系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
11 (4) (1991), 291—298

乡村投递员问题的多面体

彭 允
(山东大学数学研究所，济南 250100)

1. 引 言

设 $G=(V,E)$ 是以 V 为顶点集，E 为边集合的连通无向图. 对任意的 $E'\subseteq E$，以 $G[E']$ 记 G 的由 E' 中的边所组成的子图，称之为边集 E' 导出的子图. 称边序列 $w=\langle(i_0,i_1),(i_1,i_2),\cdots,(i_{k-1},i_k)\rangle$ 为连接 i_0 和 i_k 的路，其中 $i_j\in V,(i_j,i_{j+1})\in E$，$0\leqslant j\leqslant k-1$. 如果 $i_0=i_k$，则称 w 为一个闭路. 如果 w 中 $i_s\neq i_t$，对任意 $0\leqslant s$，$t\leqslant k$，$s\neq t$，则称 w 为道路. G 中经过每条边至少一次，则称 w 为 G 上的 Euler 环游. 如果 G 上存在一条 Euler 环游经过每条边恰好一次，则称图 G 为 Euler 图. 图 G 中与偶数条边相关联的点称为偶点，而与奇数条边相关联的点称之为奇点. 于是图 G 是 Euler 图的充要条件是图 G 是没有奇点的连通图.

对给定的 $T\subseteq V$，图 G 的 T-join 是 G 的边集 J，使得 $G[J]$ 中的奇点集合恰好就是点集 T.

对给定的 $E_0\subseteq E$，图 G 上的闭路 w，如果包含 E_0 中所有的边，则称 w 为 G 上关于 E_0 的乡村投递员环道(简称 RP 环道).

图 G 上的路 w，我们定义向量 $x^w=(x^w_e,e\in E)$，其中 x^w_e 为边 e 在路 w 中出现的次数，并称之为 w 的关联向量.

2. 环道多面体

设 c 为图 $G=(V,E)$ 上的边权，对给定的 $E_0\subseteq E$，设 τ 为 G 上关于 E_0 的 RP 环道，x^τ 为 τ 的关联向量，则显然 $x^\tau_e\geqslant 1$，对任意 $e\in E_0$ 成立. 我们也称 x^τ 为 RP 环道. 如果去掉一个 RP 环道中的任意边集合，都不能再得到一个 RP 环道，则称 τ 为极小 RP 环道.

以 RP 环道为顶点，定义 RP 多面体为:

$$RP(G)=\mathrm{Conv}\{x^\tau\in R^E_+: x^\tau \text{ 是 } G \text{ 上关于 } E_0 \text{ 的 } RP \text{ 环道}\},$$

称 $RP(G)$ 为关于 E_0 的环道多面体.

易知，$RP(G)$ 是由以极小 RP 环道为顶点所组成的凸多面体与 $G=(V,E)$ 中圈的关联向量所组成的凸锥的和.

1989 年 3 月26日收到，1989 年 7 月 4 日收到修改稿.

定理 1. $RP(G)$ 的维数为 $|E|$.

证. 设 $T\subseteq V$ 为图 G 的奇点集合, J 是一个 T-join. 于是 $\bar{G}=(V, E\cup J)$ 是一个 Euler 图.

设 τ 为 $\bar{G}$ 上的一个 Euler 环游, 显然 τ 经过 E_0 中所有边, 所以 τ 也是关于 E_0 的 RP 环道. 设 x^τ 为 τ 的关联向量, 则 $x^\tau\in RP(G)$. 因为对 $\forall e\in E$, $x^\tau+2\chi_e$ 仍是一个 RP 环道, 其中 χ_e 为 e 的特征向量, 所以我们得到 $|E|+1$ 条 RP 环道 $\{x^\tau, x^\tau+2\chi_e, \forall e\in E\}$, 并且 $\{(x^\tau+2\chi_e)-x^\tau=2\chi_e, \forall e\in E\}$ 是 $|E|$ 个线性无关的向量, 因此 $RP(G)$ 的维数为 $|E|$.

