系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
6 (4) (1986), 258—262

一类新的泛圈图

田 丰
(中国科学院系统科学研究所)

施容华
(青海师范大学数学系，西宁)

本文所说的图都是简单无向图. 未定义的术语和记号参见[2].

设 $G=(V, E)$ 的 n 阶图 $(n\geqslant 3)$, 若 G 中含有 Hamilton 圈, 则称 G 是 H-图. 若 G 中含有从 3 到 n 的所有长度的圈,则称 G 为泛圈图.

如下两个定理是众所周知的.

定理 1 (Ore, 1960). 若在 n 阶图 G 中,有

$$uv \notin E(G) \Rightarrow d(u)+d(v)\geqslant n,$$

则 G 是 H-图.

定理 2 (Chvátal, 1972). 若 n 阶图 G 的非降度序列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 满足

$$d_j \leqslant j < \frac{n}{2} \Rightarrow d_{n-j}\geqslant n-j,$$

则 G 是 H-图.

Bondy[3] 和 Schmeichel, Hakimi[4] 分别证明了: 在定理 1 或 2 的条件下,图 G 或者是泛圈图,或者同构于 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.

我们用 $\mathscr{F}_n$ 表示满足如下条件的 n 阶图的集合: G 是 n 阶 2-连通图, 对任意两点 u, v,

$$d(u, v)=2 \Rightarrow \max(d(u), d(v))\geqslant \frac{n}{2}.$$

1984 年,范更华给出了如下定理.

定理 3 (范更华, 1984). 若 $G\in\mathscr{F}_n$, 则 G 是 H-图.

本文中,我们刻划了 $G\in\mathscr{F}_n$ 的结构特征,由此给出了定理 3 的一个简单证明, 并进一步证明了

定理 4. 若 $G\in\mathscr{F}_n$, 则除了三个可能的例外图, G 是泛圈图. 这三个例外图是:

(1) $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$;

(2) $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}-e$: 从 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 中丢去一边所得到的图;

1985 年 7 月 1 日收到.

(3) F_{4r}:

$$V(F_{4r})=\{x_1, x_2, \cdots, x_{2r}, y_1, y_2, \cdots, y_{2r}\},$$

$$E(F_{4r})=\{x_ix_j: 1\leqslant i<j\leqslant 2r\}\cup\{y_{2t-1}y_{2t}: 1\leqslant t\leqslant r\}\cup \{x_iy_i: 1\leqslant i\leqslant 2r\}.$$

为方便起见,我们引进如下记号.

给 n 阶图 G, 令 $S_0(G)=\left\{v\in V(G): d(v)\geqslant\frac{n}{2}\right\}$.

若 $S_0(G)\neq V(G)$, 以 $S_1(G), \cdots, S_k(G)$ 表示 $G-S_0(G)$ 中各分图的点集. 对 $i=1, 2, \cdots, k$, 令

$$X_i(G)=\{v\in S_0(G): \text{存在 } u\in S_i(G), uv\in E(G)\},$$
$$Y_i(G)=\{v\in S_i(G): \text{存在 } u\in S_0(G), uv\in E(G)\}$$

(在不会引起混淆时,我们省略每个记号中的括号及 G).

基本引理. n 阶图 $G\in\mathscr{F}_n$ 的充要条件是 G 满足如下条件 (P_1)—(P_4):

(P_1) $S_0\neq\varnothing$;

当 $k\geqslant 1$ 时,对 $i, j=1, 2, \cdots, k(i\neq j)$,

(P_2) $G[S_i]$ 是完全图;

(P_3) $|X_i|\geqslant 2$; 当 $|S_i|\geqslant 2$ 时,有 $|Y_i|\geqslant 2$;

(P_4) $X_i\cap X_j=\varnothing$.

证. 若 $G\in\mathscr{F}_n$, G 满足 (P_1) 是显然的. 因 G 是 2-连通的,故 G 满足 (P_3). 因对 G 中任两个点 u, v, $d(u, v)=2\Rightarrow\max(d(u), d(v))\geqslant\frac{n}{2}$, 故 G 必满足 (P_2)、(P_4).

反之,若 G 满足 (P_1)—(P_4), 则不难证明 $\kappa(G)\geqslant 2$, 且任何两个度小于 $\frac{n}{2}$ 的点之间的距离不为 2. 于是 $G\in\mathscr{F}_n$.

