系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(3) (2008, 3), 379–384

椭圆型方程奇摄动问题的广义解*

莫 嘉 琪

(安徽师范大学数学系， 芜湖 241000; 上海高校计算科学 E- 研究院 SJTU 研究所， 上海 200240)

摘要 讨论了一类奇摄动椭圆型方程边值问题. 在适当的条件下，研究了问题广义解的存在、唯一性及其渐近性态.

关键词 椭圆型方程，奇异摄动，广义解.

MR(2000) 主题分类号 35B25, 35J60

1 引 言

奇异摄动问题是目前在国际学术界十分关注的一个问题[1]. 近年来许多学者的研究都涉及到这一方面的工作，例如 Kelley[2], Hamouda[3], Akhmetov, Lavrentievm 和 Spigler[4], Bell 和 Deng[5] 及 Adams, King 和 Tew[6] 等. 莫嘉琪等也讨论了一类奇摄动非线性常微分方程问题 [7−8], 反应扩散方程问题 [9−13], 椭圆型方程边值问题 [14−15], 双曲型方程初始边值问题 [16], 非线性激波问题 [17−18] 和非线性大气物理问题 [19−24]. 本文涉及的是奇摄动问题的广义解.

今讨论如下非线性椭圆型方程 Dirichlet 问题

$$\varepsilon^2 L[u] = f(x,u), \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega \subset R^n, \tag{1}$$

$$u = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

其中 ε 是正的小参数， Ω 为 R^n 中的有界凸域， $\partial\Omega$ 为 Ω 的光滑边界，且

$$L \equiv \sum_{0\le\mu,\sigma\le 1} (-1)^\mu D^\mu (a^{\mu\sigma}(x) D^\sigma), \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

而 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, 系数 $a^{\mu\sigma}$ 假设为 $C^\infty(\Omega)$ 中的实值函数， L 为在 $\overline{\Omega}$ 上一致椭圆型的

$$\sum_{0\le\mu,\sigma\le 1}^{n} \xi^\mu a^{\mu\sigma}(x) \xi^\sigma \ge \lambda |\xi|^2 := \lambda \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right), \quad \forall \xi \in R^n,\ x \in \overline{\Omega},\ \lambda > 0,$$

* 国家自然科学基金 (40676016, 10471039), 国家重点基础研究发展计划项目 (973 项目) (2003CB415101-03, 2004CB418304), 中国科学院创新方向性项目 (KZCX3-SW-221) 和上海市教育委员会 E- 研究院建设计划项目 (N.E03004) 资助课题.

收稿日期：2005-04-15, 收到修改稿日期：2006-08-31.

f 和 g 为其变元在对应的区域内充分光滑的实值函数.

代替问题 (1)–(2), 我们考虑广义问题

$$\varepsilon^2 B_1[\phi,u]=(\phi,f(x,u)),\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{3}$$

$$(\phi,u)=(\phi,g),\quad x\in\partial\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{4}$$

其中

$$B_1[\phi,u]\equiv\sum_{0\le\mu,\sigma\le1}(D^\mu\phi,a^{\mu\sigma}D^\sigma u)=(\phi,L[u]),$$

而 $C_0^\infty(\Omega)$ 为由 Ω 中具有紧支函数并为 $C^\infty(\Omega)$ 的子集，表示式 $B_1[\nu,u]$ 为双线性形式，该形式是 u,v 在 Ω 中有界并被定义在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 且具有有限模

$$\|\phi\|_j=\left\{\sum_{\alpha\le j}\int_\Omega|D^\alpha\phi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12},\quad\forall\,\phi\in C^1(\Omega),\ j=0,1,$$

同时 (u,v) 是被定义在 $H^1(\Omega)$ 中的内积.

2 广义解的存在、唯一性

首先假设

$[\mathrm{H}_1]$ 存在不依赖于 v 和 u 的常数 $C_{j1},\ j=1,2$, 对于 $\forall\,v,u\in H^1$

$$|B_1[v,u]|\le C_{11}\|v\|_1\cdot\|u\|_1,\quad |B_1[v,v]|\ge C_{21}\|v\|^2,\quad\forall\,v,u\in H^1;$$

$[\mathrm{H}_2]$ 存在正常数 $\delta_i,i=1,2$, 使得

$$-\delta_2\le\frac{\partial f}{\partial u}\le-\delta_1<0,\quad\forall\,u\in R;$$

$[\mathrm{H}_3]$ 系数 $a^{\mu\sigma},\ 0\le\mu,\sigma\le1$, 在 Ω 中有上界 C_2, 且

$$|a^{\mu\sigma}(x)-a^{\mu\sigma}(y)|\le C_2(|x-y|),\quad\mu=\sigma=1,\ \forall\,x,y\in\Omega,$$

其中 $C_2(|x-y|)\to0$, 当 $|x-y|\to0$.