设 $G=(V,E)$, $E_0\subseteq E$. G 中的连通子图 $\bar{G}=(\bar{V},\bar{E})$ (允许 E 中元素重复), 如果 $E_0\subseteq\bar{E}$, 且 $\bar{G}$ 中不含奇点, 则 $\bar{G}$ 是 Euler 图, 且其 Euler 环游是图 G 的关于 E_0 的 RP 环道. 关于 Euler 图上求环游的算法见[1].

设 τ 是 RP 环道, x^τ 为 τ 的关联向量, 定义

$$x(e)=\begin{cases}x_e^\tau-1, & e\in E_0,\\ x_e^\tau, & e\in E\setminus E_0.\end{cases}$$

设 G' 是将 G 中的边 e 重复 x_e^τ 次后所得的图, 那么 G 中的 RP 环道 τ 便是图 G' 上的 Euler 环游. 因此 G' 中的点均为偶点, 所以 $x=(x_e, e\in E)$ 满足

$$\begin{aligned}&\sum\{1+x_e:\ e\in E_0,\ \text{且与 } v \text{ 关联}\}\\ &\quad+\sum\{x_e:\ e\in E\setminus E_0,\ \text{且与 } v \text{ 关联}\}\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ \forall v\in V\end{aligned}$$

或

$$\sum\{x_e:\ e\in E,\ \text{且与 } v \text{ 关联}\}+|\{e\in E_0:\ \text{且与 } v \text{ 关联}\}|\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),\ \forall v\in V. \tag{1'}$$

记 $d_0(v)$ 为点 v 在 $G[E_0]$ 中的次数, 即 $d_0(v)=|\{e: e\in E_0, \text{且与 } v \text{ 关联}\}|$. 易知, $d_0(v)=0, \forall v\in V\setminus V(G[E_0])$. 定义 $\{0,1\}$-向量 $b=(b_v, v\in V)$, $b_v\equiv d_0(v)(\mathrm{mod}\ 2)$, $\forall v\in V$. 则(1)′成为

$$\sum\{x_e:\ e\in E,\ e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}\equiv b_v(\mathrm{mod}\ 2),\ \forall v\in V. \tag{1''}$$

显然, 对任意的 $v\in V$, 成立

$$\sum\{x_e:\ e\in E,\ e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}\geqslant b_v.$$

引入变量 $w_v\geqslant 0$, $\forall v\in V$. 则 x 应满足约束:

$$\sum\{x_e:\ e\in E,\ e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}-2w_v=b_v,\ \forall\ v\in V, \tag{1}$$

$$x_e\geqslant 0,\ x_e \text{ 为整数},\ \forall\ e\in E, \tag{2}$$

$$w_v\geqslant 0,\ w_v \text{ 为整数},\ \forall\ v\in V. \tag{3}$$

不难证明, 满足上述约束的向量 x, 必有 $x+\chi_{E_0}\in RP(G)$, 其中 χ_{E_0} 为边集 E_0 的特征向量.

定义多面体 $\overline{RP}(G)=\mathrm{Conv}\{x^\tau-\chi_{E_0}:\ \tau \text{ 是 } G \text{ 上关于 } E_0 \text{ 的 } RP \text{ 环道}\}$. 则容易证明 $\overline{RP}(G)=\{x=x^\tau-\chi_{E_0}:\ \forall x^\tau\in RP(G)\}$, 即 $\overline{RP}(G)$ 是由 $RP(G)$ 平移而得, 因此 $\overline{RP}(G)$ 与 $RP(G)$ 同构. 所以 $\overline{RP}(G)$ 也是 $|E|$ 维的. 我们也称 $\overline{RP}(G)$ 是 G 上关于 E_0 的 RP 多面体. 下面将讨论 $\overline{RP}(G)$ 的若干极大面.