由基本引理立即可推出定理 3. 事实上, 根据 Bondy, Chvátal 关于图的闭包运算的结论[5],在考察 G 中 Hamilton 圈的存在性时, 不妨设 $G[S_0]$ 是完全图. 这样, 由 (P_1)—(P_4) 立即推知 G 是 H-图.

现在我们来证明定理 4.

设 $G\in\mathscr{F}_n$, 由本文开始提到的 Bondy 的结果[3],不妨设 $k\geqslant 1$, 即 $S_0\neq V(G)$.

情形 1. $k=1$.

我们证明这时图 G 是泛圈图. 因 $k=1$, 故不妨设 $n\geqslant 5$.

设 G 的非降度序列是

$$d_1, d_2, \cdots, d_j, d_{j+1}, \cdots, d_n,$$

这里 $d_i=d(v_i)$, $S_1=\{v_1, v_2, \cdots, v_j\}$, $S_0=\{v_{j+1}, v_{j+2}, \cdots, v_n\}$, $j<\frac{n}{2}$. 根据基本引理,我们有

$$j-1\leqslant d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_{j-2},\ j\leqslant d_{j-1}\leqslant d_j,$$
$$\frac{n}{2}\leqslant d_{j+1}\leqslant d_{j+2}\leqslant\cdots\leqslant d_n.$$

若 $d_j > j$，则 G 的度序列满足定理 2 的条件．因 $k=1$，故 $G \neq K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$，从而 G 是泛圈图．

设 $d_j = j$，则 $j \geqslant 2$，并且 S_1 中每一点至多与 S_0 中的一点相邻，而 S_0 中必存在一点，不妨设为 v_n，它与 S_1 中的点不相邻．由基本引理，$d_{j-1} = j$，$j-1 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_{j-2} \leqslant j$．

若 S_1 中存在一点，设为 v_1，使 $d(v_1) = j-1$，则 $G - v_1 - v_n \in \mathscr{F}_{n-2}$，故 $G-v_1-v_n$ 是 H-图，即 G 有 $(n-2)$-圈，因 $d(v_n) \geqslant \frac{n}{2}$，于是 G 是泛圈图．所以不妨设

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_{j-2} = d_{j-1} = d_j = j.$$

如果 $j=2$，考虑图 $G_{v_1v_2} - v_n$（这里 $G_{v_1v_2}$ 表示由 G 通过收缩边 v_1v_2 所得到的简单图）．易见 $G_{v_1v_2}-v_n \in \mathscr{F}_{n-2}$，于是 $G-v_n$ 有 $(n-1)$-圈，因 $d(v_n) \geqslant \frac{n}{2}$，故 G 是泛圈图．

设 $j>2$．不妨设 v_{j-2}, v_j 在 S_0 中的邻点分别是 u_{j-2}, u_j，使 $u_{j-2} \neq u_j$，而 v_{j-1} 在 S_0 中的邻点 u_{j-1}，使 $u_{j-1} \neq u_j$（否则，把下标为 $j-2$ 和 j 的点的标号互换）． 令 $G' = G_{v_{j-1}v_j}$，以 w 记边 $v_{j-1}v_j$ 的收缩点．易见

$$d'(v_i) = j-1,\quad i = 1, 2, \cdots, j-2;$$
$$d'(w) = j,$$
$$d'(v_i) = d(v_i),\quad i = j+1, \cdots, n.$$

这里 $d'(u)$ 表示点 u 在 G' 中的度．

令 $G'' = G' - v_n$．若以 $d''(u)$ 记点 u 在 G'' 中的度，则有

$$d''(v_i) = j-1,\qquad i = 1, 2, \cdots, j-2;$$
$$d''(w) = j,$$
$$d''(v_i) \geqslant d'(v_i) - 1 = d(v_i) - 1 \geqslant \frac{n}{2} - 1,\ i = j+1, \cdots, n-1.$$

G'' 是 $n-2$ 阶图．当 $j < \frac{n}{2} - 1$ 时，

$$S_0(G'') = \{v_{j+1}, \cdots, v_{n-1}\},\ S_1(G'') = \{v_1, v_2, \cdots, v_{j-2}, w\}.$$

