系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(2) (2008, 2), 225–231

一类 Dirichlet 边值逆问题*

王 明 华

(重庆文理学院数学与计算机科学系， 永川 402160)

摘要 给出解析函数的一类 Dirichlet 边值逆问题的数学提法．依据解析函数 Dirichlet 边值问题和广义 Dirichlet 边值问题的理论，讨论了此边值逆问题的可解性．利用解析函数 Dirichlet 边值问题的 Schwarz 公式，给出了该边值逆问题的可解条件和解的表示式.

关键词 Dirichlet 边值逆问题， Dirichlet 边值问题， Schwarz 公式.

MR(2000) 主题分类号 31A25, 30E25

1 引 言

我们知道，复分析边值问题在物理学和工程技术等问题中有着广泛的应用，其研究已有较为丰富的结果，而作为复分析边值逆问题，其研究业已起步. 从力学背景出发，文献 [1,2] 对特殊情形的解析函数的 Riemann 边值逆问题进行了初步的探讨，文献 [3] 研究了由路见可教授提出的一类解析函数的 Riemann 边值逆问题，文献 [4] 讨论了广义解析函数的一类 Riemann 边值逆问题.

本文给出解析函数 Dirichlet 边值逆问题的数学上合理的提法，依据解析函数 Dirichlet 边值问题和广义 Dirichlet 边值问题的理论，讨论了此边值逆问题的可解性，给出了该边值逆问题的可解条件，并利用解析函数 Dirichlet 边值问题的 Schwarz 公式，给出了此边值逆问题解的表示式.

2 问题的提法

设 L 为一条光滑的 Jordan 闭曲线，取定逆时针方向为其正向，用 D 表示以 L 为边界的有界区域.

本文提出的解析函数 Dirichlet 边值逆问题简称 $\widetilde{D}$ 问题，即求函数对 $(\varPhi(z), \psi(t))$, 这里 $\varPhi(z)$ 为 D 内的解析函数，连续到 $D+L$ 上， $\psi(t)$ 为 L 上 H 类实的系数函数，适合边界条件

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\varPhi(t) = r_1(t)\psi(t) + f_1(t), \\ \operatorname{Im}\varPhi(t) = r_2(t)\psi(t) + f_2(t), \quad t \in L, \end{cases} \tag{1}$$

* 重庆市教育委员会科学技术研究 (KJ051206) 项目资助.
收稿日期：2005-01-27, 收到修改稿日期：2007-02-07.

其中 $r_j(t), f_j(t)(j=1,2)$ 都是 L 上 H 类已知实函数，且

$$\lambda(t)=r_2(t)-\mathrm{i}r_1(t)\neq 0. \tag{2}$$

把 $f_1(t)=f_2(t)=0$ 的 $\widetilde{D}$ 问题称为齐次 $\widetilde{D}$ 问题，记作 $\widetilde{D}_0$ 问题．此外，还称

$$\kappa=\frac{[\arg\lambda(t)]_L}{2\pi} \tag{3}$$

为 $\widetilde{D}$ 问题的指标．

由于经过保形变换，可以将区域 D 变为单位圆内部，而边界 L 变为单位圆周．为此，下面在单位圆上讨论 $\widetilde{D}$ 问题，即设 D 为单位圆域 $|z|<1$, L 为单位圆周 $|t|=1$.

3 问题的解法

为讨论 $\widetilde{D}$ 问题，需要两方面预备知识，一是经典的解析函数 Dirichlet 边值问题及其 Schwarz 公式，这是熟知的．二是解析函数的广义 Dirichlet 边值问题．

求在单位圆 $D:|z|<1$ 内的函数 $F(z)$, 它在 D 内除 $z=0$ 外解析，以 $z=0$ 为 K 级极点，连续到单位圆周 $L:|t|=1$ 上，且适合边界条件

$$\mathrm{Re}\,F(t)=g(t),\quad t\in L, \tag{4}$$

其中 $g(t)$ 是 L 上 H 类已知实函数．把 $g(t)=0$ 的情形称为齐次广义 Dirichlet 边值问题．

引理 1 齐次广义 Dirichlet 边值问题具有如下形式的一般解

$$F(z)=\sum_{m=1}^{K}\left(c_m z^m-\overline{c_m}z^{-m}\right)+\mathrm{i}\beta_0, \tag{5}$$

