. 因此确定 $f(n)$ 和 MCD 图问题转化为确定 $f^*(n)$ 和简单 MCD 图问题. 作者已在 [2–4] 中讨论了 $f^*(n)$ 和简单 MCD 图，得到了若干结果. 关于 $f(n)$ 的新的上下界可参看 Lai Chunhui[5] 和 Borose, E[6] 等.

若对每个 $3 \leq l \leq n$, 阶为 n 的图 G 恰有一个长为 l 的圈，则称 G 为唯一泛圈图. 1973 年， Entriger[1] 提出了确定唯一泛圈图问题. 作者在 [7] 中讨论了这个问题，也得到了一些结果. 有趣的是 Erdös 问题和 Entriger 问题有共同之处，即它们都没有等长圈. 在某种意义上 Entriger 问题是 Erdös 问题的特例. 到目前为止，我们仅找到 7 个唯一泛圈图 [7], 而且我们猜想不可能有其它的唯一泛圈图. 已知的每个唯一泛圈图都是简单 MCD 图.

现在我们限制 Erdös 问题在简单 Hamilton 图 (简称 H 图) 中讨论. 我们约定本文讨论的图 G 都是阶为 n 的简单 H 图. 于是每个图 G 都可以看作在它的一个 H 圈 C 内添加 $k(k=|E(G)|-|V(G)|)$ 条边得到. 当 n 适当大时，图 G 的圈数 $f(G)$ 仅与添加的 k 条边在 H 圈 C 内的位置有关. 若 G 是简单 MCD 图，则必有 $n \geq f(G)+2$. 当 $n=f(G)+2$ 时，G 就是唯一泛圈图了. 于是当 k 给定时. 具有最小圈数的图类中唯一泛圈图就是简单 MCD 图了. 因为它没有等长圈且有尽可能多的边数.

对给定的 k, 文 [8] 已证明 G 的最小圈数 $m(k)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

* 上海市教委科技发展基金 (04DB25) 资助课题.
收稿日期：2003-12-08, 收到修改稿日期：2005-06-09.

用 $\overline{\Gamma}_k$ 表示具有 $n+k$ 条边恰有 $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ 个圈的阶为 n 的简单 H 图的集合. 显然 $\overline{\Gamma}_k$ 中的唯一泛圈图是简单 MCD 图. 但文 [7] 已经证明这种唯一泛圈图有且仅有 4 个.

受到 Bondy[9] 和 Malkevitch[10] 等研究 Halin 图和 Polytopal 图的几乎泛圈性的启发. 作者最近研究了 $\overline{\Gamma}_k$ 中图的几乎唯一泛圈性, 完全确定了 $\overline{\Gamma}_k$ 中所有几乎唯一泛圈图, 并证明这些几乎唯一泛圈图都是简单 MCD 图 (另文发表).

用 Γ_k 表示具有 $n+k$ 条边的阶为 n 的简单 H 图的集合. 令 $m_1(k)=\min\{f(G)|G\in\Gamma_k$ 且 $f(G)\neq\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\}$. 用 Γ_k^0 表示具有 $n+k$ 条边恰有 $m_1(k)$ 个圈的简单 H 图的集合. 本文研究了 Γ_k^0 中图的几乎唯一泛圈性, 完全确定了 Γ_k^0 中所有几乎唯一泛圈图, 证明这些图也是简单 MCD 图.

2 一些定义和记号

若存在某个 $m\in\{3,4,\cdots,n-1\}$ 使对每个 $l\in\{3,4,\cdots,n\}-\{m\}$, 图 G 恰有一个长为 l 的圈, 则称 G 是阶为 n 的几乎唯一泛圈图(简记为 AUP 图). 若 G 是阶为 n 且不含 m 圈的几乎唯一泛圈图, 则称 G 是 $(\overline{m},n)$- 几乎唯一泛圈图, 简记为 $(\overline{m},n)$-AUP 图. 令 $S(\overline{m},n)=\{G|G$ 是 $(\overline{m},n)$-AUP 图 $\}$. 设 u,v 是 C 上的两个顶点, 用 $C[u,v]$ 表示圈 C 上沿着 C 的顺时针方向的 (u,v) 路.

令 C 是 G 的 H 圈. 本文约定将 $E(G)-E(C)$ 中的边全画在圈 C 内部且称 $E(G)-E(C)$ 中的边为 G 的桥. 用 $B(G)$ (或 B) 表示 G 的桥的集合.

设 b_1 和 b_2 是 G 的两条桥且有 4 个不同的顶点 u, v, u' 和 v' 使 $b_1=uv$ 和 $b_2=u'v'$ 且这 4 个顶点以循环顺序 u,u',v,v' 出现在圈 C 上, 则称 b_1 和 b_2 是偏斜的. 若 b_1 和 b_2 不是偏斜的, 则称 b_1 和 b_2 是平行的.

