系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
27(5) (2007, 10), 691–696

一类时滞差分方程的振动准则*

贾 茗

(中南林业科技大学涉外学院， 长沙 410004；湖南师范大学数学与计算机科学学院， 长沙 410081)

申建华

(湖南师范大学数学与计算机科学学院， 长沙 410081)

摘要 讨论一类时滞差分方程的振动性，给出了所有解振动的充分条件.

关键词 振动，非振动，迭代，差分方程.

MR(2000) 主题分类号 39A11

1 引 言

近年来，关于一阶时滞差分方程

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, \cdots. \tag{1}$$

解的振动性和非振动性，已有许多作者进行了研究，如 [1-8], 并建立了许多充分条件. 文 [2] 建立了如下条件，如果

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} p_{n-i} > 1, \tag{2}$$

或者

$$\liminf_{n\to\infty} p_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \tag{3}$$

那么方程 (1) 的所有解振动. 如果

$$\liminf_{n\to\infty} p_n > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \tag{4}$$

那么程 (1) 有一个非振动解.

* 国家自然科学基金资助项目 (10071018) 和教育部科学技术重点项目.
收稿日期：2004-11-23, 收到修改稿日期：2006-02-22.

后来条件 (3) 被文 [3] 改进为

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=n-k}^{n-1}p_i>\Big(\frac{k}{K+1}\Big)^{k+1}. \tag{5}$$

在这篇文章中，我们主要研究如下差分方程

$$x_{n+1}-x_n+p_nx_{n-k}+q_nx_{n-\delta}=0, \tag{6}$$

的振动性，其中，$\{p_n,q_n\}$ 是一列非负的实数，$\{k,\delta\}$ 是正整数，给出了所有解振动的新的充分条件，我们的结果改进了已有文献的结果.

定义 1 方程 (6) 的解称为非振动的，如果这个解最终为正或最终为负，否则称该解为振动的. 如果方程的所有解为振动的，则称方程是振动的.

2 主要结果

我们的主要结果就是下面的两个定理

定理 1 假设存在一些正整数 l 使

$$\limsup_{n\to\infty}\bigg\{\sum_{i=0}^{K}\{p_{n-i}+q_{n-i}\}\bigg\}+\prod_{i=o}^{K}\sum_{j=1}^{K}[p_{n-i+j}+q_{n-i+j}]+\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{K}\prod_{j=0}^{m+1}[p_{n-jk-i}+q_{n-j\delta-i}]>1, \tag{7}$$

其中 $K=\min\{k,\delta\}$ 成立，那么方程 (6) 的所有解振动.

证 假设方程 (6) 有一个最终正解 x_n. 由方程 (6), 我们有

$$x_{n-i}=x_{n-i+1}+p_{n-i}x_{n-k-i}+q_{n-i}x_{n-\delta-i},\quad i=1,2,\cdots,\ K=\min\{k,\delta\}. \tag{8}$$

我们对上式从 $i=1$ 到 $i=K$ 求和得到

$$x_{n-K}=x_n+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}x_{n-k-i}+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}x_{n-\delta-i}. \tag{9}$$

再由方程 (6), 对于任何的正整数 j 和 t 我们得到

$$\begin{cases} x_{n-k-j}=x_{n-k-j+1}+p_{n-k-j}x_{n-2k-j}+q_{n-k-j}x_{n-\delta-j-k}, \\ x_{n-\delta-t}=x_{n-\delta-t+1}+p_{n-\delta-t}x_{n-\delta-k-t}+q_{n-\delta-t}x_{n-2\delta-t}. \end{cases} \tag{10}$$

将方程 (10) 中的 j 和 t 用 i 代入 (9) 式，我们可以得到

$$\begin{aligned} x_{n-K}=x_n&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}x_{n-k-i+1}+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}x_{n-\delta-i+1}+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}q_{n-k-i}x_{n-\delta-i-k}\\ &+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}p_{n-\delta-i}x_{n-\delta-k-i}+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}p_{n-k-i}x_{n-2k-i}\\ &+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}q_{n-\delta-i}x_{n-2\delta-i}. \end{aligned} \tag{11}$$

将 $j=i+k$, 以及 $t=i+\delta$ 代入上式，我们可以得到

$$\begin{aligned}x_{n-K}=x_n&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}x_{n-k-i+1}+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}x_{n-\delta-i+1}\\&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}q_{n-k-i}x_{n-\delta-i-k}\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}p_{n-\delta-i}x_{n-\delta-k-i}\\&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}p_{n-k-i}(x_{n-i-2k+1}+p_{n-i-2k}x_{n-i-3k}+q_{n-i-2k}x_{n-\delta-i-2k})\\&\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}q_{n-\delta-i}(x_{n-i-2\delta+1}+p_{n-i-2\delta}x_{n-i-2\delta-k}+q_{n-i-2\delta}x_{n-i-3\delta}).\end{aligned}\tag{12}$$

