系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
26(2) (2006, 4), 137–146

一类非定常对流占优扩散问题差分 - 流线扩散法的后处理*

金大永 周俊明
(河北工业大学理学院， 天津 300130)
刘 棠
(天津财经大学， 天津 300222)

摘要 讨论了一类非定常对流占优扩散方程的差分 - 流线扩散格式 (FDSD), 利用插值后处理技术，提高了特殊网格下该 FDSD 格式在双线性元空间的精度，从而按 $L^\infty(L^2(\Omega)$ 模达到最优.

关键词 差分 - 流线扩散法，后处理，对流占优.

MR(2000) 主题分类号 65M60

1 引 言

考虑对流占优扩散问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma(x,t)u+\beta(x,t)\cdot\nabla u-\varepsilon\Delta u=f(x,t)\quad \text{in } \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

$$u(x,t)=0\quad \text{on } \partial\Omega\times[0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\quad \text{in } \Omega. \tag{3}$$

的差分 - 流线扩散法, 其中 Ω 是矩形区域, $\beta(x,t)=(\beta_1(x,t),\beta_2(x,t))$, β_1, β_2 均属于 $W^{1,\infty}(D)$, $D=\Omega\times[0,T]$, $\sigma(x,t)\in L^\infty(L^\infty(\Omega))$, $f(x,t)\in L^2(L^2(\Omega))$, $\varepsilon\le h$ 为正常数，且 $\varepsilon<<K$, 这里 $K=\sup\limits_D\sqrt{(|\beta_1|^2+|\beta_2|^2)}$.

众所周知，对于对流扩散问题，标准有限元法常产生数值震荡，而古典粘性 Galerkin 法精度较低．近年来 Hughes 和 Brooks 在 [1, 2] 中提出了流线扩散 (SD) 法，它是一种求解定常的对流占优扩散问题上的粘性有限元方法，随后 Johnson 和 Nävert[3] 将此方法推广到发展型对流扩散问题，这种方法具有良好的数值稳定性和较高的精度，因此越来越受到人们的喜爱．传统 SD 方法采用时空有限元，虽然这可以增强数值计算的稳定性同时把时间和空间的精度很好的协调起来，却增加了计算的复杂程度，而且对非线性问题不便进行线性化处理．基于此，孙澈等人在 [4,5] 中对非线性对流占优扩散问题提出了差分 - 流线扩散法

* 国家自然科学基金 (10471103) 和 (10571039) 资助课题.
收稿日期：2003-12-20, 收到修改稿日期：2005-03-28.

(FDSD method) 即对时间导数进行差分离散，在空间方向采用 SD 离散. 这种方法，既保持了 SD 的本质特征，又方便了 SD 方法的实际应用.

文 [4] 中证明了线性对流占优扩散方程的FDSD 格式的解的存在和唯一性, 给出了 FDSD 格式解的误差分析，文 [6] 中采用了 Crank-Nicolson 差分 - 流线扩散法将时间精度提高到了 2 阶. 本文采用 [4] 的方法即对时间进行向后差分离散，空间上采用特殊网格，在双线性有限元空间中，利用 [7,8] 中的插值后处理技术，使其 FDSD 格式解的空间精度达到最优.

2 问题的 FDSD 格式及已有的结果

设 $\Gamma_h=\{\tau_k\}$ 为矩形区域 Ω 的一致矩形剖分，网格参数 $h<1$. 有限元空间

$$V^h=\{v: v\in H_0^1(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega}), v|_{\tau_k}\in Q_1(\tau_k),\quad \forall\tau_k\in\Gamma_h\},$$

其中

$$Q_1(\tau_k)=\mathrm{span}\{1,x,y,xy\},$$

V^h 具有以下逆性质存在与 h 无关的常数 $\widetilde{C}$, $\forall v\in V^h$ 都有

$$\|\nabla v\|_0\le\widetilde{C}h^{-1}\|v\|_0,\quad \|\triangle v\|_0\le\widetilde{C}h^{-1}\|\nabla v\|_0,$$

其中 $\|v\|_0=\big(\sum\limits_{\tau_k\in\Gamma_k}\|v\|_0^2\big)^{\frac12}$. $\|v\|_0^2=\int_{\tau_k}v^2\mathrm{d}x$,