设 $b\in B$, 则 G 中恰有两个圈 (记为 $C(b)$ 和 $\overline{C}(b)$) 含桥 b 而不含 $B-\{b\}$ 中任一桥. $C(b)$ 和 $\overline{C}(b)$ 中长较小的圈称为 G 的旁圈. 若 C' 是 G 的一个旁圈且 C' 内部没有桥, 则称 C' 为严格旁圈.

设 G 是平面图, C' 是 G 的一个圈, 则 C' 将平面分为三个部分即 C' 内部、C' 外部和 C' 自身. 用 $\mathrm{int}C'$ 表示 C' 内部, 用 $\mathrm{ext}C'$ 表示 C' 外部. 若 $b_1\in B$ 且 b_1 位于 C' 内部, 则记 $b_1\in\mathrm{int}C'$; 否则记 $b_1\notin\mathrm{int}C'$.

设 $b_1,b_2\in S\subseteq B$ 且 b_1 和 b_2 是两条平行桥. 若存在 $b\in S$ 使 $b_1\in\mathrm{int}C(b)$ 和 $b_2\in\mathrm{int}\overline{C}(b)$, 则称 b_1 和 b_2 是 S 独立的; 否则 b_1 和 b_2 称为 S 相关的.

设 $S\subseteq B$ 是平行桥的集合且 S 中没有两条桥是 S 独立的, 则称 S 是相关的.

设 $S\subseteq B$ 是平行桥的集合且 S 中没有三条桥是 S 相关的, 则称 S 是独立的.

显然当 $|S|\leq 2$ 时, S 既是独立的, 也是相关的.

设 Q 表示满足下列条件的图 G 的集合: (1) $G\in\Gamma_k$ 且 $b_1\in B$; (2) 存在 $b_2,b_3\in B$ 使 $b_2,b_3\in\mathrm{int}C(b_1)$ 且任意 $b\in B-\{b_1,b_2,b_3\}$ 有 $b\in\overline{C}(b_1)$; (3) $\{b_1,b_2,b_3\}$ 是相关的, $B-\{b_2\}$ 是独立的.

文 [8] 已证明了下述

命题 1 $m_1(k)=\frac{k^2+5k}{2}-1$.

命题 2 $f(G)=\frac{k^2+5k}{2}-1$ 当且仅当 $G\in Q$.

由命题 2 知 $\Gamma_k^0=Q$.

现在我们构作 Γ_k^0 中的阶为 14 的 AUP 图 G_{14} 如下：取一个长为 7 的圈 C', 用 e_1,e_2,e_3 表示 C' 上的任意三条边. 用 P_1,P_2 和 P_3 表示长分别为 2, 3 和 5 的三条路. 将 P_1,P_2 和 P_3 添加到 C' 上使 P_i 的两个端点和 e_i 的两个端点重合 $(i=1,2,3)$ 得到图 G_{14}. 其中 $G_{14}=C'\cup P_1\cup P_2\cup P_3$, 而 $P_1\cup e_1,P_2\cup e_2,P_3\cup e_3$ 分别是长为 $3,4,6$ 的圈.

容易验证，上面构作的图 G_{14} 是 $(\overline{5},14)$-AUP 图，即对每个 $l\in\{3,4,\cdots,14\}-\{5\}$, G_{14} 恰有一个长为 l 的圈且没有 5 圈. 因此 $G_{14}\in S(\overline{5},14)$.

我们将同构的图看作同一个图，则用上述方法构作的图 G_{14} 有 15 个不同的图. 这可以用以下方法计算得到. 首先固定 C' 的一条边，然后从余下边中任取 2 条边的方法数为 $\binom{6}{2}=15$. 因此可以从 C' 中取到不同位置关系的 3 条边有 15 种，从而可以构作 15 个不同的 $(\overline{5},14)$-AUP 图. 因此 $|S(\overline{5},14)|\geq 15$, 事实上 $|S(\overline{5},14)|=15$.

3 主要结果及其证明

本文主要结果是下述

定理 1 设 $G\in\Gamma_k^0$ 且 G 是 AUP 图，则 $G\in S(\overline{5},14)$.