其中 $c_m(m=1,2,\cdots,K)$ 为任意复常数， β_0 为任意实常数．

证 据齐次广义 Dirichlet 边值问题的提法，可设其一般解为

$$F(z)=\sum_{m=-K}^{\infty}c_m z^m,$$

其中 $c_m(m=-K,-K+1,\cdots)$ 为待定复常数．

将单位去心圆域 $0<|z|<1$ 关于单位圆周 $|z|=1$ 作镜面反射，由于 $F(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，易知 $\overline{F(\frac{1}{\bar{z}})}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内解析，从而得到以 $L:|t|=1$ 为跳跃曲线的分片解析函数

$$G(z)=\begin{cases} F(z), & 0<|z|<1,\\ -\overline{F(\frac{1}{\bar{z}})}, & 1<|z|<+\infty,\end{cases}$$

并且当 $t\in L$ 时，有

$$G^+(t)-G^-(t)=F(t)-\left(-\overline{F(t)}\right)=2\mathrm{Re}\,F(t)=0.$$

由 Painlevé 连续延拓原理，知 $G(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，且 $G(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 展开式仍为

$$G(z)=\sum_{m=-K}^{\infty} c_m z^m,$$

且上式右边级数在 $|z|=1$ 上一致收敛，因而对 $t\in L$, 有

$$F(t)=G^+(t)=\lim_{|z|<1,z\to t}\sum_{m=-K}^{\infty} c_m z^m=\sum_{m=-K}^{\infty}\lim_{|z|<1,z\to t} c_m z^m=\sum_{m=-K}^{\infty} c_m t^m.$$

现将上式代入边界条件 (4) ($g(t)=0$), 并记 $c_m=\alpha_m+\mathrm{i}\beta_m$, $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$\mathrm{Re}\sum_{m=-K}^{\infty} c_m t^m=\mathrm{Re}\sum_{m=-K}^{\infty}(\alpha_m+\mathrm{i}\beta_m)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}=\sum_{m=-K}^{\infty}(\alpha_m\cos m\theta-\beta_m\sin m\theta)=0,$$

因而

$$\alpha_0=0,\ \alpha_m=-\alpha_{-m},\ \beta_m=\beta_{-m}(m=1,2,\cdots,K),\ \alpha_m=\beta_m=0(m=K+1,K+2,\cdots),$$

从而得到

$$\begin{aligned}F(z)&=\sum_{m=-K}^{-1}(-\alpha_{-m}+\mathrm{i}\beta_{-m})\,z^m+\mathrm{i}\beta_0+\sum_{m=1}^{K}(\alpha_m+\mathrm{i}\beta_m)\,z^m\\&=\sum_{m=1}^{K}(-\alpha_m+\mathrm{i}\beta_m)\,z^{-m}+\mathrm{i}\beta_0+\sum_{m=1}^{K}(\alpha_m+\mathrm{i}\beta_m)\,z^m\\&=\sum_{m=1}^{K}\left(c_m z^m-\overline{c_m}z^{-m}\right)+\mathrm{i}\beta_0,\end{aligned}$$

其中 $c_m(m=1,2,\cdots,K)$ 为任意复常数， β_0 为任意实常数.

引理 2 广义 Dirichlet 边值问题具有如下形式的一般解

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t+z}{t-z}\frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t+\sum_{m=1}^{K}\left(c_m z^m-\overline{c_{-m}}z^{-m}\right)+\mathrm{i}\beta_0,\tag{6}$$

其中 $c_m(m=1,2,\cdots,K)$ 为任意复常数， β_0 为任意实常数.

证　设 $F(z)$ 为广义 Dirichlet 边值问题的解，并记

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t+z}{t-z}\frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

由 Schwarz 公式知 $F_0(z)$ 在 D 内解析，且适合边界条件 $\mathrm{Re}\,F_0(z)=g(t)$, 从而有

$$\mathrm{Re}\,(F(t)-F_0(t))=0,\quad t\in L.$$

由引理 1 即知 $F(z)$ 具有表示式 (6).