做时间剖分 $0<t^1<t^2<\cdots<t^N=T$, 时间步长 $\triangle t=\frac{T}{N}=\rho h^{2-\varepsilon}$, ρ 为待定正数, $\varepsilon\in(0,1)$. 记 $t^n=n\Delta t$, $u^n=u(x,t^n)$, $\overline{\partial_t}u^n=(u^{n+1}-u^n)(\Delta t)^{-1}$. 在 $t=t^{n+1}(n\ge0)$ 处，对 u_t 做向前差分离散，得

$$\overline{\partial_t}u^{n+1}+\sigma(x,t^{n+1})u^{n+1}+\beta(x,t^{n+1})\cdot\nabla u^{n+1}-\varepsilon\Delta u^{n+1}=f(x,t^{n+1})+\mathrm{e}^{n+1}.$$

其中 $\mathrm{e}^{n+1}=\overline{\partial}_t u^{n+1}-(u_t)_{t=t^{n+1}}$. 易知

$$\|\mathrm{e}^{n+1}\|_0^2\le\frac12\|u_{tt}\|_0^2\Delta t,\qquad n=0,1,\cdots,N-1.$$

略去 e^{n+1}, 问题 (1–3) 的 FDSD 格式为求 $U^{n+1}\in V^h$, $n=0,1,\cdots,N-1$. 使得

$$a(U,v;n+1)=f(v;n+1),\quad \forall v\in V^h,\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}a(U,v;n+1)=&(\overline{\partial_t}U^{n+1}+\beta^{n+1}\cdot\nabla U^{n+1}+\sigma^{n+1}U^{n+1},v+\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\\&+\varepsilon(\nabla U^{n+1},\nabla v)-\varepsilon(\Delta U^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\end{aligned}\tag{5}$$

$$f(u,v;n+1)=(f^{n+1},v+\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v),\qquad (\cdot,\cdot)=\sum_{\tau_k\in\Gamma_h}(\cdot,\cdot)_{\tau_k}.$$

记 $K_\beta=\sup\limits_D\sqrt{\sum\beta_{i,x_i}^2}$. δ 为人工扩散参数，其选择方法有 1) $\tilde{c}\delta K_\beta\le\frac14$; 2) $\delta\tilde{c}K\le\frac18h$. 在实际计算中常取人工参数 $\delta=Ch$. 文 [4] 证明了格式 (4) 的解的存在、稳定和唯一性，其精度

达到了拟最优. 本文将证明当 $\varepsilon \le h$ 时，通过后处理，其精度可以达到最优，且给出了拟最优的误差估计.

3　特殊网格下的超逼近性质

记 $W(t)=\prod\limits_h u(t)$, $W^{n+1}=W(t^{n+1})$, $\eta^{n+1}=U^{n+1}-W^{n+1}$, $\theta^{n+1}=u^{n+1}-W^{n+1}$. 由方程 (1) 的弱形式及式 (4) 可得误差方程

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\partial_t}\eta^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v)+(\sigma^{n+1}\eta^{n+1}+\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v)\\
&+\varepsilon(\nabla\eta^{n+1},\nabla v)-\varepsilon(\Delta\eta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\\
=&(\overline{\partial_t}\theta^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v)+(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v)+(\sigma^{n+1}\theta^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v)\\
&+\varepsilon(\nabla\theta^{n+1},\nabla v)-\varepsilon(\Delta\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)+(\mathrm{e}^{n+1}, v+\delta\beta^{n+1}\nabla v).
\end{aligned}\tag{6}
$$

以下引理及定理中均假定 u 具有以下光滑性 $u\in L^\infty(H^3\bigcap H_0^1), u_t, u_{tt}\in L^2(H^2)$. 在 (6) 式中取 $v=\eta^{n+1}$, 并对左端各项进行估计，为此，$\forall\tau\in\Gamma_h$, 引入误差函数

$$E(x)=\frac{1}{2}((x-x_\tau)^2-h_x^2),$$

$$F(y)=\frac{1}{2}((y-y_\tau)^2-h_y^2),$$

其中 (x_τ, y_τ) 为单元 τ 的中心点坐标，h_x, h_y 分别为单元 τ 的 x 和 y 方向上边长的一半.

引理 3.1　设 $\beta^{n+1}=(\beta_1^{n+1},\beta_2^{n+1})\in L^\infty(W^{1,\infty}(\Omega))$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall v\in V^h$. 对 $n=0,1,2,\cdots,N-1$.