证 设 $G\in\Gamma_k^0=Q$, 则 G 是平面图， G 的 k 条桥将圈 C 内部分成 $k+1$ 个区域. 用 $f_0,f_1,\cdots,f_k$ 表示相应区域的周界(纯圈). 为了固定 $f_0,f_1,\cdots,f_k$ 的位置,令 $u_1u_2,v_1v_2,u_iv_i(i=3,4,\cdots,k)$ 是 G 的 k 条桥，且 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_k,v_k,v_{k-1},\cdots,v_3,v_2,v_1$ 按顺时针方向出现在圈 C 上，其中对 $i=2,3,\cdots,k-1$, 允许 u_i 和 u_{i+1} 重合，允许 v_i 和 v_{i+1} 重合. 令

$$
\begin{aligned}
&f_0=v_1v_2\cup C[v_2,v_1],\quad f_1=u_2u_1\cup C[u_1,u_2],\\
&f_2=u_3v_3\cup C[v_3,v_2]\cup v_2v_1\cup C[v_1,u_1]\cup u_1u_2\cup C[u_2,u_3],\\
&f_i=v_iu_i\cup C[u_i,u_{i+1}]\cup u_{i+1}v_{i+1}\cup C[v_{i+1},v_i](i=3,4,\cdots,k-1),\\
&f_k=v_ku_k\cup C[u_k,v_k].
\end{aligned}
$$

在下面的讨论中，用 C_i 表示 G 中长为 i 的圈.

若 C_i 是 G 的旁圈，则含于 C_i 的桥记为 b_i. 令 $S\subseteq B$. 若 C_l 至少包含 S 的一条桥且含于 C_l 的每条桥都是 S 的桥，则称 C_l 被 S 覆盖且记为 $l\in C(S)$.

容易看出若 G 有圈 C_i 且 C_i 是旁圈，则 G 有圈 C_{n-i+2}.

由于 G 是 AUP 图，故存在 $m(3\leq m<n)$ 使 G 中不存在长为 m 的圈且对每个 $l\in\{3,4,\cdots,14\}-\{m\}$, G 恰有一个长为 l 的圈.

容易知道，对 $G\in\Gamma_k^0$, 则 $|B|=k\geq 3$.

先考虑 $k=3$ 的情况. 此时 G 恰有三条相关桥.

现在对 m 分三种情形考虑.

情形 1 $m=n-1$. 此时 G 有 C_3 且 $C_3=f_2$. 由于 G 有 C_{n-2} 和 C_4, 故有 b_4 且 $C_4\in\{f_0,f_1.f_3\}$.

不妨设 $f_1=C_4$. 令 $S_1=\{b_4\}$, 则 $C(S_1)=\{4,n-2\}$.

又 G 有 C_{n-3}, 故 G 有 b_5, 从而 $C_5\in\{f_0,f_3\}$. 显然 G 有两个 5 圈，矛盾.

情形 2 $m=n-2$. 此时 G 有 C_{n-1}, 从而 G 有 b_3, 不妨设 $f_0=C_3$. 又 G 有 C_4,C_5 和 C_{n-3}, 推出 $f_2=C_4$ 且 $C_5\in\{f_1,f_3\}$. 显然 G 有两个 5 圈，矛盾.

情形 3 $m\leq n-3$. 此时 G 有 C_{n-1} 和 C_{n-2}, 从而 G 有 b_3 和 b_4. 不妨设 $C_3=f_0,C_4=f_1$. 令 $S_2=\{b_3,b_4\}$, 则 $C(S_2)=\{3,4,n-1,n-2,n-3\}$. 若 $m=n-4$, 则 G 有 C_{n-5}, 从而 G 有

b_7 且 $C_7=f_3$. 令 $S_3=\{b_3,b_4,b_7\}$, 则 $C(S_3)=\{3,4,7,n-1,n-2,n-3,n-5,\cdots,n-8\}$. 由于 $B=S_3$, 故 $n=14$, 从而 G 有两个 7 圈，矛盾. 因此 G 有 C_{n-4}, 于是 G 有 b_6, 且 $f_3=C_6$. 令 $S_3=\{b_3,b_4,b_6\}$, 则 $C(S_3)=\{3,4,6,n-1,\cdots,n-7\}$. 由于 $n=14$, 故 $f_2=C_7$. 此时 $G\in S(\overline{5},14)$.

以下考虑 $k\geq 4$ 条桥时的情形.

先证明两个事实.

事实 1 若 $S\subseteq B$, G 不含 C_{n-t} 且对某个 $l(1\leq t<l\leq \frac{n}{2}-1)$ 及对每个 $i\in\{1,2,\cdots,l-1\}-\{t\}$, 有 $n-i\in C(S)$ 且 $n-l\notin C(S)$, 则或 $S=B$ 或 G 有 b_{l+2}.

证 若 $S\neq B$, 则 C_{n-l} 含桥 $b\notin S$. 倘若 C_{n-l} 还包含一条桥 $b'\neq b$, 现在通过用 b' 端点之间在圈 C 上弧替代桥 b' 得到一个含 b 的圈，其长 $l'>n-l$. 由于 $l'\neq n-t$, 且 $l'\in C(S)$, 故 G 有两个长为 l' 的圈，矛盾. 因此 C_{n-l} 仅含一条桥 b 且 $b=b_{l+2}$.

