系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(4) (2008, 4), 406–415

求解 Hamilton 约束的新算法*

贾屹峰
(首都师范大学数学科学学院, 北京 100037)
陈玉福
(中国科学院研究生院数学系, 北京 100049)

摘要 利用吴方法对多项式类型带约束的 Hamilton 系统作了研究. 给出了判断系统是否正则的一个新算法. 对于正则系统, 可以得到 Hamilton 函数和运动方程, 而对退化的系统给出了两个求解约束的新算法, 得到带约束的 Hamilton 函数和运动方程. 利用符号计算软件, 这几个算法都可以在计算机上实现.

关键词 约束, 特征列, Hessian 矩阵.

MR(2000) 主题分类号 68W30, 70H45

1 引言

动力学中的 Lagrange 函数是关于 n 个广义坐标, n 个广义速度和时间 t 的函数. 如果 Lagrange 函数的 Hessian 矩阵非奇异, 系统称为正则的, 否则, 称为退化的. 在现实中, 一些很重要的物理系统和力学系统都是退化的, 例如重力场的 Einstein 理论, 用电势描述的电磁场理论等, 所以研究退化的动力系统是很有必要的.

研究动力学需要进行大量的复杂计算. 对于一个动力学系统, 首先要计算 Hessian 矩阵的秩, 判断系统是正则的还是退化的. 一般情况, Hessian 矩阵是函数矩阵, 因此计算 Hessian 矩阵的秩比较困难. 另外, 随着维数的升高, Hessian 矩阵的阶数随之增大, 求它的秩会更加困难. 通过 Legendre 变换, Lagrange 函数变为 Hamilton 函数, 得到 Hamilton 系统. 正则的 Hamilton 系统, Euler-Lagrange 方程形式简洁, 易于研究. 退化的 Hamilton 系统, 可能带有约束, 必须求出所有的约束, 最终得到带约束的 Euler-Lagrange 方程. 求解约束的过程比较复杂, 而且计算量比较大. 经典求约束方法是 Dirac 方法. 在 Dirac 方法中, 必须反复求解线性方程组和相容条件. 虽然是线性方程组, 但系数是函数, 所以求解过程比较复杂, 计算量也很大.

随着计算机的发展, 大量的复杂计算可以在计算机上完成. 计算机也被用以辅助研究动力学, 我们简要描述当前文献中的方法: 在文 [1] 中, 将合法和 Dirac 方法结合, 用于研究带约束 Hamilton 系统; 在文 [2] 中, 将 Groebner 基和 Dirac 方法结合求解 Hamilton 系统的约

* 中国科学院研究生院科研启动基金 (KYQD200502) 资助项目.
收稿日期: 2006-04-11, 收到修改稿日期: 2007-04-09.

束；在文 [3] 中将合法和 Faddeev-Jackiw 方法结合，用于研究带约束的 Lagrange 系统．上述方法都可以在计算机上实现．

本文利用吴方法对带约束 Hamilton 系统作了研究．首先在吴消元法的基础上，给出了判断系统是否正则的算法 3.1. 利用算法 3.1, 不需要计算 Hessian 矩阵的秩，直接可以判定系统是否正则，并且如果系统是正则的，利用多项式除法，求出 Hamilton 函数和运动方程，不用作代入计算；如果是退化的，求出规范 Hamilton 函数和首约束．带约束的 Hamilton 系统，在算法 3.1 的基础上，利用吴方法，给出了两个求约束的算法，利用这两个算法可以很快求出约束，得到 Hamilton 函数和运动方程．而且利用吴微分特征列法，可以对带约束的运动方程作进一步的化简，更易于求解．这两个算法，分别利用多项式除法和微分除法，在整个过程中，无需解方程和代入．借助符号计算软件平台，上述两个算法都能在计算机上实现，这样即可利用计算机辅助来研究 Hamilton 系统．

本文只研究多项式类型的动力学方程．在后面有时用 q,p 表示所有的广义坐标和广义动量 q_i, p_i, $i=1,2,\cdots,n$; $\dot{q}$, $\dot{p}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 分别表示它们对时间求导．此外我们约定如果出现两个相同的下标，就表示求和．