定理 2. 设 $G=(V,E)$ 是连通图, $E_0\subseteq E$, $\overline{RP}(G)$ 是 G 上关于 E_0 (平移)的 RP 多面体. 对任意 $e\in E$,

a) 若 e 不是割边，则 $x_e \geqslant 0$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面；

b) 若 e 是割边，且 $e \in E_0$，则 $x_e \geqslant 1$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面；

c) 若 e 是割边，且 $e \notin E_0$，$G \backslash e$ 的两个分支都含 E_0 的边，则 $x_e \geqslant 2$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面；

d) 若 e 是 G 的一个悬挂边，且 $e \notin E_0$，则 $x_e \geqslant 0$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面．

证．a) 显然 $\overline{RP}(G)$ 中的所有向量 x 均成立 $x_e \geqslant 0$．对给定的 $e \in E$，如果不是割边，考虑

$$P_e = \{x \in \overline{RP}(G):\ x_e = 0\}.$$

当 $e \notin E_0$ 时，因为 e 不是割边，所以 $G \backslash e$ 必连通．设 $\bar{\tau}_e$ 为 $G \backslash e$ 的一个 Euler 环游(见定理 1 的证明)，关联向量为 $\bar{x}^{\tau_e}$，则 $\bar{x}^{\tau_e} - \chi_{E_0} \in P_e$．

当 $e \in E_0$ 时，必存在 G 的一个 Euler 环游 τ_e，使它经过边 e 仅一次．事实上，对 G 上任意一个 Euler 环游 τ'，$x^{\tau'}$ 为其关联向量，若 $x_e^{\tau'} > 1$，则因 e 不是割边，所以在 $G \backslash e$ 中可以求得连接 e 的两个端点的道路 P，$e \notin P$．令 $\bar{x}^{\tau_e} = x^{\tau'} - (x_e^{\tau'} - 1)\chi_e + (x_e^{\tau'} - 1)\chi_P$，则 $\bar{x}^{\tau_e}$ 是 G 的 Euler 环游，且它仅经过边 e 一次．因此 $\bar{x}^{\tau_e} - \chi_{E_0} \in P_e$．

令 $x^{\tau_e} = \bar{x}^{\tau_e} - \chi_{E_0}$，则 $x^{\tau_e} \in P_e$．因 $x_1^{\tau_e} = x^{\tau_e} + 2\chi_e \in \overline{RP}(G)$，且 $x_{1e}^{\tau_e} = 2 \neq 0$，所以 $P_e \neq \overline{RP}(G)$．即 $\dim(P_e) < \dim(\overline{RP}(G))$．

考虑向量组 $\{x^{\tau_e}, x^{\tau_e} + 2\chi_{e'}, \forall e' \in E, e' \neq e\}$．显然 $x^{\tau_e} + 2\chi_{e'} \in \overline{RP}(G)$，且 $x^{\tau_e} + 2\chi_{e'}$ 对应边 e 的分量为零，因此 $x^{\tau_e} + 2\chi_{e'} \in P_e$．又因为 $\{(x^{\tau_e} + 2\chi_{e'}) - x^{\tau_e} = 2\chi_{e'},\ e' \in E,\ e' \neq e\}$ 是 $|E| - 1$ 个线性无关的向量，所以 P_e 的维数至少为 $|E| - 1$．

由以上讨论知，$\dim P_e = |E| - 1$，即 $x_e \geqslant 0$ 为极大面．

b) 因为 e 是割边，所以对于任意 RP 环游 $\bar{x}$，必有 $\bar{x}_e \geqslant 2$．而 $e \in E_0$，所以对于任意 $x \in \overline{RP}(G)$，总成立 $x_e \geqslant 1$．令 $P_e = \{x \in \overline{RP}(G):\ x_e = 1\}$．