事实 2 若 $S\subseteq B$ 使对某个 $l(1\leq l\leq \frac{n}{2}-1)$ 和每个 $i\in\{1,2,\cdots,l-1\}$, 有 $n-i\in C(S)$,$n-l\notin C(S)$, 且 G 有 C_{n-l}, 则或 $S=B$ 或 G 有 b_{l+2}.

证 类似于事实 1 的证明可得到结论，从略.

现在对 m 分情形讨论.

情形 1 $m=n-1$. 此时 G 有 C_{n-2} 和 C_4, 从而 G 有 b_4. 令 $S_1=\{b_4\}$, 则 $C(S_1)=\{4,n-2\}$. 由于 $n-3\notin C(S_1)$ 且 $S_1\neq B$, 由事实 1 推出 G 有 b_5. 令 $S_2=\{b_4,b_5\}$.

倘若 $b_4\in \mathrm{int}C_5$, 则 $f_k=C_4$ 和 $f_{k-1}=C_3$. 此时 $C(S_2)=\{3,4,5,n-2,n-3\}$. 由于 $n-4\notin C(S_2)$ 且 $S_2\neq B$, 由事实 1 推出 G 有 b_6. 显然 $b_5\notin \mathrm{int}C_6$, 否则 G 有两个 3 圈. 于是 $C_6\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_6$. 令 $S_3=\{b_4,b_5,b_6\}$, 则 $C(S_3)=\{3,4,5,6,n-2,n-3,n-4,n-6,n-7\}$. 由于 $n-5\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_7. 显然 $f_1=C_7$, 从而 G 有两个 $(n-7)$ 圈，矛盾.

因此 $C_5\in\{f_0,f_1,f_k\}$. 此时 $C(S_2)=\{4,5,n-2,n-3,n-5\}$. 由于 $n-4\notin C(S_2)$ 且 $S_2\neq B$, 故 G 有 b_6. 显然 $b_4\notin \mathrm{int}C_6$. 令 $S_3=\{b_4,b_5,b_6\}$.

倘若 $b_5\in \mathrm{int}C_6$, 则 $f_k=C_5,f_{k-1}=C_3$ 和 $C_4\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $C_4=f_0$. 于是 $C(S_3)=\{3,4,5,6,n-2,\cdots,n-6,\}$. 由于 $n-7\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_9. 显然 $b_6\notin \mathrm{int}C_9$, 否则有两个 5 圈. 因此 $f_1=C_9$. 令 $S_4=\{b_4,b_5,b_6,b_9\}$, 则 $C(S_4)=\{3,4,5,6,9,n-2,\cdots,n-7,n-9,\cdots,n-13\}$. 显然 $S_4\neq B$ (否则 $n=20$, 将 n 代入 $C(S_4)$,$C(S_4)$ 中有两个 9 圈. 对 $S_4\neq B$ 的类似证明将在后文中省略). 由于 $n-8\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{10}. 显然 $b_9\notin \mathrm{int}C_{10}$. 于是 $b_6\in \mathrm{int}C_{10}$, 从而 G 有两个 6 圈，矛盾.

因此 $\{f_0,f_1,f_k\}=\{C_4,C_5,C_6\}$. 显然 $C_3\neq f_2$. 从而 C_3 恰含两条桥. 令 b' 是含于 C_3 的一条桥. 若 b_4,b_5 和 b' 是相关的，则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 $G^\star$ 含有严格旁圈 C_3,C_4 和 C_5. 于是 G 有两个长为 $\mid V(G^\star)\mid -3$ 的圈. 若 b_5,b_6 和 b' 是相关的，则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 $G^\star$ 含有严格旁圈 C_3,C_5 和 C_6. 于是 G 有两个长为 $\mid V(G^\star)\mid -4$ 的圈. 因此 b_4,b_6 和 b' 必是相关的. 于是 $\{f_0,f_1\}=\{C_4,C_6\}$ 和 $f_k=C_5$. 此时 $C(S_3)=\{4,5,6,n-2,\cdots,n-7,n-9\}$. 由于 $n-8\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_{10}. 若 $b_6\in \mathrm{int}C_{10}$, 则 G 有两个 4 圈. 因此 $b_5\in \mathrm{int}C_{10}$. 令 $S_4=\{b_4,b_5,b_6,b_{10}\}$, 则 $C(S_4)=\{4,5,6,7,10,n-2,\cdots,n-10,n-12,n-14\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-11\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{13}. 若 $b_{10}\in \mathrm{int}C_{13}$, 则 G 有两个 5 圈. 因此 $b_6\in \mathrm{int}C_{13}$, 从而 G 有两个 7 圈，矛盾.