经过无数次迭代，推导，我们有

$$\begin{aligned}x_{n-K}=x_n&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}x_{n-k-i+1}+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}p_{n-k-i}x_{n-2k-i+1}+\cdots\\&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}p_{n-k-i}p_{n-lk-i}x_{n-(l+1)k-i+1}\\&+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}p_{n-k-i}p_{n-(l+1)k-i}x_{n-i-(l+2)k}\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}x_{n-\delta-i+1}+\cdots\\&+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}q_{n-\delta-i}q_{n-(l+1)\delta-i}x_{n-i-(l+2)\delta}.\end{aligned}\tag{13}$$

去掉上式的若干项，得到

$$\begin{aligned}x_{n-K}\geq\Big[&x_n+\sum_{i=1}^{K}p_{n-i}x_{n-k-i+1}+\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{K}x_{n-(m+2)k-i+1}\prod_{j=0}^{m+1}p_{n-jk-i}\\&+\sum_{i=1}^{K}q_{n-i}x_{n-\delta-i+1}+\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{K}x_{n-(m+2)\delta-i+1}\prod_{j=0}^{m+1}p_{n-j\delta-i}\Big].\end{aligned}\tag{14}$$

由方程 (6), 我们有

$$x_{n+j+1}-x_{n+j}+p_{n+j}x_{n+j-k}+q_{n+j}x_{n+j-\delta}=0,\quad j=0,1,2,\cdots,K-1.\tag{15}$$

对上式两边从 $j=0$ 到 $j=K-1$ 求和，我们可得到

$$x_n=x_{n+K}+\sum_{j=0}^{K-1}p_{n+j}x_{n+j-k}\sum_{j=0}^{K-1}q_{n+j}x_{n+j-\delta},\tag{16}$$

因为 x_n 是最终递减的，相应地有

$$x_n>\sum_{j=0}^{K-1}p_{n+j}x_{n+j-k}+\sum_{j=0}^{K-1}q_{n+j}x_{n+j-\delta}\geq\Big(\sum_{j=0}^{K-1}p_{n+j}+\sum_{j=0}^{K-1}q_{n+j}\Big)x_{n-1},\tag{17}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &> \left(\sum_{j=1}^{K} p_{n+j} + \sum_{j=1}^{K} q_{n+j}\right) x_n \\
&= \left[\sum_{j=1}^{K} (p_{n+j} + q_{n+j})\right] x_n \\
&> \left[\prod_{i=0}^{K} \sum_{j=1}^{K} (p_{n-i+j} + q_{n-i+j})\right] x_{n-K}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

由方程 (6),

$$
x_n = x_{n+1} + p_n x_{n-k} + q_n x_{n-\delta}, \tag{19}
$$

将方程 (19) 代入 (14) 中, 然后利用 (15) 以及 x_n 是最终递减的事实, 我们可以得到

$$
\begin{aligned}
x_{n-K} \geq{} & \Bigg[x_{n+1} + p_n x_{n-k} + q_n x_{n-\delta} + \sum_{i=1}^{K} p_{n-i} x_{n-k-i+1} + \sum_{i=1}^{K} q_{n-i} x_{n-\delta-i+1} \\
& + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^{K} x_{n-(m+2)k-i+1} \prod_{j=0}^{m+1} p_{n-jk-i} + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^{K} x_{n-(m+2)\delta-i+1} \prod_{j=0}^{m+1} p_{n-j\delta-i}\Bigg] \\
> \Bigg\{ & \left[\prod_{i=0}^{K} \sum_{j=1}^{K} (p_{n-i+j} + q_{n-i+j})\right] x_{n-K} + p_n x_{n-K} + q_n x_{n-K} + \sum_{i=1}^{K} p_{n-i} x_{n-K} \\
& + \sum_{i=1}^{K} q_{n-i} x_{n-K} + \sum_{m=0}^{l-1} x_{n-(m+2)k} \prod_{j=0}^{m+1} p_{n-jk-i} \\
& + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^{K} x_{n-(m+2)\delta} \prod_{j=0}^{m+1} q_{n-j\delta-i} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