设 $\{x:\ a^T x \geqslant a_0\} \supseteq \overline{RP}(G)$，$P_e \subseteq \{x \in \overline{RP}(G):\ a^T x = a_0\}$．因为 $\overline{RP}(G)$ 是满维的，只要证明存在 $\lambda > 0$，使得 $a^T = \lambda \chi_e^T$，$a_0 = \lambda$．

因 G 连通，记 $G \backslash e$ 的两个分支为 G_1 和 G_2．取 G_1 和 G_2 上的 Euler 环游 x_1 和 x_2，则 $x' = x_1 + x_2 + 2\chi_e$ 是图 G 上的 Euler 环游，且 $x'_e = 2$．于是 $x = x' - \chi_{E_0} \in \overline{RP}(G)$，且 $\chi_e = 1$，即 $x \in P_e$，所以 x 满足

$$a^T x = a_0. \tag{2.1}$$

利用 x，可构成向量组 $\{x + 2\chi_{e'}:\ e' \in E,\ e' \neq e\}$，显然 $x + 2\chi_{e'} \in P_e$，$\forall\ e' \in E$，$e' \neq e$．因此

$$a^T(x + 2\chi_{e'}) = a_0. \tag{2.2}$$

(2.1)与(2.2)相减，得 $2a^T\chi_{e'} = 0$，即

$$a_{e'} = 0,\ \forall e' \neq e,\ e' \in E. \tag{2.3}$$

将(2.3)代入(2.1)得 $a_e x_e = a_0$．所以 $a_e = a_0 \neq 0$．令 $\lambda = a_0$，则得 $a^T = a_e\chi_e^T = \lambda\chi_e^T$．又因为 $\bar{x} = x + 2\chi_e \in \overline{RP}(G)$，故 $a^T\bar{x} = a^T x + 2a^T\chi_e = \lambda + 2\lambda \geqslant a_0 = \lambda$．所以 $\lambda > 0$．于是证明了 $x_e \geqslant 1$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面．

c) 仿 b)的证明方法可以类似地得到证明．

d) 对 $\forall x \in \overline{RP}(G)$，显然成立 $x_e \geqslant 0$．考虑

$$P_e = \{x \in \overline{RP}(G): x_e = 0\}.$$

由 e 的性质知 $P_e = \overline{RP}(G\backslash e)$，而 $\overline{RP}(G\backslash e)$ 的维数为 $|E|-1$，所以 $\dim P_e = |E|-1$，即 $x_e \geqslant 0$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面。

3. 奇割不等式

称图 G 的顶点子集 $S \subseteq V$ 为关于 E_0 的奇点集，如果 S 中含有奇数个 $G[E_0]$ 的奇点；否则就称 S 为偶点集。图 G 的割集 $K=[W, V\backslash W]$（其中 $W\subseteq V$）称为关于 E_0 的奇割，如果 W 或 $V\backslash W$ 为关于 E_0 的奇点集。在下面定理中，所提到的奇点集和奇割均是指关于边集 E_0 的奇点集和关于 E_0 的奇割。

定理 3. 设 $G=(V,E)$ 为连通图，$E_0\subseteq E$，S 为奇点集，则对于任意的 $x\in \overline{RP}(G)$，必满足不等式

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant l, \tag{3.0}$$

其中 $l=\max\{G[S]$ 中顶点集为奇点集的分支数，$G[V\backslash S]$ 中顶点集为奇点集的分支数$\}$，并且当且仅当 $[S,V\backslash S]$ 是极小割集时，不等式(3.0)为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面。

证. I. 对于任意 $x\in\overline{RP}(G)$，必存在整数 $w\geqslant 0$，使 $\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ 满足约束 (1)—(3)。因此对于任意奇点集 $S\subseteq V$，成立

$$\sum_{v\in S}\sum\{x_e:\ e \text{ 与 } v \text{ 关联}\} = \sum_{v\in S} b_v \equiv 1 (\mathrm{mod} 2).$$