情形 2 $m=n-2$. 此时 G 有 C_{n-1} 和 C_3, 显然 C_3 是旁圈. 令 $S_1=\{b_3\}$, 则 $C(S_1)=$

$\{3,n-1\}$. 由于 $n-3\notin C(S_1)$, 故 G 有 b_5. 令 $S_2=\{b_3,b_5\}$.

倘若 $b_3\in \mathrm{int}C_5$, 则 $f_k=C_3$ 和 $f_{k-1}=C_4$. 于是 $C(S_2)=\{3,4,5,n-1,n-3\}$. 由于 $n-4\notin C(S_2)$, 故 G 有 b_6. 显然 $b_5\notin \mathrm{int}C_6$, 于是 $C_6\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_6$. 令 $S_3=\{b_4,b_5,b_6\}$, 则 $C(S_3)=\{3,4,5,6,n-1,n-3,n-4,n-5,n-7\}$. 由于 $n-6\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_8. 显然 $f_1=C_8$, 从而 G 有两个 $(n-7)$ 圈，矛盾.

因此 C_5 是严格旁圈. 于是 $C(S_2)=\{3,5,n-1,n-3,n-4\}$. 由于 $n-5\notin C(S_2)$ 且 $S_2\neq B$, 故 G 有 b_7. 令 $S_3=\{b_3,b_5,b_7\}$.

情形 2.1　$b_3\in \mathrm{int}C_7$, 此时 $f_k=C_3, f_{k-1}=C_6$ 和 $C_5\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_5$. 于是 $C(S_3)=\{3,5,6,7,n-1,n-3,n-4,n-5,n-8\}$. 由于 $n-6\notin C(S_3)$, 故 G 有 b_8. 显然 $b_7\notin \mathrm{int}C_8$, 于是 $f_1=C_8$. 令 $S_4=\{b_3,b_5,b_7,b_8\}$, 则 $C(S_4)=\{3,5,6,7,8,n-1,n-3,\cdots,n-11,n-14\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-12\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{14}. 若 $b_8\in \mathrm{int}C_{14}$, 则 G 有两个 8 圈. 因此 $b_7\in \mathrm{int}C_{14}$. 令 $S_5=\{b_3,b_5,b_7,b_8,b_{14}\}$, 则 $C(S_5)=\{3,5,6,7,8,9,13,14,n-1,n-3,\cdots,n-12,n-14,n-15,n-18,n-21\}$. 若 $S_5=B$, 则 $n=27$, 从而 G 有两个 6 圈. 因此 $S_5\neq B$. 由于 $n-13\notin C(S_5)$, 故 G 有 b_{15}. 显然 $b_{14}\notin \mathrm{int}C_{15}$, 于是 $b_8\in \mathrm{int}C_{15}$. 从而 G 有两个 $(n-14)$ 圈，矛盾.

情形 2.2　$b_5\in \mathrm{int}C_7$, 此时 $f_k=C_5, f_{k-1}=C_4$ 和 $C_3\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_3$. 于是 $C(S_3)=\{3,4,5,7,n-1,n-3,n-4,n-5,n-6\}$. 由于 $n-7\notin C(S_3)$, 故 G 有 b_9. 显然 $b_7\notin \mathrm{int}C_9$, 故 $f_1=C_9$. 令 $S_4=\{b_3,b_5,b_7,b_9\}$, 则 $C(S_4)=\{3,4,5,7,9,n-1,n-3,\cdots,n-8,n-10,n-11,n-12,n-13\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-9\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{11}. 显然 $b_9\notin \mathrm{int}C_{11}$. 否则 G 有两个 4 圈，矛盾. 因此 $b_7\in \mathrm{int}C_{11}$, 从而 G 有两个 $(n-11)$ 圈，矛盾.

情形 2.3　$C_7\in\{f_0,f_1,f_k\}$. 此时 $\{f_0,f_1,f_k\}=\{C_3,C_5,C_7\}$. 显然 $f_2\neq C_4$. 否则或 G 有两个 5 圈或 G 有两个 7 圈. 因此 C_4 恰好包含两条桥. 令 b' 是含于 C_4 的一条桥. 若 b_3,b_5 和 b' 是相关的, 则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 $G^\star$ 含有严格旁圈 C_3,C_4 和 C_5. 从而 G 有两个长为 $|V(G^\star)|-3$ 的圈. 若 b_5,b_7 和 b' 是相关的, 则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 G 有两个长为 $|V(G^\star)|-5$ 的圈. 因此 b_3,b_7 和 b' 必是相关的. 此时 $f_k=C_5$. 于是 $C(S_3)=\{3,5,7,n-1,n-3,\cdots,n-6,n-8,n-9\}$. 由于 $n-7\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_9. 显然 $b_5\in \mathrm{int}C_9$, 从而 G 有两个 $(n-8)$ 圈，矛盾.