现在，回到所讨论的 Dirichlet 边值逆问题上来．首先，将边界条件 (1) 写成形式

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\varPhi(t)=r_1(t)\psi(t)+f_1(t),\\ \mathrm{Re}\,(-\mathrm{i}\varPhi(t))=r_2(t)\psi(t)+f_2(t),\quad t\in L,\end{cases}\tag{7}$$

然后 (7) 第 1 式两端乘以 $r_2(t)$ 与第 2 式两端乘以 $r_1(t)$ 后相减，得

$$\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda(t)}\,\Phi(t)\right]=f(t),\quad t\in L,\tag{8}$$

其中

$$f(t)=r_2(t)f_1(t)-r_1(t)f_2(t).\tag{9}$$

下面，将边界条件 (8) 标准化，求 D 内的解析函数 $s(z)$, 满足边界条件

$$\mathrm{Re}\,s(t)=s_1(t),\quad t\in L,\tag{10}$$

其中 $s_1(t)=\arg\lambda(t)-\kappa\arg t$, 且 $\mathrm{Im}\,s(0)=0$．据解析函数的 Dirichlet 边值问题， $s(z)$ 存在且唯一，其唯一解为

$$s(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t+z}{t-z}\frac{s_1(t)}{t}\mathrm{d}t.\tag{11}$$

令

$$\Psi(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(z)}\Phi(z),\tag{12}$$

则将 $\Phi(z)$ 满足的边界条件 (8) 变为 $\Psi(z)$ 满足的边界条件

$$\mathrm{Re}\,\left[t^{-\kappa}\Psi(t)\right]=\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|},\quad t\in L,\tag{13}$$

其中 $s_2(t)=\mathrm{Im}\,s(t)$.

下面，分齐次与非齐次情形，分别讨论 Dirichlet 边值逆问题的可解性.

3.1 $\widetilde{D}_0$ 问题

根据前面的讨论，由 $\widetilde{D}_0$ 问题边界条件 (1)$(f_1(t)=f_2(t)=0)$, 导出 $\Psi(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(z)}\Phi(z)$ 满足的标准形边界条件

$$\mathrm{Re}\,\left[t^{-\kappa}\Psi(t)\right]=0,\quad t\in L.\tag{14}$$

当指标 $\kappa\geq 0$ 时，因 $\Psi(z)$ 在 D 内解析，因而 $z^{-\kappa}\Psi(z)$ 以 $z=0$ 为至多 κ 级极点，从而问题 (14) 为一齐次广义 Dirichlet 边值问题．据引理 1，得到问题 (14) 的一般解

$$\Psi(z)=\sum_{m=1}^{\kappa}\left(c_mz^m-\overline{c_m}z^{-m}\right)z^{\kappa}+\mathrm{i}\beta_0z^{\kappa},\tag{15}$$

从而 $\widetilde{D}_0$ 问题中 $\Phi(z)$ 有一般解

$$\Phi(z)=\sum_{m=1}^{\kappa}\left(c_mz^m-\overline{c_m}z^{-m}\right)z^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(z)}+\mathrm{i}\beta_0z^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(z)},\tag{16}$$

其中 $c_m(m=1,2,\cdots,\kappa)$ 为任意复常数， β_0 为任意实常数，共有 $2\kappa+1$ 个实常数.

将 $\Phi(z)$ 的一般解 (16) 代回 $\widetilde{D}_0$ 问题的边界条件 (1)$(f_1(t)=f_2(t)=0)$, 然后第二式两端乘以 i 后与第一式相加，得到

$$\Phi(t)=\left(r_1(t)+\mathrm{i}r_2(t)\right)\psi(t)=\mathrm{i}\lambda(t)\psi(t),\quad t\in L,\tag{17}$$

其中

$$\Phi(t)=\sum_{m=1}^{\kappa}\left(c_m t^m-\overline{c_m}t^{-m}\right)t^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}+\mathrm{i}\beta_0 t^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)},\tag{18}$$

从而得到 $\widetilde{D}_0$ 问题中 $\psi(t)$ 的一般解

$$\psi(t)=\frac{t^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\mathrm{i}\lambda(t)}\left(\sum_{m=1}^{\kappa}\left(c_m t^m-\overline{c_m}t^{-m}\right)+\mathrm{i}\beta_0\right).\tag{19}$$

当指标 $\kappa<0$ 时, 因 $z^{-\kappa}\Psi(z)$ 在 D 内解析, 从而问题 (14) 为经典的 Dirichlet 边值问题. 据 Schwarz 公式，得到问题 (14) 的一般解 $\Psi(z)=\mathrm{i}\beta_0 z^{\kappa}$, 因 $\Psi(z)$ 在 D 内解析，应取 $\beta_0=0$, 从而得到 $\widetilde{D}_0$ 问题中 $\Phi(z)=0$, 将其代回 $\widetilde{D}_0$ 问题的边界条件 (1)($f_1(t)=f_2(t)=0$), 从而得到 $\widetilde{D}_0$ 问题中 $\psi(t)=0$. 故 $\kappa<0$ 时， $\widetilde{D}_0$ 问题只有零解.