又因为

$$\begin{aligned}&\sum_{v\in S}\sum\{x_e:\ e \text{ 与 } v \text{ 关联}\}\\ &=2\sum\{x_e:\ e \text{ 的两端点均在 } S \text{ 中}\}+\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\\ &\equiv\sum\{x_e: e\in[S,V\backslash S]\}\ (\mathrm{mod} 2),\end{aligned}$$

故知

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\equiv 1\ (\mathrm{mod} 2),$$

而 $x_e\geqslant 0$，$\forall e\in E$，所以 $\sum\{x_e: e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 1$ 总成立。

当 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通时，设 T 为 $G[E_0]$ 的奇点集合，对任意 $e'\in[S,V\backslash S]$，设 $e'=(v_1,v_2)$，其中 $v_1\in S$，$v_2\in V\backslash S$。

情况 I-1. $v_1,v_2\in T$。

在 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中分别求 $(T\backslash v_1)\cap S$-join J_1 和 $(T\backslash v_2)\cap(V\backslash S)$-join J_2，则 $J_1\cup J_2\cup\{e'\}$ 是图 G 上的一个 T-join，设它的关联向量为 $x^{e'}$，则成立

$$\sum\{x_e^{e'}: e\in[S,V\backslash S]\}=1. \tag{3.1}$$

情况 I-2. e' 只有一个端点在 T 中，不妨设 $v_1\in T$。

任取 $(V\backslash S)\cap T$ 中的一个顶点 v_2'，并在 $G[V\backslash S]$ 中求一条连接 v_2 与 v_2' 的道路 P，则 $P\cup e'$ 为连接 v_2' 与 v_1 的一条路。在 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中分别求 $(S\backslash v_1)\cap T$-join J_1 和 $(T\backslash v_2')\cap(V\backslash S)$-join J_2。于是 $J_1\cup J_2\cup P\cup\{e'\}$ 为 G 上的 T-join，设其关联向量为 $x^{e'}$，则 $x^{e'}$ 也满足(3.1)式。

情况 I-3. $v_1,v_2\notin T$。

分别取 $S\cap T$ 和 $(T\backslash S)\cap T$ 中的点 v_1',v_2'，并分别在 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中求出 v_1，v_1' 之间和 v_2，v_2' 之间的道路 P_1 和 P_2。在 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中分别求 $(S\backslash v_1')\cap T$-join

和 $[(V\backslash S)\backslash v_2']\cap T$-join，分别记之为 J_1 和 J_2，令 $J=J_1\cup J_2\cup P_1\cup P_2\cup\{e'\}$，易知 J 为 G 上的 T-join，其关联向量 $x^{e'}$ 满足式(3.1)。

由以上讨论，我们知，对于任意的 $e'\in[S,V\backslash S]$ 都可求得一个 T-join$x^{e'}$，满足(3.1)式，且对任意 $e\in[S,V\backslash S]$，成立

$$x_e^{e'}=\begin{cases}1, & e=e',\\ 0, & e\neq e'.\end{cases} \tag{3.2}$$

对任意 $e'\in[S,V\backslash S]$，及任意 $e''\notin[S,V\backslash S]$，令 $x^{e',e''}=x^{e'}+2\chi_{e''}$，则 $x^{e',e''}$ 仍是一个满足(3.1)和(3.2)的 RP 环道。

今设不等式 $a^Tx\geqslant a_0$ ($a^T\neq 0$) 满足下列条件：对任意的 $x\in\overline{RP}(G)$，总成立 $a^Tx\geqslant a_0$，且

$$\{x\in\overline{RP}(G):\ \sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}=1\}$$
$$\subseteq\{x\in\overline{RP}(G):\ a^Tx=a_0\}.$$

于是 $x^{e'}$ 和 $x^{e',e''}$ 满足

$$a^Tx^{e'}=a_0,\qquad \forall e'\in[S,V\backslash S], \tag{3.3}$$

$$a^Tx^{e',e''}=a_0,\quad \forall e'\in[S,V\backslash S],\ \forall e''\notin[S,V\backslash S]. \tag{3.4}$$