于是 $G'' \in \mathscr{F}_{n-2}$，则 $G - v_n$ 或者有 $(n-2)$-圈，或者有 $(n-1)$-圈．因 $d(v_n) \geqslant \frac{n}{2}$，故 G 是泛圈图．当 $j = \frac{n}{2} - 1$ 时，

$$S_0(G'') = \{w, v_{j+1}, \cdots, v_{n-1}\},\ S_1(G'') = \{v_1, v_2, \cdots, v_{j-2}\}.$$

易见亦有 $G'' \in \mathscr{F}_{n-2}$．类似证得 G 是泛圈图．

情形 2. $k \geqslant 2$．

对 n 施行归纳法．对较小的 n，可直接验证结论成立．

若某个 $S_i (i \neq 0)$ 中存在一点 x，使 $N(x) \cap S_0 = \varnothing$，则 $G - x \in \mathscr{F}_{n-1}$．由此推知 G 是泛圈图．所以不妨设任一个 S_i 中的任一点 x，有 $N(x) \cap S_0 \neq \varnothing$．

分如下四个子情形讨论，下面总设 $1 \leqslant i,\ j \leqslant k$．

子情形 1．存在 S_i, S_j 使 $|S_i| = |S_j| = 1 (i \neq j)$．

记 $S_i = \{x\}$，$S_j = \{y\}$，则 $G-x-y \in \mathscr{F}_{n-2}$ 但 $G-x-y$ 不可能是 $(n-2)$ 阶

例外图 F_{n-2} 和 $K_{\frac{n-2}{2},\frac{n-2}{2}}-e$. 若 $G-x-y\cong K_{\frac{n-2}{2},\frac{n-2}{2}}$ 则不难推知 G 或者是泛圈图,或者同构于 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}-e$. 故不妨设 $G-x-y$ 是泛圈图.为了证明定理,只要证明: 若 G 不含 $(n-1)$-圈,则 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}-e$.

设 $u_1u_2\cdots u_{n-2}u_1$ 是 $G-x-y$ 的 $(n-2)$-圈. 设 xu_1, $xu_j\in E(G)$ $(2<j<n-2)$. 易见 xu_2, $xu_{j+1}\notin E(G)$, 故 $d(u_2)$, $d(u_{j+1})\geqslant\frac{n}{2}$.

考虑 $n-1$ 个点的链

$$P=u_2u_3\cdots u_jxu_1u_{n-2}\cdots u_{j+1},$$

因 G 不含 $(n-1)$-圈, 故

$$d_P(u_2)+d_P(u_{j+1})\leqslant n-2.$$

由 $d(u_2)$, $d(u_{j+1})\geqslant\frac{n}{2}$, 推知 yu_2, $yu_{j+1}\in E(G)$.

类似地,考虑 $n-1$ 点的链

$$u_3u_4\cdots u_{j+1}yu_2u_1\cdots u_{j+2},$$

推知 xu_3, $xu_{j+2}\in E(G)$. 重复这个过程,可得 $N(x)=\{u_1,u_3,\cdots,u_{2r-1}\}$, $N(y)=\{u_2,u_4,\cdots,u_{2r}\}$, $n=2r+2$. 易见 $N(x)$, $N(y)$ 分别是点无关集(否则 G 有 $(n-1)$-圈). 故 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}-xy$.

子情形 2. 每个 S_i 都恰含两点,且至多除一个譬如 S_1 外, 其它的 S_i 中的每个点恰与 S_0 中一点相邻.

设 S_0 中的每一点都与某个 S_i 中的点相邻,若 S_1 中的每个点恰与 S_0 中一点相邻,则必有 $n=4r$, 及 $G\cong F_{4r}$; 否则,易见 G 是泛圈图.

设存在 $z\in S_0$, z 与任一 S_i 的点均不相邻. 令 $xy=G[S_1]$, 考虑 $G_{xy}-z$. 易见 $G_{xy}-z\in\mathscr{F}_{n-2}$. 于是 $G-z$ 或者有 $(n-2)$-圈,或者有 $(n-1)$-圈. 因 $d(z)\geqslant\frac{n}{2}$, 故 G 是泛圈图.

子情形 3. 恰有一个 S_j, 使 $|S_j|=1$, 而 $S_1,S_2,\cdots,S_{j-1},S_{j+1},\cdots,S_k$ 中每个都恰含两点,且这些 $S_i(i\neq j)$ 中的每个点恰与 S_0 中一点相邻.