情形 3　$m=n-3$. 此时 G 有 C_{n-1} 和 C_{n-2}, 故 G 有 b_3 和 b_4. 于是 G 有 C_{n-3}, 矛盾.

情形 4　$m=n-4$. 显然 G 有 b_3 和 b_4. 令 $S_2=\{b_3,b_4\}$. 则 $C(S_2)=\{3,4,n-1,n-2,n-3\}$. 由于 $n-5\notin C(S_2)$, 故 G 有 b_7. 令 $S_3=\{b_3,b_4,b_7\}$.

情形 4.1　$b_3\in \mathrm{int}C_7$, 此时 $f_k=C_3, f_{k-1}=C_6$ 和 $C_4\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_4$. 于是 $C(S_3)=\{3,4,6,7,n-1,n-2,n-3,n-5,n-7\}$. 由于 $n-6\notin C(S_3)$ 和 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_8. 显然 $b_7\notin \mathrm{int}C_8$, 从而 $f_1=C_8$. 于是 G 有两个 $(n-7)$ 圈，矛盾.

情形 4.2　$b_4\in \mathrm{int}C_7$, 此时 $f_k=C_4, f_{k-1}=C_5$ 和 $C_3\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_5$. 此时 $C(S_3)=\{3,4,5,7,n-1,n-2,n-3,n-5,n-6\}$. 由于 $n-7\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_9. 显然 $b_7\notin \mathrm{int}C_9$, 从而 $f_1=C_9$. 令 $S_4=\{b_3,b_4,b_7,b_9\}$, 则 $C(S_4)=\{3,4,5,7,9,n-1,n-2,n-3,n-5,\cdots,n-10,n-12,n-13\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-11\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{13}. 若 $b_9\in \mathrm{int}C_{13}$, 则 G 有两个 5 圈. 因此 $b_7\in \mathrm{int}C_{13}$. 于是 G 有两个 $(n-12)$ 圈，矛盾.

情形 4.3　$C_7\in\{f_0,f_1,f_k\}$. 此时 $\{f_0,f_1,f_k\}=\{C_3,C_4,C_7\}$. 显然 C_5 不是旁圈. 若 $C_5=f_2$, 则 $C_4\notin\{f_0,f_1\}$, 否则 G 有两个 7 圈. 若 $C_5\neq f_2$, 则 $\{C_3,C_7\}=\{f_0,f_1\}$, 否则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 G 有两个长为 $l(l\in\{|V(G^\star)|-3,|V(G^\star)|-5\})$ 的圈. 于是 $f_k=C_4$. 此时

$C(S_3)=\{3,4,7,n-1,n-2,n-3,n-5,\cdots,n-8\}$. 由于 $n-9\notin C(S_3)$ 且 $S_3\neq B$, 故 G 有 b_{11}. 令 $S_4=\{b_3,b_4,b_7,b_{11}\}$.

情形 4.3.1 $b_3\in \mathrm{int}C_{11}$. 此时 $C(S_4)=\{3,4,5,6,7,10,11,n-1,n-2,n-3,n-5,\cdots,n-9,n-11\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-10\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{12}. 显然 $b_{11}\notin \mathrm{int}C_{12}$. 于是 $b_4\in \mathrm{int}C_{12}$. 从而 G 有两个 10 圈，矛盾.

情形 4.3.2 $b_4\in \mathrm{int}C_{11}$. 此时 $C(S_4)=\{3,4,7,9,11,n-1,n-2,n-3,n-5,\cdots,n-10,n-14,n-15\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由于 $n-11\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{13}. 显然 $b_{11}\notin \mathrm{int}C_{13}$. 于是 $b_3\in \mathrm{int}C_{13}$. 从而 G 有两个 7 圈，矛盾.

情形 5 $m\leq n-5$. 由于 G 有 C_{n-1} 和 C_{n-2}, 故 G 有 b_3 和 b_4. 令 $S_2=\{b_3,b_4\}$. 则 $C(S_2)=\{3,4,n-1,n-2,n-3\}$. 显然 G 有 b_6. 令 $S_3=\{b_3,b_4,b_6\}$, 显然 $b_4\notin \mathrm{int}C_6$.

倘若 $b_3\in \mathrm{int}C_6$, 则 $f_k=C_3, f_{k-1}=C_5$ 和 $C_4\in\{f_0,f_1\}$. 不妨设 $f_0=C_4$. 于是 $C(S_3)=\{3,4,5,6,n-1,\cdots,n-4,n-6\}$.