综合上述讨论，我们得到 $\widetilde{D}_0$ 问题的如下定理.

定理 1 对于 $\widetilde{D}_0$ 问题，当指标 $\kappa\geq 0$ 时，问题具有一般解 $(\Phi(z),\psi(t))$, 其中 $\Phi(z),\psi(t)$ 分别由 (16), (19) 给出，一般解中含有 $2\kappa+1$ 个任意实数；当指标 $\kappa<0$ 时，问题只有零解 $(\Phi(z),\psi(t))=(0,0)$.

3.2　$\widetilde{D}$ 问题

由 $\widetilde{D}$ 问题的边界条件，前面已经导出 $\Psi(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(z)}\Phi(z)$ 满足的标准形边界条件 (13), 当指标 $\kappa\geq 0$ 时，因 $z^{-\kappa}\Psi(z)$ 以 $z=0$ 为至多 κ 级极点，据引理 2, 得到问题 (13) 的特解

$$\Psi_0(z)=\frac{z^{\kappa}}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t,\tag{20}$$

从而得到 $\widetilde{D}$ 问题中 $\Phi(z)$ 的如下形式的特解

$$\Phi_0(z)=\frac{z^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(z)}}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t.\tag{21}$$

将 $\Phi_0(z)$ 代回 $\widetilde{D}$ 问题的边界条件 (1), 然后第二式两端乘以 i 后与第一式相加，得到

$$\Phi_0(t)=\mathrm{i}\lambda(t)\psi(t)+\left(f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)\right),\quad t\in L,\tag{22}$$

将 (21) 改写成

$$\Phi_0(z)=\frac{z^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(z)}}{2\pi\mathrm{i}}\left(\int_L\frac{1}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t+z\int_L\frac{1}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t\right),\tag{23}$$

使用 Cauchy 型积分的 Plemelj 公式，得到

$$\Phi_0(t)=t^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}\left(\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau\right),\tag{24}$$

将 (24) 代回 (22), 并注意到 $\mathrm{e}^{s_2(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s_1(t)}$, $s_1(t)=\arg\lambda(t)-\kappa\arg t$, 从而得到 $\widetilde{D}$ 问题中 $\psi(t)$ 的如下形式的特解

$$\begin{aligned}\psi_0(t)&=\frac{t^{\kappa}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\mathrm{i}\lambda(t)}\left(\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau\right)-\frac{f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)}{\mathrm{i}\lambda(t)}\\&=\frac{f(t)}{\mathrm{i}|\lambda(t)|^2}-\frac{f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)}{\mathrm{i}\lambda(t)}-\frac{\mathrm{e}^{-s_2(t)}}{2\pi|\lambda(t)|}\int_L\frac{\tau+t}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{25}$$

当指标 $\kappa<0$ 时，因 $z^{-\kappa}\Psi(z)$ 在 D 内解析，从而问题 (13) 为经典的 Dirichlet 边值问题. 据 Schwarz 公式，得到问题 (13) 的特解如 (20), 进而得到 $\widetilde{D}$ 问题中 $\varPhi(z)$ 的特解如 (21), 为使 (21) 的 $\varPhi_0(z)$ 在 $z=0$ 连续，要求 (21) 中的

$$\int_L \frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t \tag{26}$$

在 $z=0$ 处至少有 $-\kappa$ 级零点，由于

$$\begin{aligned}\int_L \frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t &= \int_L \frac{1+\frac{z}{t}}{1-\frac{z}{t}}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t = \int_L \left(1+\frac{z}{t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n \frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t \\ &= \int_L \frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_L \frac{1}{t^{n+1}}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t\right)z^n,\end{aligned} \tag{27}$$

从而要求

$$\int_L \frac{1}{t^m}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t = 0, \quad m=1,2,\cdots,-\kappa. \tag{28}$$

由于

$$\int_L \frac{1}{t}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}\theta$$