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1}, v)|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_0.$$

证　考虑两个相邻单元 τ_1 和 τ_2, 如图 3.1. 记 h_x, h_y 分别为 x 方向和 y 方向长度的一半，不妨设 $z=(x_i,y_j)$, $z_1=(x_i,y_j-2h_y)$, $z_4=(x_i+2h_x,y_j)$, $V(z_i)$ 为 V 在 z_i 点的函数值. z_1, z 为 τ_1 与 τ_2 的交点.

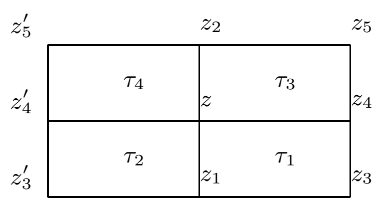

图 3.1

设单元的两边分别平行与 x 轴和 y 轴. $\varphi_z(x,y)$ 为有限元空间 V^h 的基函数，$z=(x_i,y_j)$

则

$$\varphi_z(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x_i+h_2x-x)(y+2h_y-y_j)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_1,\\ \dfrac{(x+2h_x-x_i)(y-y_j+2h_y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_2,\\ \dfrac{(x_i+2h_x-x)(y_j+2h_y-y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_3,\\ \dfrac{(x-x_i+2h_x)(y_j+2h_y-y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

首先， $\forall v\in V^h$, 由

$$v(x,y)=v(x_1,y_1)+(x-x_1)v_x(x_1,y_1)+(y-y_1)v_y(x_1,y_1)+(x-x_1)(y-y_1)v_{xy}$$

$$v_x(x_1,y_1)=v_x(x,y)-(y-y_1)v_{xy},v_y(x_1,y_1)=v_y(x,y)-(x-x_1)v_{xy}.$$

得

$$|v(x_1,y_1)|\le h_x|v_x|+h_y|v_y|+h_xh_y|v_{xy}|.$$

而

$$(\beta_1^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},v)=-(\beta_{1x}^{n+1}\theta^{n+1},v)-(\beta_1^{n+1}\theta^{n+1},v_x)-(\beta_{2y}^{n+1}\theta^{n+1},v)-(\beta_2^{n+1}\theta^{n+1},v_y),$$

由 Schwartz 不等式及插值基本定理

$$|(\beta_{1x}^{n+1}\theta^{n+1},v)+(\beta_{2y}^{n+1}\theta^{n+1},v)|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_2\|v\|_0,$$

在 τ_2 中令 $X=x+h_x,\ Y=y$,

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\tau_1\bigcup\tau_2}\beta_1^{n+1}\theta^{n+1}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big|\\
=&\int_{\tau_1\bigcup\tau_2}\beta_1^{n+1}\theta^{n+1}v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_{\tau_1}(\beta_1^{n+1}(x,y)\theta^{n+1}(x,y)-\beta_1^{n+1}(x+2h_x,y)\theta^{n+1}(x+2h_x,y))v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_{\tau_1}(\beta_1^{n+1}(x,y)-\beta_1^{n+1}(x+2h_x,y))\theta^{n+1}(x,y))v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\int_{\tau_1}\beta_1^{n+1}(x+h_x,y)(\theta^{n+1}(x,y)-\theta^{n+1}(x+h_x,y))v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\le& Ch^2(\|u^{n+1}\|_{2,\tau_1\bigcup\tau_2}+\|u^{n+1}\|_{3,\tau_1\bigcup\tau_2})\|v\|_{0,\tau_1\bigcup\tau_2}\\
\le& Ch^2(\|u^{n+1}\|_{3,\tau_1\bigcup\tau_2}\|v\|_{0,\tau_1\bigcup\tau_2}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&|(\theta^{n+1}(x,y)-\theta^{n+1}(x+2h_x,y))|\\
=&|[u^{n+1}(x,y)-u^{n+1}(x+2h_x,y)]-[W^{n+1}(x,y)-W^{n+1}(x+2h_x,y)]|\\
\le& Ch^2\|u^{n+1}(x,y)-u^{n+1}(x+2h_x,y)\|_2\\
=&Ch^2\Big\|\int_{x+2h_x}^{x}\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}(z,y)\mathrm{d}z\Big\|_2\le Ch^3\|u^{n+1}\|_{3,\tau_1\bigcup\tau_2}\end{aligned}$$

从而

$$|(\beta_1^{n+1}\theta^{n+1}, v_x)| \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_0$$

同理可证

$$|(\beta_1^{n+1}\theta^{n+1}, v_y)| \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_0$$

综合以上各式本引理得证.