若 $m=n-5$ 即 G 不含 C_{n-5}, 则 G 有 C_{n-7}, 于是 G 有 b_9. 显然 $b_6\notin \mathrm{int}C_9$, 否则 G 有两个 5 圈. 容易推出 $f_1=C_9$. 令 $S_4=\{b_3,b_4,b_6,b_9\}$, 则 $C(S_4)=\{3,4,5,6,9,n-1,n-2,n-3,n-4,n-6,n-7,n-8,n-9,n-10,n-11,n-13\}$. 显然 $S_4\neq B$. 故 G 有 b_{14}, 若 $b_9\in \mathrm{int}C_{14}$, 则 G 有两个 5 圈. 因此 $b_6\in \mathrm{int}C_{14}$. 令 $S_5=\{b_3,b_4,b_6,b_9,b_{14}\}$, 则 $C(S_5)=\{3,4,5,6,9,10,13,14,n-1,n-2,n-3,n-4,n-6,\cdots,n-14,n-19,n-21\}$. 若 $S_5=B$, 则 $n=17$, 从而 G 有两个 6 圈. 因此 $S_5\neq B$. 故 G 有 b_{17}. 若 $b_{14}\in \mathrm{int}C_{17}$, 则 G 有两个 5 圈. 因此 $b_9\in \mathrm{int}C_{17}$. 则 G 有两个 10 圈，矛盾. 因此 $m\neq n-5$. 即 G 有 C_{n-5}, 故 G 有 b_7. 显然 $b_6\notin \mathrm{int}C_7$. 因此 $f_1=C_7$, 从而 G 有两个 $(n-6)$ 圈，矛盾.

因此 $\{f_0,f_1,f_k\}=\{C_3,C_4,C_6\}$. 于是 $C(S_3)=\{3,4,6,n-1,\cdots,n-7\}$. 从而 $\leq n-8$. 显然 C_5 不含 b_3, 否则 G 有两个 6 圈. 若 C_5 桥好包含 3 条桥，则 C_5 必含 b_4 和 b_6. 若 C_5 桥好包含两条桥且 b' 是含在 C_5 中的桥，则 b_4,b_6 和 b' 是相关的，否则存在 $G^\star\subseteq G$ 使 G 有两个长为 $l(l\in\{|V(G^\star)|-3,|V(G^\star)|-4\})$ 的圈. 因此 $f_k=C_3$ 且 $\{f_0,f_1\}=\{C_4,C_6\}$.

情形 5.1 $m=n-8$. 由事实 1 推出 G 有 b_{11}. 令 $S_4=\{b_3,b_4,b_6,b_{11}\}$.

情形 5.1.1 $b_4\in \mathrm{int}C_{11}$, 此时 $C(S_4)=\{3,4,5,6,7,9,11,n-1,\cdots,n-7,n-9,n-10\}$. 显然 $S_4\neq B$. 由事实 1 知 G 有 b_{13}. 令 $S_5=\{b_3,b_4,b_6,b_{11},b_{13}\}$. 若 $b_4\in \mathrm{int}C_{13}$, 则 $f_3=C_4$, 从而 G 有两个 4 圈. 因此 $b_3\in \mathrm{int}C_{13}$. 此时 $C(S_5)=\{3,4,5,6,7,9,11,12,13,n-1,\cdots,n-7,n-9,n-10,n-11,n-13,n-15,n-17,n-20\}$. 显然 $S_5\neq B$, 否则 $n=27$, 从而 G 有两个 7 圈. 于是 G 有 b_{14}. 若 $b_3\in \mathrm{int}C_{14}$, 则 $f_{k-2}=C_3$, 从而 G 有两个 3 圈. 因此 $b_4\in \mathrm{int}C_{14}$. 于是 $f_3=C_5$, 从而 G 有两个 5 圈，矛盾.

情形 5.1.2 $b_3\in \mathrm{int}C_{11}$, 此时 $C(S_4)=\{3,4,6,10,11,n-1,\cdots,n-7,n-9,n-11,n-13,n-15\}$. 显然 $S_4\neq B$. 故 G 有 b_{12}. 若 $b_4\in \mathrm{int}C_{12}$, 则 $f_2=C_6$, 从而 G 有两个 6 圈. 因此 $b_3\in \mathrm{int}C_{12}$. 于是 $f_{k-2}=C_3$, 从而 G 有两个 3 圈，矛盾.