现证如下定理

定理 1 在假设 $[\mathrm{H}_1]$–$[\mathrm{H}_3]$ 下，广义边值问题 (3)–(4) 存在唯一的解 $u_\varepsilon\in H^1(\Omega)$.

证 首先，任取一个函数 $u^0\in H^1(\Omega)$, 考虑广义线性边值问题

$$\varepsilon^2B_1[\phi,u]=(\phi,f(x,u^0)),\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$
$$(\phi,u)=(\phi,g),\quad x\in\partial\Omega.$$

由假设，在 Hilbert 空间 H^1 中，表示式为

$$F[v]=\varepsilon^2B_1[v,u]=(v,w),$$

且满足

$$(\phi,u)=(v,g),\quad x\in\partial\Omega$$

的每一有界泛函 $F[v]$ 可决定唯一 u. 取

$$F[v]=(v,f(x,u^0)),$$

则存在唯一的广义解 $u^1\in H^1(\Omega)$, 且满足

$$\varepsilon^2B_1[\phi,u^1]=(\phi,f(x,u^0)),\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$

$$(\phi,u^1)=(\phi,g),\quad x\in\partial\Omega.$$

利用迭代法，设 $u^{j-1}\in H^1(\Omega)$, 并考虑

$$\varepsilon^2B_1[\phi,u^j]=(\phi,f(x,u^{j-1})),\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$

$$(\phi,u^j)=(\phi,g),\quad x\in\partial\Omega,$$

则我们能得到解 $u^j\in H^1(\Omega)$. 于是得到一个函数列 $\{u^j|u^j\in H^1(\Omega),\ j=0,1,\cdots\}$. 由假设 $[\mathrm{H}_1]$–$[\mathrm{H}_3]$ 和文 [1] 知，上述函数列是有界序列，故问题 (3)–(4) 存在唯一的广义解 $u\in H^1(\Omega)$ 满足 $\lim\limits_{j\to\infty}(\phi,u^j)=(\phi,u),\ \ \forall\,\phi\in C_0^\infty$. 证毕.

3 解的形式渐近式

考虑 (3)–(4) 的退化方程

$$(\phi,f(x,u))=0,\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega).\tag{5}$$

由假设， (5) 存在唯一解 w_0.

现构造问题 (1)–(2) 的外部渐近解. 设

$$u=\sum_{i=0}^\infty w_i\varepsilon^i.$$

将上式代入 (3), 并把各项按 ε 的幂进行展开. 考虑到 w_0 为方程 (5) 的解，取 $\varepsilon^i,\ i=1,2,$ 的系数的代数和为零. 可得

$$(\phi,f_u(x,w_0)w_1)=0,\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{6}$$

$$(\phi,f_u(t,x,w_0)w_2)=B_1[\phi,w_0]+(\phi,h_0),\quad x\in\Omega,\ \forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{7}$$

其中 h_0 为 w_0 的已知函数. 由 (6), 可得 $w_1=0$, 由 (7) 可得唯一的光滑解 w_2.

为了得到原问题解的渐近近似式，还需在区域 Ω 的边界附近构造边界层校正项. 为此，先在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 附近引入局部坐标系 (ρ,ϕ)[9]. 在这样的局部坐标系下，在 $\partial\Omega$ 的邻域 $0\le\rho\le\rho_0$ (ρ_0 为足够小的常数) 内，二阶椭圆型算子 L 的表示式为

$$L=\overline{a}_{11}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\overline{L},$$

其中

$$\overline{a}_{11}=\sum_{0\le\mu,\sigma\le1}(-1)^\mu D^\mu a^{\mu\sigma}D^\sigma,$$

而 $\overline{L}$ 为不含 $\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}$ 项的二阶线性算子.

作伸长变量的变换 [9]

$$\tau = \frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{8}$$

并设

$$u_\varepsilon \sim \sum_{i=0}^{\infty} w_i(x)\varepsilon^i + \sum_{i=0}^{\infty} v_i(\tau)\varepsilon^i. \tag{9}$$