引理 3.2[7]　在引理 3.1 的条件下，成立

$$(\theta_x^{n+1}, v_x) \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

$$(\theta_y^{n+1}, v_y) \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

证

$$\begin{aligned}(\theta_x^{n+1}, v_x) =& \sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau \Big[Fv_x - \frac{1}{3}(F^2)_y v_{xy} u_{xyy}^{n+1}\Big]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \le& Ch^2\|u^{n+1}\|_1\|v\|_1.\end{aligned}$$

另一式同理可证.

引理 3.3　设 $u\in H^3(\Omega)\bigcup H_0^1(\Omega)$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall v\in V^h$, 成立

$$(\theta_y^{n+1}, v_x) \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

$$(\theta_x^{n+1}, v_y) \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

证

$$\begin{aligned}(\theta_x^{n+1}, v_y) =& \sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau F u_{xyy}^{n+1}(v_y-(x-x_\tau)v_{xy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau u_{xxy}^{n+1}E(x)v_x - \Big(\int_{\partial\Omega_{\text{上}}} - \int_{\partial\Omega_{\text{下}}}\Big)u_{xx}^{n+1}E(x)v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

当 $v\in V^h$ 时，$v_x|_{\partial\Omega_{\text{上}}} = v_x|_{\partial\Omega_{\text{下}}} = 0$, 故

$$\int_\Omega \theta_x^{n+1}v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

同理可证

$$|(\theta_y^{n+1}, v_x)| \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1.$$

引理 3.4　在引理 3.2 的条件下，成立以下不等式

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta, \delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)| \le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_0.$$

证　引入 $\beta_i^{n+1}, (i=1,2)$ 的平均函数

$$\overline{\beta}_i^{n+1}|_\tau = \int_\tau \beta_i^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{1}{|\tau|},$$

这里 $|\tau|$ 为单元 τ 的面积，则

$$|\beta_i^{n+1}-\overline{\beta}_i^{n+1}|_\tau|\le ChK_\beta.$$

$$\begin{aligned}(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\le&\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla v)_\tau\\&+\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\beta^{n+1}-\overline{\beta}^{n+1})\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\\&+\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta(\beta^{n+1}-\overline{\beta}^{n+1})\cdot\nabla v)\\\le&\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla v)_\tau\\&+C\|\beta^{n+1}\|_{1,\infty}h^2\delta\|\beta^{n+1}\cdot\nabla v\|\|u^{n+1}\|_2\\&+Ch^2\delta\|\beta^{n+1}\|_{0,\infty}\|\beta^{n+1}\|_{1,\infty}\|u^{n+1}\|_2\|v\|_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla v)_\tau=&\delta\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau(\overline{\beta}_1^{n+1})^2\theta_x^{n+1}v_x+(\overline{\beta}_2^{n+1})^2\theta_y^{n+1}v_y\\&+\overline{\beta}_1^{n+1}\overline{\beta}_2^{n+1}\theta_x^{n+1}v_y+\overline{\beta}_1^{n+1}\overline{\beta}_2^{n+1}\theta_y^{n+1}v_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

注意到相邻单元 τ_k,τ_l 有

$$|\overline{\beta}_i^{n+1}|\tau_k-\overline{\beta}_i^{n+1}|\tau_l|\le Ch.$$

故由引理 3.2 和引理 3.3

$$\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla v)_\tau\le Ch^2\delta\|u^{n+1}\|_3\|v\|_1,$$

再结合 $\delta=O(h)$ 和逆性质，本引理得证.