两式相减得 $2a^T\chi_{e''}=0$，即 $a_{e''}=0$，$\forall e''\notin[S,V\backslash S]$。

不妨设 $a^T=(a_1^T,a_2^T)$，其中 a_1^T 对应 $[S,V\backslash S]$ 中边的分量，a_2^T 对应 $E\backslash[S,V\backslash S]$ 中边的分量，于是成立 $a_2^T=0$。所以 $a^T=(a_1^T,0)$。相应地将 x 也记为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$x_1$ 和 x_2 分别对应 $[S,V\backslash S]$ 和 $E\backslash[S,V\backslash S]$ 中边的分量，则(3.3)成立

$$a_1^Tx_1^{e'}=a_0.$$

再由(3.2)知 $x_1^{e'}$ 是 $R^{[S,V\backslash S]}$ 中 e' 的特征向量，所以 $a_{e'}=a_0$，$\forall e'\in[S,V\backslash S]$。

令 $\lambda=a_0$，则 $a_{e'}=\lambda$，$\forall e'\in[S,V\backslash S]$。因此 $a^T=\lambda(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$，其中取 1 的分量对应于 $[S,V\backslash S]$ 中的边，而取 0 的分量对应于 $E\backslash[S,V\backslash S]$ 中的边。

再由于对 $e_0'\in[S,V\backslash S]$，$x^{e_0'}+2\chi_{e_0'}\in\overline{RP}(G)$，且满足

$$\sum\{x_e^{e_0'}:\ e\in[S,V\backslash S]\}>1$$

及

$$\lambda\sum\{x_e^{e_0'}:e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant\lambda.$$

于是知，$\lambda>0$。

至此证明了，当 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通时，$\sum\{x_e:e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 1$ 为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面。

II. 因 S 为关于 E_0 的奇点集，所以 $G[S]$ 中必有奇数个顶点集为奇点集的分支（奇分支）。

设 $W_1,W_2,\cdots,W_{2l_1+1}$ ($l_1\geqslant 0$) 为 $G[S]$ 的奇分支，由 I 知，必成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(W_i),\ V\backslash V(W_i)]\}\geqslant 1,\quad 1\leqslant i\leqslant 2l_1+1.$$

设 $U_1,U_2,\cdots,U_{m_1}$ ($m_1\geqslant 0$) 为 $G[S]$ 中的偶分支（顶点集为偶点集的分支），则成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(U_i),\ V\backslash V(U_i)]\}\geqslant 0,\ 0\leqslant i\leqslant m_1.$$

将这 $2l_1+1+m_1$ 个式子相加，得

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 2l_1+1.$$

若 $G[V\backslash S]$ 有 $2l_2+1$ 个奇分支 ($l_2\geqslant 0$), $m_2(m_2\geqslant 0)$ 个偶分支,则同理可得,对任意 $x\in\overline{RP}(G)$, 总成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 2l_2+1.$$

因此,对任意 $x\in\overline{RP}(G)$ 及奇点集 S, (3.0)总成立.

III. 若 $G[S]$ 或 $G[V\backslash S]$ 中至少有一个不连通,不妨设 $G[S]$ 不连通.

情况 III-1. $G[S]$ 中有偶分支,不妨设 $G[S]$ 有两个分支 U,W,其中W为奇分支,U为偶分支. 考虑

$$P_S=\{x\in\overline{RP}(G):\ \sum\{x_e: e\in[S,V\backslash S]\}=1\}.$$

因为W奇分支, 必成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(W),\ V\backslash V(W)]\}\geqslant 1.$$

而U和W之间没有边,因此

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(U),V\backslash V(U)]\}\geqslant 0.$$

所以 $P_S=\phi$ 或 $P_S\subseteq\overline{RP}(G\backslash U)$. 在两种情况下, P_S 的维数总不超过 $\dim(\overline{RP}(G))-2$. 由此知

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant l$$

非极大面.