考虑到 (8), 将上式代入 (3)–(4), 并把各项按 ε 的幂进行展开. 注意到 w_i, $i=0,1,2$, 分别为方程 (5)–(7) 的解，取 ε^i, $i=0,1,2$, 的系数的代数和为零，可得

$$\Big(\phi, \frac{\partial^2 v_0}{\partial\tau^2}\Big) + K_0[\phi, v_0] + (\phi, f(x,w_0) - f(x, w_0+v_0)) = 0, \quad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{10}$$

$$(\phi, v_0) = (\phi, g) + (\phi, -w_0), \quad \rho = 0, \tag{11}$$

$$\Big(\phi, \frac{\partial^2 v_1}{\partial\tau^2}\Big) + K_1[\phi, v_1] - (\phi, f_u(t,x,w_0+v_0)v_1) = (\phi, h_1), \quad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{12}$$

$$(\phi, v_1) = (\phi, -w_1), \quad \rho = 0, \tag{13}$$

$$\Big(\phi, \frac{\partial^2 v_2}{\partial\tau^2}\Big) + K_2[\phi, v_2] - (\phi, f_u(t,x,w_0+v_0)v_2) = (\phi, h_2), \quad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{14}$$

$$(\phi, v_2) = (\phi, -w_2), \quad \rho = 0, \tag{15}$$

其中 K_i, $i=0,1,2$, 为与 $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}$ 无关的线性算子， h_i, $i=1,2$, 为逐次已知的函数.

由假设, 不难看出问题 (10)–(11), (12)–(13), (14)–(15) 分别有在 $H^1(\Omega)$ 意义下的解 v_i, $i=0,1,2$, 使得

$$v_i = O(\exp(-r_i\tau)) = O\Big(\exp\Big(-r_i\frac{\rho}{\varepsilon}\Big)\Big), \quad 0<\varepsilon\ll 1, \tag{16}$$

其中 $0 < r_i \le \delta_0$. 再令

$$\overline{v}_i = \psi(\rho)v_i, \quad i=0,1,2,$$

其中 $\psi(\rho) = \psi(x) \in C^\infty(\Omega)$, 并满足

$$\psi(\rho) = \begin{cases} 1, & 0 \le \rho \le \Big(\dfrac{1}{3}\Big)\rho_0, \\ 0, & \rho \ge \Big(\dfrac{1}{3}\Big)\rho_0. \end{cases}$$

因此， $\overline{v}_i$ 为具有边界层校正项性质的函数. 于是，将所的结果代入 (9), 我们便得到问题 (3)–(4) 解 u_ε 的二阶形式渐近式.

4 余项估计

设

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{2}[w_i(x) + \overline{v}_i(x)]\varepsilon^i + z(x,\varepsilon), \tag{17}$$

其中 $z \in H^1(\Omega)$ 且由 (3)–(4) 和 (16), 对于充分小的 ε, 使得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 B_1[\phi, z] - (\phi, f(x,z))\\
&= \varepsilon^2 B_1\left[\phi, u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{2}[w_i + \overline{v}_i]\varepsilon^i\right] - \left(\phi, f\left(x, u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{2}[w_i + \overline{v}_i]\varepsilon^i\right)\right)\\
&= (\phi, f(x, w_0)) + \{(\phi, f_u(t,x,w_0)w_1)\}\varepsilon\\
&\quad + \{(\phi, f_u(t,x,w_0)w_2) - B_1[\phi, w_0] - (\phi, h_0)\}\varepsilon^2\\
&\quad - \left\{\left(\phi, \frac{\partial^2 \overline{v}_0}{\partial \tau^2}\right) + K_0[\phi, \overline{v}_0] + (\phi, f(t,x,w_0) - f(t,x,w_0 + \overline{v}_0))\right\}\\
&\quad - \left\{\left(\phi, \frac{\partial^2 \overline{v}_1}{\partial \tau^2}\right) + K_1[\phi, \overline{v}_1] - (\phi, f_u(t,x,w_0 + \overline{v}_0)\overline{v}_1 - h_1)\right\}\varepsilon\\
&\quad - \left\{\left(\phi, \frac{\partial^2 \overline{v}_2}{\partial \tau^2}\right) + K_2[\phi, \overline{v}_2] - (\phi, f_u(t,x,w_0 + \overline{v}_0)\overline{v}_2 - h_2)\right\}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\\
&= O(\varepsilon^3), \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega),\\
&\quad (\phi, z) = 0, \quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

故由假设，可得

$$\|z\|_0 = O(\varepsilon^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

于是我们有如下定理.

定理 3 在假设 $[\mathrm{H}_1]$–$[\mathrm{H}_3]$ 下，对于充分小的 ε, 椭圆型方程边值问题 (1)–(2) 在 $H^1(\Omega)$ 意义下具有形如 (16) 的广义解 u_ε 成立

$$\left\|u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{2}[w_i - v_i]\varepsilon^i\right\|_0 = O(\varepsilon^3), \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

其中 w_0 为广义退化问题 (5) 的解，$\sum\limits_{i=0}^{2} w_i(x)\varepsilon^i$ 为问题 (1)–(2) 的外部解的近似值，v_i, $i = 0, 1, 2$, 为具有边界层校正项.