是虚数，故条件 (28) 实际上表示 $-2\kappa-1$ 个实条件 (实方程), 在此条件下，根据 (27), 有

$$\begin{aligned}\int_L \frac{t+z}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t|\lambda(t)|}\mathrm{d}t &= 2\sum_{n=-\kappa}^{\infty}\left(\int_L \frac{1}{t^{n+1}}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t\right)z^n \\ &= 2z^{-\kappa}\sum_{n=-\kappa}^{\infty}\left(\int_L \frac{1}{t^{n+1}}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{|\lambda(t)|}\mathrm{d}t\right)z^{n+\kappa} \\ &= 2z^{-\kappa}\int_L\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t^{-\kappa}|\lambda(t)|}\right)\mathrm{d}t \\ &= 2z^{-\kappa}\int_L \frac{1}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t^{-\kappa}|\lambda(t)|}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而 (21) 可写成

$$\varPhi_0(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(z)}}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{1}{t-z}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t^{-\kappa}|\lambda(t)|}\mathrm{d}t. \tag{29}$$

将 (29) 式代回 $\widetilde{D}$ 问题的边界条件 (1), 得到 (22) 式，其中

$$\varPhi_0(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t^{-\kappa}|\lambda(t)|} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{1}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau^{-\kappa}|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau, \tag{30}$$

从而得到 $\widetilde{D}$ 问题中 $\psi(t)$ 的特解

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\mathrm{i}\lambda(t)}\frac{f(t)\mathrm{e}^{s_2(t)}}{t^{-\kappa}|\lambda(t)|} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\pi\lambda(t)}\int_L \frac{1}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau^{-\kappa}|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau - \frac{f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)}{\mathrm{i}\lambda(t)} \\ &= \frac{f(t)}{\mathrm{i}|\lambda(t)|^2} - \frac{f_1(t)+\mathrm{i}f_2(t)}{\mathrm{i}\lambda(t)} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)}}{\pi\lambda(t)}\int_L \frac{1}{\tau-t}\frac{f(\tau)\mathrm{e}^{s_2(\tau)}}{\tau^{-\kappa}|\lambda(\tau)|}\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{31}$$

综合上述讨论，再结合 $\widetilde{D}_0$ 问题的一般解，我们得到 $\widetilde{D}$ 问题的如下定理.

定理 2　对于 $\widetilde{D}$ 问题，当指标 $\kappa \geq 0$ 时，问题具有一般解 $(\Phi(z)+\Phi_0(z), \psi(z)+\psi_0(z))$, 其中 $\Phi(z), \Phi_0(z), \psi(z), \psi_0(z)$ 分别由 (16), (21), (19), (25) 给出；当指标 $\kappa < 0$ 时，当且仅当 $-2\kappa-1$ 个实条件 (实方程)(28) 满足时问题可解，此时问题有唯一解 $(\Phi_0(z), \psi_0(z))$, 其中 $\Phi_0(z), \psi_0(z)$ 分别由 (29), (31) 给出．总之， $\widetilde{D}$ 问题有 $2\kappa+1$ 个实自由度.

参　考　文　献

[1] Ioakimids N I, Perdios E A and Papadakis K E. Numerical estimation of the coefficient of the homogeneous Riemann-Hilbert problem on the basis of boundary data. *Applied Mathematics and Computation*, 1991, **41**(1): 21–33.

[2] Li Xing. The inverse Riemann boundary value jump problem. Proceedings of the International Conference on Computation Engineering Science, Technology Publications, Atlanta, Ga, USA, 1992.

[3] Li Xing. A class of inverse Riemann boundary value problems. *J. of Math.* (PRC), 1996, **16**(3): 303–306 (in Chinese).

[4] Wen Xiaoqin and Li Mingzhong. A class of inverse Riemann boundary value problems for generalized holomorphic functions. *J. of Math.* (PRC), 2004, **24**(4): 457–464 (in Chinese).

[5] Wen Guochuan. Conformal Mappings and Boundary Value Problems. Beijing: Higher Education Press, 1985 (in Chinese).

[6] Lu Jianke. Boundary Value Problems for Analytic Functions. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1987 (in Chinese).

A CLASS OF INVERSE DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEMS

WANG Minghua

(*Department of Mathematics and Computer Science, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing* 402160)

Abstract　In this paper, the mathematical formulation of a class of inverse Dirichlet boundary value problems for analytic functions is given. On the basis of the classical and generalized Dirichlet boundary value problems for analytic functions, the solvability of the inverse boundary problems is discussed. Using the Schwarz formula of Dirichlet boundary value problems for analytic functions, the solvable conditions and the representation of the solutions of the inverse boundary problems are obtained.

Key words　Inverse Dirichlet boundary value problems, Dirichlet boundary value problems, Schwarz formula.