设 $S_j=\{x\}$, $S_i=\{y,z\}$ $(i\neq j)$. 则 $G-y-z\in\mathscr{F}_{n-2}$ 且它不是 $(n-2)$ 阶例外图,故 $G-y-z$ 是泛圈图.

因 $G_{yz}-x\in\mathscr{F}_{n-2}$ 故 $G_{yz}-x$ 是 H-图,从而 $G-x$ 是 H-图,即 G 有 $(n-1)$-圈.

这样一来, G 是泛圈图.

子情形 4. 上述子情形均不出现.

这时,必存在 S_i, $S_j(i\neq j)$, 使 S_i, S_j 中至少有一个,例如 S_i, 使 $|S_i|\geqslant 2$, 并且存在 $x\in S_i$, $y\in S_j$ 使 $G-x-y\in\mathscr{F}_{n-2}$.

易见, $G-x-y$ 不可能是 $(n-2)$ 阶例外图, 于是 $G-x-y$ 是泛圈图. 余下只要证明 G 含 $(n-1)$-圈即可.

设 $u_1u_2\cdots u_{n-2}u_1$ 是 $G-x-y$ 的 $(n-2)$-圈. 根据假设, $N(x)\cap S_0\neq\varnothing$. 于是存

在一点，不妨设为 u_1，使 $xu_1\in E(G)$，及 $d(u_1)\geqslant\frac{n}{2}$. 因 $|S_i|\geqslant 2$，可设 $u_j\in S_i\setminus\{x\}$. 于是 $xu_j\in E(G)$，及 $d(u_j)<\frac{n}{2}$.

若 G 不含 $(n-1)$-圈，则 $xu_2\notin E(G)$，$xu_{j+1}\notin E(G)$. 因 $d(x)<\frac{n}{2}$，$d(x,u_2)=d(x,u_{j+1})=2$，于是 $d(u_2)\geqslant\frac{n}{2}$，$d(u_{j+1})\geqslant\frac{n}{2}$. 考虑 $n-1$ 点的链

$$P=u_2u_3\cdots u_jxu_1u_{n-2}\cdots u_{j+1},$$

因 G 不含 $(n-1)$-圈，故

$$d_P(u_2)+d_P(u_{j+1})\leqslant n-2,$$

故必有 yu_2，$yu_{j+1}\in E(G)$.

易见 $yu_j\notin E(G)$（否则，G 有 $(n-1)$-圈）. 于是 $d(y,u_j)=2$，但 $d(y)<\frac{n}{2}$，$d(u_j)<\frac{n}{2}$，这与 $G\in\mathscr{F}_n$ 矛盾. 至此，定理 4 证得.

注记. 从基本引理所述性质 (P_1)—(P_4) 可见，类似地可得到 [5] 中提到的图的一些性质的范更华型充分条件，例如，若 G 是 3-连通的，对任何使 $d(u,v)=2$ 的两个点 u，v 有 $\max(d(u),d(v))\geqslant\frac{n+1}{2}$，则 G 是Hamilton连通的.

参 考 文 献

[1] Fan Genghua, New sufficient conditions for cyles in graphs, *J. Combinatorial Theory* (B), **37**(1984), 22—227.
[2] Bondy, J. A., Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications, Macmillan Press, London, 1976.
[3] Bondy, J. A., Pancyclis graphs I, *J. Combinatorial Theory* (B), **11**(1971), 80—84.
[4] Schmeichel, E. F., Hakimi, S. L., Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal, *J. Combinatorial Theory* (B), 17(1974), 22—34.
[5] Bondy, J. A., Chvátal, V., A method in graph theory, *Dis. Math.*, **15**(1976), 111—135.

A NEW KIND OF PANCYCLIC GRAPHS

TIAN FENG
(Institute of Systems Science, Academia Sinica)

SHI RONG-HUA
(Mathematics Department, Qinghai Teachers' College, Xining)

ABSTRACT

Let G be a 2-connected graph of order $n(n\geqslant 3)$ and let u and v be distinct vertices of G. If $d(u,v)=2\Rightarrow\max(d(u),d(v))\geqslant\frac{n}{2}$,

then we denote $G\in\mathscr{F}_n$.

In 1984, Fan Genghua proved that if $G\in\mathscr{F}_n$ then G is Hamiltonan.

In the paper, we give the structural characterization of graphs belonging to $\mathscr{F}_n$, and prove that except for three possible counterexamples, every graph in $\mathscr{F}_n$ is pancyclic.