引理 3.5 设 β_1^{n+1}, β_2^{n+1} 均属于 $W^{1,\infty}(\Omega)$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall v\in V^h$. 则

$$(\varepsilon\Delta\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|v\|_0.$$

证

$$\begin{aligned}&(\varepsilon\Delta\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla v)\\=&(\varepsilon\Delta\theta^{n+1},\delta(\beta^{n+1}-\overline{\beta}^{n+1})\cdot\nabla v)+(\varepsilon\Delta\theta^{n+1},\delta\overline{\beta}^{n+1}\cdot\nabla v)\\=&\delta\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau\varepsilon\Delta\theta^{n+1}\overline{\beta}_1^{n+1}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau\varepsilon\Delta\theta^{n+1}\overline{\beta}_2^{n+1}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+C\varepsilon\delta\|\beta^{n+1}\|_{1,\infty}\|u^{n+1}\|_2\|v\|_0.\end{aligned}$$

由引理 3.2 引理 3.3 和 $\varepsilon\le h$, $\delta=O(h)$ 得

$$\Big|\delta\int_{\tau_1\bigcup\tau_3}\varepsilon\Delta\theta^{n+1}\overline{\beta}_1^{n+1}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big|\le\delta\varepsilon C\|u^{n+1}\|_{3,\tau_1\bigcup\tau_3}\|v\|_{0,\tau_1\bigcup\tau_3},$$

和

$$\Big|\delta\int_{\tau_1\bigcup\tau_2}\varepsilon\Delta\theta^{n+1}\overline{\beta}_2^{n+1}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big|\le\delta\varepsilon C\|u^{n+1}\|_{3,\tau_1\bigcup\tau_3}\|v\|_{0,\tau_1\bigcup\tau_3},$$

综合以上三式，本引理得证.

引理 3.6 β_1, β_2 均属于 $W^{1,\infty}(D)$, $D=\Omega\times[0,T]$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall v\in V^h$. $m=0,1,\cdots,N-1$. $\sigma(x,t)\in L^\infty(L^\infty(\Omega))$, 则

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{m}\varepsilon\|\nabla\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m}\delta\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+\|\eta^m\|_0^2\\ \le&Ch^4+\sum_{n=0}^{m}\|\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t++\frac{1}{2}\delta\sum_{n=0}^{m}\|\overline{\partial_t}\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t.\end{aligned}$$

证　(6) 式中取 $v=\eta^{n+1}$ 左端各项可直接可直接估计的有

$$(\varepsilon\nabla\eta^{n+1},\nabla\eta^{n+1})=\varepsilon\|\nabla\eta^{n+1})\|_0^2,$$

$$(\overline{\partial_t}\eta^{n+1},\eta^{n+1})\ge\frac{1}{2\Delta t}(\|\eta^{n+1}\|_0^2-\|\eta^n\|_0^2),$$

$$(\overline{\partial}_t\eta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})\ge-\frac{1}{2}\delta\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2-\frac{1}{2}\delta\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2,$$

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})|=\delta\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2.$$

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1},\eta^{n+1})|=\Big|-\frac{1}{2}((\mathbf{div}\beta^{n+1})\eta^{n+1},\eta^{n+1})\Big|_0\le\frac{1}{2}\|\beta\|_{1,\infty}\|\eta^{n+1}\|_0^2\le C\|\eta^{n+1}\|_0^2,$$

$$|(\sigma^{n+1}\eta^{n+1},\eta^{n+1}+\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})|\le C\|\eta^{n+1}\|_0^2,$$

$$a(\eta,v;n+1)\ge\varepsilon\|\nabla\eta^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2\Delta t}(\|\eta^{n+1}\|_0^2-\|\eta^n\|_0^2)-\frac{1}{2}\delta\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2-C\|\eta^{n+1}\|_0^2.$$

(6) 式右端可直接估计的各式有

$$|(\overline{\partial}_t\theta^{n+1},\eta^{n+1})|\le\frac{1}{\Delta t}h^2\|u^{n+1}-u^n\|_2\|\eta^{n+1}\|_0,$$

$$\|\overline{\partial_t}u^{n+1}\|_2\le\|\overline{\partial_t}u^{n+1}-u_t(t_{n+1})\|_2+\|\theta_t(t_{n+1})\|_2,$$

$$\|\overline{\partial_t}u^{n+1}-u_t(t_{n+1})\|_2\le(\Delta t)^{-1}\Big\|\int_{t^n}^{t^{n+1}}(s-t_n)u_{tt}(s)\mathrm{d}s\Big\|_2\le\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u_{tt}(s)\|_2\mathrm{d}s,$$

$$|(\overline{\partial}_t\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})|\le Ch^2\|u^{n+1}-u^n\|_2\|\eta^{n+1}\|_0\frac{1}{\Delta t},$$

$$|(\sigma^{n+1}\theta^{n+1},\eta^{n+1})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_2\|\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|(\sigma^{n+1}\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_2\delta\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0\le\frac{h^2}{4}\|u^{n+1}\|_2\|\eta^{n+1}\|_0,$$

$$\Delta ta(\theta,v;n+1)\le Ch^2\Big(\int_{t^n}^{t_{n+1}}\|u_{tt}(s)\|_2\mathrm{d}s+\|u_t^{n+1}\|_2+\|u^{n+1}\|_3\Big)\|\eta^{n+1}\|_0,$$

综合以上各式及引理 3.1–3.6 经计算得证.