情况 III-2. $G[S]$ 没有偶分支,不妨设 $G[S]$ 中有三个奇分支,记为 W_1, W_2 和 W_3, $G[V\backslash S]$ 连通.

对任意 $x\in\overline{RP}(G)$, 必成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(W_i),\ V\backslash V(W_i)]\}\geqslant 1,\quad i=1,2,3. \tag{3.5}$$

由 II 的结果知,对任意 $x\in\overline{RP}(G)$, 成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 3.$$

今考虑

$$P_S=\{x\in\overline{RP}(G):\ \sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}=3\}.$$

由(3.5)知,对任意 $x\in P_S$, 必成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(W_i),\ V\backslash V(W_i)]\}=1,\quad i=1,2,3.$$

记 $P_{W_i}=\{x\in\overline{RP}(G):\ \sum\{x_e:\ e\in[V(W_i),\ V\backslash V(W_i)]\}=1\}$, $i=1,2,3$. 则 $P_S=P_{W_1}\cap P_{W_2}\cap P_{W_3}$. 因为 $P_{W_i}\neq P_{W_j}$ ($i\neq j$) 及 $\dim(P_{W_i})=\dim\overline{RP}(G)-1$, $i=1,2,3$, 故得

$$\dim P_S<\dim P_{W_i}=\dim\overline{RP}(G)-1.$$

即证明了 $\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 3$ 非极大面.

至此我们已证明了当 $G[S]$ 或 $G[V\backslash S]$ 中不全连通时,(3.0)不是 $\overline{RP}(G)$ 的极大面. 又因为割集 $[S,V\backslash S]$ 为极小割集,当且仅当 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通. 所以定理得证.

4. 极小割不等式

我们知道由 $x\in\overline{RP}(G)$ 可定义 Euler 图 G', 它包含 E_0 中所有的边,为保证 G' 是

2-连通的，x 应满足下面的约束，对任意 $S\subseteq V$，

$$\sum\{x_e+1:\ e\in E_0\cap[S,V\backslash S]\}+\sum\{x_e:\ e\in(E\backslash E_0)\cap[S,V\backslash S]\}\geqslant 2.$$

设 $G[E_0]$ 有 k 个分支 $W_1,W_2,\cdots,W_k$，各分支对应顶点集合为 $V_1,\cdots,V_k$. 在上面的不等式中特别地取 $S\subseteq V$ 满足条件：$V_i\cap S=\phi$ 或 $V_i\subseteq S$，$1\leqslant i\leqslant k$. 则得

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}\geqslant 2. \tag{4.0}$$

定理 4. 设 $G=(V,E)$ 为连通图，$E_0\subseteq E$. S 为顶点子集，且满足条件：对任意 $1\leqslant i\leqslant k$，$V_i\cap S=\phi$，或 $V_i\subseteq S$. 则(4.0)为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面，当且仅当割集 $[S,V\backslash S]$ 为极小割.

证. 我们已经证明对满足定理条件的顶点子集 S 以及任意的 $x\in\overline{RP}(G)$，(4.0)式总成立.

为证明(4.0)是 $\overline{RP}(G)$ 的极大面，设不等式 $a^Tx\geqslant a_0(a^T\neq 0)$ 满足条件，对任意 $x\in\overline{RP}(G)$，总成立 $a^Tx\geqslant a_0$，且 $\{x\in\overline{RP}(G):\ \sum\{x_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}=2\}\subseteq\{x\in\overline{RP}(G):\ a^Tx=a_0\}$.