参　考　文　献

[1] de Jager E M and Jiang Furu. The Theory of Singular Perturbation. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1996.

[2] Kelley W G. A singular perturbation problem of Carrier and Pearson. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **255**(3): 678–697.

[3] Hamouda M. Interior layer for second-order singular equations. *Applicable Anal.*, 2002, **81**(4): 837–866.

[4] Akhmetov D R, Lavrentievm Jr M M and Spigler R. Singular perturbations for certain partial differential equations without boundary-layers. *Asymptotic Anal.*, 2003, **35**(1): 65–89.

[5] Bell D C and Deng B. Singular perturbation of N-front traveling waves in the Fitzhugh-Nagumo equations. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2003, **3**(4): 515–541.

[6] Adams K L, King J R and Tew R H. Beyond-all-orders effects in multiple-scales symptotic: Travelling-wave solutions to the Kuramoto-Sivashinsky equation. *J. Engineering Math.*, 2003, **45**(1): 197–226.

[7] Mo Jiaqi. A singularly perturbed nonlinear boundary value problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, **178**(2): 289–293.

[8] Mo Jiaqi. A class of singularly perturbed boundary value problems for nonlinear differential systems. *J. Sys. Sci. and Math. Sci.*, 1999, **12**(1): 56–58.

[9] Mo Jiaqi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems. *Science in China*, Ser A, 1989, **32**(11): 1306–1315.

[10] Mo Jiaqi and Han Xianglin. A class of singularly perturbed generalized solution for the reaction diffusion problems. *J. Sys. Sci. and Math. Sci.*, 2002, **22**(4): 447–451.

[11] Mo Jiaqi and Feng Maochun. The nonlinear singularly perturbed problems for reaction diffusion equations with time delay. *Acta Math. Sci.*, 2001, **21B** (2): 254–258.

[12] Mo Jiaqi. The singularly perturbed problem for combustion reaction diffusion. *Acta Math. Appl. Sinica*, 2001, **17**(2): 255–259.

[13] 莫嘉琪. 在局部区域上的奇摄动反应扩散方程初始边值问题. 系统科学与数学, 2005, **25**(1): 63–68.

[14] Mo Jiaqi and Shao S. The singularly perturbed boundary value problems for higher-order semilinear elliptic equations. *Advances in Math.*, 2001, **30**(2): 141–148.

[15] Mo Jiaqi and Ouyang Cheng. A class of nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems in unbounded domains. *Acta Math. Sci.*, 2001, **21**(1): 93–97.

[16] Mo Jiaqi. A class of nonlocal singularly perturbed problems for nonlinear hyperbolic differential equation. *Acta Math. Appl. Sinica*, 2001, **17**(4): 469–474.

[17] Mo Jiaqi, Zhu Jiang and Wang Hui. Asymptotic behavior of the shock solution for a class of nonlinear equations. *Progress in Natural Sci.*, 2003, **13**(10): 768–770.

[18] Mo Jiaqi and Han Xianglin. Asymptotic shock solution for a nonlinear equation. *Acta Math. Sci.*, 2004, **24** (2): 164–167.

[19] Mo Jiaqi, Lin Wantao and Wang Hui. The perturbed solution of sea-air oscillator for ENSO model. *Progress in Natural Sci.*, 2004, **14**(6): 550–552.

[20] Mo Jiaqi, Lin Wantao and Zhu Jiang. A variational iteration solving method for ENSO mechanism. *Progress in Natural Sci.*, 2004, **14**(12): 1126–1128.

[21] 莫嘉琪, 林万涛, 朱江. ENSO 非线性模型的摄动解. 物理学报, 2004, **53**(4): 996–998.

[22] 莫嘉琪, 林万涛. 一类厄尔尼诺海 - 气振子的同伦解法. 物理学报, 2005, **54**(3): 993–995.

[23] 莫嘉琪, 林万涛, 厄尔尼诺大气物理机理的变分迭代解法. 物理学报, 2005, **54**(3): 1182–1183.

[24] Lin Wantao and Mo Jiaqi. Asymptotic behavior of perturbed solution for simple coupled ocean-atmosphere model for ENSO. *Chinese Science Bulletin*, 2004, **48 II**(1): 5–7.

GENERALIZED SOLUTION OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATION

MO Jiaqi

(*Anhui Normal University, Wuhu* 241000*; Division of Computational Science, E-Institutes of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai,* 200240)

Abstract The singularly perturbed boundary value problems for elliptic equation are considered. Under suitable conditions the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the generalized solution for the problems are studied.

Key words Elliptic equation, singular perturbation, generalized solution.