引理 3.7[4] 对 $m=0,1,\cdots,N-1$, 有

$$\delta^2\sum_{n=0}^{m}\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t\le C\sum_{n=0}^{m}\|\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+C_1(h^4+(\Delta t)^2).$$

引理 3.8 对 $m=0,1,\cdots,N-1$, 成立以下不等式

$$\begin{aligned}&\delta\Big(\frac{3}{4}-\frac{3}{8\varepsilon_1}\Big)\sum_{n=0}^{m}\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t-\Big(\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{1}{8}\Big)\delta\sum_{n=0}^{m}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t\\ \le& C\sum_{n=0}^{m}\|\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+C(h^4+(\Delta t)^2).\end{aligned}$$

证 在 (6) 式中取 $v=\overline{\partial}_t\eta^{n+1}$ 并估计各项，左端各项

$$(\overline{\partial}_t\eta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1})=\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2,$$

由 δ 的规定得

$$(\overline{\partial}_t\eta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\overline{\partial}_t\eta^{n+1})=-\frac{1}{2}\delta((\mathbf{div}\beta^{n+1})\overline{\partial}_t\eta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1})\ge-\frac{1}{8}\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1}|\le\frac{\varepsilon_1}{2}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2+\frac{1}{8\varepsilon_1}\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2,$$

上式利用了 ε 不等式.

$$\begin{aligned}|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla(\overline{\partial}_t\eta^{n+1}))|\le&\delta K\tilde{C}h^{-1}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0\\ \le&\frac{1}{8}(\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2+\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2),\end{aligned}$$

$$|(\sigma^{n+1}\eta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1}+\delta\beta\cdot\nabla\overline{\partial}_t\eta^{n+1})|\le\frac{C}{\delta}\|\eta^{n+1}\|_0^2+\delta\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0^2,$$

$$(\varepsilon\nabla\eta^{n+1},\nabla\overline{\partial}_t\eta^{n+1})\ge\frac{\varepsilon}{\Delta t}(\|\nabla\eta^{n+1}\|_0^2-\|\nabla\eta^n\|_0^2).$$

右端各项有各引理及 Schwartz 不等式得

$$|(\sigma^{n+1}\theta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1}+\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\overline{\partial}_t\eta^{n+1})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_2\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|(\varepsilon\nabla\theta^{n+1},\nabla\overline{\partial_t\eta^{n+1}})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\overline{\partial_t\eta^{n+1}})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta^{n+1},\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\overline{\partial_t\eta^{n+1}})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,$$

$$|(\beta^{n+1}\cdot\nabla\theta,\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1})|\le Ch^2\|u^{n+1}\|_3\|\eta^{n+1}\|_0,$$

$$\begin{aligned}|(\overline{\partial}_t\theta^{n+1},\overline{\partial}_t\eta^{n+1}+\delta\beta^{n+1}\cdot\nabla\overline{\partial}_t\eta^{n+1})|\le&Ch^2\frac{1}{\Delta t}\|u^{n+1}-u^n\|_2\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0\\ \le&Ch^2\Big(\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u_{tt}(s)\|_2\mathrm{d}s+\|u_t^{n+1}\|_2\Big)\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0,\end{aligned}$$

$$a(\theta,\overline{\partial}_t\eta;n+1)\leq Ch^2\|u^{n+1}\|_3(\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0+\|\eta^{n+1}\|_0)+\Big(\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u_{tt}(s)\|_2\mathrm{d}s+\|u_t\|_2\Big)\|\overline{\partial}_t\eta^{n+1}\|_0.$$

其中

$$\begin{aligned}\|u_t^{n+1}\|_2\leq&\Delta t^{-1}\Big[\int_{t^n}^{t^{n+1}}(s-t_n)\|u_{tt}(s)\|_2\mathrm{d}s+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u(s)\|_2\mathrm{d}s\Big]\\ \leq&\Delta t^{-1}\Big(\Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u_tt(s)\|_2\mathrm{d}s+\int_{t^n}^{t^{n+1}}\|u(s)\|_2\mathrm{d}s\Big).\end{aligned}$$

综合以上各式并利用引理 3.7, 经详细计算，可得本引理.