设 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通，因此可在 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中分别求得一个 Euler 环游 τ_1 和 τ_2. 任取 $e'\in[S,V\backslash S]$，则 $\tau_1\cup\tau_2\cup\{2e'\}$ 为 G 上关于 E_0 的 RP 环道，记之为 τ，其关联向量为 $x^{\tau(e')}$，令 $x^{e'}=x^{\tau(e')}-\chi_{E_0}$，则 $x^{e'}\in\overline{RP}(G)$，且满足

$$x_e^{e'}=\begin{cases}1,\ e=e',\ e\in[S,V\backslash S],\\0,\ e\neq e',\ e\in[S,V\backslash S]\end{cases} \tag{4.1}$$

及 $\sum\{x_e^{e'}:e\in[S,V\backslash S]\}=2$. 因此成立

$$a^Tx^{e'}=a_0. \tag{4.2}$$

对任意 $e''\notin[S,V\backslash S]$，向量 $x^{e'}+2\chi_{e''}\in\overline{RP}(G)$，且成立 $\sum\{(x^{e'}+2\chi_{e''})_e:\ e\in[S,V\backslash S]\}=2$. 因此，

$$a^Tx^{e'}+2a^T\chi_{e''}=a_0. \tag{4.3}$$

由(4.2)和(4.3)相减，得 $2a^T\chi_{e''}=0$，即 $a_{e''}=0$，$\forall e''\in E\backslash[S,V\backslash S]$. 将此结论代入(4.2)式，并由(4.1)知，$2a_{e'}=a_0$，$\forall e'\in[S,V\backslash S]$.

令 $\lambda=\frac{1}{2}a_0$，则 $a_0=2\lambda$；$a_{e'}=\lambda$，$\forall e'\in[S,V\backslash S]$. 容易证明 $\lambda>0$. 因此我们证明了(4.0)为 $\overline{RP}(G)$ 的极大面.

设 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 中至少有一个不连通，不妨设 $G[S]$ 不连通. 设 $U_1,U_2,\cdots,U_m$ 为 $G[S]$ 的连通分支 $(m\geqslant 2)$，则 $V(U_i)$ 必满足定理中 S 的条件，因此成立

$$\sum\{x_e:\ e\in[V(U_i),\ V\backslash V(U_i)]\}\geqslant 2,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

将各式相加得

$$\sum\{x_e:\ e\in[S,\ V\backslash S]\}\geqslant 2m>2.$$

因此证明了，此时(4.0)不是 $\overline{RP}(G)$ 的极大面.

于是(4.0)为 $RP(G)$ 的极大面，当且仅当 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通，而 $G[S]$ 和 $G[V\backslash S]$ 均连通的充要条件是 $[S,V\backslash S]$ 为 G 的极小割集.

参 考 文 献

[1] Edmonds, J. & Johnson, E. L., Matching, Euler tours and the Chinese Postman, *Math. Prog.*, 5(1973), 88—124.

[2] Lenstra, J. K. & Pinnooy Kan, A. H. G., On general routing problem, *Networks*, 6(1976), 273—280.

[3] Grotschel, M. & Padberg, M. W., Polyhedral theory, In the Travelling, Salesman, Problem, Lawler, E. L., Lenstra, J. K., et al. Eds., John Wiley & Sons, Great Britain, 1986.

THE POLYHEDRON OF THE RURAL POSTMAN PROBLEM

PENG YUN

(*Institute of Mathematics, Shandong University, Jinan* 250100)

ABSTRACT

The general routing problem proposed by C. S. Orloff in 1974 is, given a graph $G=(V,E)$ with $V_0 \subseteq V, E_0 \subseteq E$ and edge cost $c: E \to R_+$, to find a clised walk of minimum cost which contains every vertex of V_0 and every edge of E_0. When $V_0 = \phi$, the problem is the Rural Postman Problem (RPP). When $E_0 = E$, the RPP is the familiar Chinese Postman Problem (CPP). It is proved that the CPP can be solved in polynomial time while the RPP is NP-complete.

The combinatorial polyhedral methods are successfully used in NP-complete problems in recent years. In this paper, the polyhedron relative to RPP is discussed and several kinds of facets of this polyhedron are described.