情形 5.2 $m\leq n-9$. 此时 G 有 C_{n-8} 且 $n-8\notin C(S_3)$. 由事实 2 知 G 有 b_{10}. 显然 $b_3\in \mathrm{int}C_{10}$. 令 $S_4=\{b_3,b_4,b_6,b_{10}\}$. 则 $C(S_4)=\{3,4,6,9,10,n-1,\cdots,n-8,n-10,n-12,n-14\}$. 显然 $S_4\neq B$.

情形 5.2.1 $m=n-9$. 此时 G 有 C_{n-11}. 由于 $n-11\notin C(S_4)$, 故 G 有 b_{13}. 若 $b_4\in \mathrm{int}C_{13}$, 则 $f_2=C_7$, 从而 G 有两个 9 圈. 因此 $b_3\in \mathrm{int}C_{13}$ 令 $S_5=\{b_3,b_4,b_6,b_{10},b_{13}\}$. 则 $C(S_5)=\{3,4,5,6,9,10,12,13,n-1,\cdots,n-8,n-10,\cdots,n-15,n-17\}$. 若 $S_5=B$, 则

$n=27$, 从而 G 有两个 10 圈．因此 $S_5 \neq B$, 于是 G 有 b_{18}. 若 $b_4 \in \mathrm{int}C_{18}$, 则 $f_2 = C_{12}$, 从而 G 有两个 12 圈．因此 $b_3 \in \mathrm{int}C_{18}$. 从而 G 有两个 10 圈，矛盾．

情形 5.2.2 $m \leq n-10$. 由于 G 有 C_{n-9} 且 $n-9 \notin C(S_4)$. 故 G 有 b_{11}. 若 $b_4 \in \mathrm{int}C_{11}$, 则 $f_2 = C_5$, 从而 G 有两个 9 圈．因此 $b_3 \in \mathrm{int}C_{11}$. 此时 $f_{k-2} = C_3$, 从而 G 有两个 3 圈，又矛盾．

定理 2 $\mathit{\Gamma}_k^0$ 中的 AUP 图都是简单 MCD 图．

证 设 G 是 $\mathit{\Gamma}_k^0$ 中的 AUP 图．由定理 1 知 $G \in S(\overline{5}, 14)$. 显然 G 是 14 个点 17 条边的 AUP 图．容易验证这些图的顶点数和边数满足 [2] 中定理 4.1 的等式

$$f^{\star}(n) = n + \left[\frac{\sqrt{8n-15}-3}{2}\right] \quad (2 \leq n \leq 16).$$

因此 $\mathit{\Gamma}_k^0$ 中的 AUP 图都是简单 MCD 图．证毕．

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan Press, 1976.
[2] Shi Yongbing. On maximum cycle-distributed graphs. *Discrete Math.*, 1988, **71**: 57–71.
[3] Shi Yongbing. The number of edges in a maximum cycle-distributed graph. *Discrete Math.*, 1992, **104**: 205–209.
[4] Shi Yongbing. On Simple MCD graphs containing a subgraph homeomorphic to K_4. *Discrete Math.*, 1994, **126**: 325–338.
[5] Lai Chunhui. Graphs without repeated cycle lengths. *Australasian J. of Combinatorics*, 2003, **23**: 101–105.
[6] Boros E, Caro Y, Füredi A and Yuster B. Covering non-uniforn hypergraphs. *J. of Combinatorial Theory B*, 2001, **82**: 270–284.
[7] Shi Yongbing. Some theorems of uniquely pancyclic graphs. *Discrete Math.*, 1986, **59**: 167–180.
[8] Shi Yongbing. The number of cycles in a Hamilton graph. *Discrete Math.*, 1994, **133**: 249–257.
[9] Bondy J A, Lovasz L. Length of cycles in Halin graphs. *J. of Graph Theory*, 1985, **9**(3): 397–410.
[10] Malkevitch J. Cycle lengths in polytopal graphs. *Lecture Notes in Math.*, 1978, **642**: 364–370.

A CLASS OF ALMOST UNIQUELY PANCYCLIC GRAPHS

Shi Yongbing

(*Mathematics and Sciences College, Shanghai Teachers University, Shanghai* 200234)

Abstract Let G be a simple Hamilton graph with n vertices. If there exists $m (3 \leq m < n)$ such that G contains exactly one cycle of length l for every $l \in \{3, 4, \cdots, n\} - \{m\}$ and contains no cycle of length of m, then G is called almost uniquely pancyclic graph. Let $\mathit{\Gamma}_k^0$ denote the set of simple Hamilton graphs with $n+k$ edges and $\frac{k^2+5k-2}{2}$ cycles. In this paper all almost uniquely pancyclic graphs in $\mathit{\Gamma}_k^0$ are determined and are proved to be simple MCD graphs.

Key words Cycle, almost uniquely pancyclic graph, simple MCD graph.