将下式

$$
x_{n-(m+2)k} \geq x_{n-K}
$$

和

$$
x_{n-(m+2)\delta} \geq x_{n-K}
$$

代入上面的不等式, 可得

$$
\begin{aligned}
x_{n-K} \geq \Bigg\{ \Bigg[& \sum_{i=0}^{K} (p_{n-i} + q_{n-i}) + \prod_{i=0}^{K} \sum_{j=1}^{K} (p_{n-i+j} + q_{n-i+j}) \\
& + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^{K} \prod_{j=0}^{m+1} p_{n-jk-i} + \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^{K} \prod_{j=0}^{m+1} q_{n-j\delta-i} \Bigg] x_{n-K} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

用 x_{n-K} 去除上面不等式的两边, 然后取当 $n \to \infty$ 时的上极限, 矛盾, 证毕.

定理 2 假设存在一些正整数 l 使

$$\limsup_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{K}\{p_{n-i}+q_{n-i}\}\right\}+\prod_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}[p_{n-i+j}+q_{n-i+j}]$$
$$+\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{K}\prod_{j=0}^{m+1}[p_{n-jk-i}+q_{n-j\delta-i}]>1, \tag{21}$$

其中 $K=\min\{k,\delta\}$ 成立，那么方程 (6) 的所有解振动．当 $p=1$, 方程 (1) 满足条件 (2) 和 (3) 时，则方程 (1) 有一个非振动解．

证 正如定理一的证明，我们有 (14) 和 (17) 被满足．根据 (17), 我们有

$$x_n>\left[\prod_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(p_{n-i+j}+q_{n-i+j})\right]x_{n-K}. \tag{22}$$

将方程 (21) 代入 (14) 中，然后利用 (15) 以及 x_n 是最终递减的事实，我们可以得到

$$x_{n-K}\geq\left\{\sum_{i=1}^{K}\{p_{n-i}+q_{n-i}\}\right\}+\prod_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}[p_{n-i+j}+q_{n-i+j}]$$
$$+\sum_{m=0}^{l-1}\sum_{i=1}^{K}\prod_{j=0}^{m+1}[p_{n-jk-i}+q_{n-j\delta-i}]x_{n-K}. \tag{23}$$

用 x_{n-K} 去除上面不等式的两边，然后取当 $n\to\infty$ 时的上极限，与 (21) 矛盾．证毕．

参 考 文 献

[1] Shen Jianhua and Luo zhiguo. Some oscillation criteria for difference equations. *Computers and Mathematics with Applications,* 2000, **40**: 713–719.

[2] Erbe L H and Zhang B G. Oscillation of discrete analogues of delay equations. *Differential and Integral Equations*, 1989, **2**(3): 300–309.

[3] Ladas G, Philos C and Sficas Y. Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations. *J. Appl. Math.*, 1989, (2): 101–112.

[4] Ladas G. Recent developments in the oscillation of delay difference equations. International Conference on Differential Equations, Stability and Control, Dekker, New York,(1990).

[5] Lalli B and Zhang B G. Oscillation of difference equations. *Colloquium Math. Applic.*, 1993, **65**: 25–32.

[6] G. Ladas. Explicit conditions for the oscillation of difference equations, *J. Math. Anal. Appl.,* 1990, **153**: 276–287.

[7] Stavroulakis I P. Oscillations of delay difference equations. *Computers Math. Applic.*, 1995, **29**(7): 83–88.

[8] Tang X H. Oscillations of delay difference equations with variable coefficients(Chinese). *J. Central South University of Technology*, 1998, **29**: 287–288.

[9] Tang X H and YU J S. Oscillations of delay difference equations. *Computers Math. Applic.*, 1999, **37**(7): 11–20.

[10] Ladas G et al. Necessary and sufficient conditions for the oscillation of difference equations. *Libertas Math.,* 1989, **9**: 121–130.

[11] Yu J S, Zhang B G and Wang Z C. Oscillation of Delay Difference Equations. *App. Anal.*, 1994, **133**: 117–124.

[12] Tang X H. Oscillation of delay difference equations with variable coefficients. *J. Central South University of Technology*, 1998, **29**(40): 489–492.

OSCILLATION CRITERIA FOR A CLASS OF DELAY DIFFERENCE EQUATION

Jia Ming

(*College of Internation, Central South University of Forestry and Technology, Changsha* 410004;

College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081)

Shen Jianhua

(*College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha* 410081)

Abstract The oscillation of the first order difference equation is studied, and the oscillation criteria of any solutions is established. The obtainded results extend the existing results in the literature.

Key words Oscillation, nonoscillation, iterative procedure, difference equations.