由离散 Gronwall 不等式，取适当小的 ε_1, 再由引理 3.6 和引理 3.8 直接可得如下定理

定理　3.1　对 $m=0,1,\cdots,N-1$, 当 Δt 适当小时，成立以下不等式

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq m\leq N-1}\|\eta^{m+1}\|_0^2+\delta\sum_{n=0}^{m}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+\delta\sum_{n=0}^{m}\|\overline{\partial_t}\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t+\varepsilon\sum_{n=0}^{m}\|\nabla\eta^{n+1}\|_0^2\Delta t\\ \leq&C\{h^4+(\Delta t)^2\}.\end{aligned}$$

4　插值后处理

定理 3.1 给出了 u^h-u^I 的误差估计，以下我们应用文 [7] 中的插值后处理技术来提高空间上的精度．为此，将相邻的四个单元合并成一个大单元 $\overline{e}$, 在 $\overline{e}$ 上 $\prod_{2h}^2 u$ 为 u 的双二次插值．满足

1) $\|\prod\limits_{2h}^{2}u-u\|_l\leq Ch^{3-l}\|u\|_3, l=0,1.$

2) $\prod\limits_{2h}^{2}u^I=\prod\limits_{2h}u.$

则

$$w=I_{2h}u^h-u=I_{2h}(u^h-u^I)+I_{2h}u-u.$$

由插值性质、定理 3.1 、及三角不等式经计算可得如下定理

定理　4.1　在定理 3.1 条件下，成立如下估计式

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq m\leq N-1}\|w^{m+1}\|_0^2+\delta\sum_{n=0}^{m}\|\beta^{n+1}\cdot\nabla w^{n+1}\|_0^2\Delta t+\delta\sum_{n=0}^{m}\|\overline{\partial_t}w^{n+1}\|_0^2\Delta t+\varepsilon\sum_{n=0}^{m}\|\nabla w^{n+1}\|_0^2\Delta t\\ \leq&C\{h^4+(\Delta t)^2\}.\end{aligned}$$

参　考　文　献

[1] Hughes T J and Brooks A. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. AMD Vol. 34. F.E.M. for Convection Dominated Flows. ASME New York, 1979.

[2] Hughes T J and Brooks A. A theoretical framework for Petrov-galerkin methods with discontinuous weighting functions: Application to the streamline-upwind procedure. finite elements in fluids. Wiley, New York, 1982.

[3] Nävert Johnson C U. An analysis of some finite element methods for advection-diffusion problems. Analytical and Numerical Pooroaches to Asymptotic Prlblems in Analysis(O.Axelsson et al.,eds.), North-Holland , Amsterdam, 1981. MR 82e:65127.
[4] 张强．线性对流扩散问题的差分流线扩散法．应用数学， 1999, **12**(3): 101–106.
[5] 张强，孙澈．非线性对流扩散问题的差分流线扩散法．计算数学， 1998, **20**(2): 211–224.
[6] 张争茹，羊丹平．，对流扩散问题的 Crank-Nicolson 差分 - 流线扩散法．高等学校计算数学学报， 2002, **4**: 293–299.
[7] 林群，严宁宁．高效有限元构造与分析．石家庄：河北大学出版社， 1996.
[8] 林群，朱起定．有限元的预处理和后处理理论．上海：上海科学技术出版社， 1994.

THE POSTPROCESSING OF FINITE DIFFERENCE-STREAMLINE DIFFUSION METHOD FOR A CLASS OF TIME-DEPENDENT CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS

Jin Dayong Zhou Junming

(*Hebei University of Technology, Tianjin* 300130)

Liu Tang

(*TianjinUniversity of Finance and Economics, Tianjin* 300222)

Abstract In this paper, we consider the finite difference-streamline diffusion (FDSD) method with bilinear element for time-dependent linear convection dominated diffusion problems. The optimal error estimates of 1-order in time and 2-order in space are derived for FDSD scheme.

Key words Difference-streamline diffusion method, postprocessing, convection-dominated.