2 Hamilton 系统和 Dirac 方法

在具有有限个自由度的系统中，运动方程用广义坐标 $q_i, i=1,2,\cdots,n$, 广义速度 $\dot{q}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 和时间 t 描述为

$$A=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$L(t,q,\dot{q})$ 称为 Lagrange 函数， $L(t,q,\dot{q})$ 也经常写成 $L(q,\dot{q})$. 如果 Hessian 矩阵

$$[w_{ij}]=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right] \tag{2}$$

的行列式不恒等于零，则称 Lagrange 函数是正则的，否则称为退化的．退化的系统可能带有约束，称为带约束的动力学．利用变分原理，可以得到运动学基本方程 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\Big)=\frac{\partial L}{\partial q_i},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

引入动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}(t,q_i,\dot{q}_i), \tag{4}$$

并利用 Legendre 变换

$$H_c=p_i\dot{q}_i-L, \tag{5}$$

Lagrange 函数 L 变成 Hamilton 函数 H_c, 相应的系统为 Hamilton 系统．研究带约束 Hamilton 系统的经典方法是 Dirac 方法． Dirac 引入弱相等 $\approx$ 和强相等 $\simeq$[4], 利用 Possion 括号，求出所有的约束，并把约束分为第一类和第二类，然后再进一步研究 Dirac 括号，规范变换，量子化等． (4) 可以看成一个坐标变换， Hessian 矩阵就是坐标变换的 Jacobi 矩阵．如果

Hessian 矩阵非奇异，根据隐函数定理， $\dot{q}_i, i=1,2,\cdots,n$ 可以被显式表示．如果 Hessian 矩阵是奇异的，设它的秩为 R, 经过计算，从 (4) 可以解出 R 个 $\dot{q}$, 并得到 $n-R$ 个方程

$$p_r = g_r(q,p), \quad r = R+1, 2, \cdots, n. \tag{6}$$

(6) 称为首约束，有时也写成隐式形式 $\theta_r(q,p)=0$. 把解出的 R 个 $\dot{q}$ 和 (6) 代入 (5), 得到的 H_c 称为规范的 Hamilton 函数．引入乘子 λ_r, $r=1,2,\cdots,n-R$, λ_r 为待定函数，可得首 Hamilton 函数和运动方程

$$H_p \approx H_c + \lambda_r\theta_r, \tag{7}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_r \frac{\partial \theta_r}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_r\frac{\partial \theta_r}{\partial q_i}. \tag{8}$$

首约束 (6) 必须满足相容条件，对时间 t 求导等式仍然成立，可得 $n-R$ 个方程

$$\dot{\theta}_b(t,q,p) = 0. \tag{9}$$

在引进 Poisson 括号后，任意函数 $g(t,p,q)$ 对 t 求导可以写为

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g,H] + \lambda_r[g,\theta_r]. \tag{10}$$

(9) 代入 (10), 并移项，则有

$$\lambda_s[\theta_s,\theta_r] \approx \frac{\partial \theta_b}{\partial t} + [\theta_b, H]. \tag{11}$$

(11) 是关于 λ 的线性方程组，它的系数和非齐次项都是多项式．当系数矩阵非奇异时，非齐次项不是零向量，则有唯一非零解，解出 λ 并代入首 Hamilton 函数和运动方程；非齐次项是零向量，只有零解，这是一种特殊情况，这里不做研究．当系数矩阵奇异时，如果系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相同， λ_b 有解，其中有些是任意的；如果系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩，则有新的约束产生．新的约束也必须满足相容条件，得到新的关于 λ 的线性方程，和原方程构成新的线性方程组，再继续上面的讨论．如此继续，直到没有新的约束产生，解出 λ 代入首 Hamilton 函数和运动方程，得到 Hamilton 函数和 Hamilton 运动方程．新约束称为次约束．上述步骤可以在有限步内结束． Dirac 方法的详细推导过程可以参阅 [4,5]. 求出全部约束后，可以对系统作进一步的研究．

3 吴消元法求 Hamilton 约束

利用 Dirac 方法研究 Hamilton 系统，首先要确定 Hessian 矩阵的秩，判断系统是否正则．一般情况， Hessian 矩阵是一个函数矩阵，确定它的秩比较困难．另外还要从 (4) 解出 $\dot{q}$, 也不容易．如果是退化的，还需要求出所有的约束．求解约束，需要反复求解系数是函数的线性方程组和相容条件，计算过程比较麻烦，而且计算量也很大．从上一节可以看出，在 Dirac 方法中， Hamilton 运动方程和动量的表达式 (4) 是关于 $t,q,\dot{q},p,\dot{p}$ 的多项式．吴消元法 [6,7] 是一种非常好的处理多项式的方法，在这里，我们把吴消元法和 Dirac 方法相结合研究 Hamilton 系统．首先，利用吴消元法给出一个算法，判断系统是否是正则的，无需计算 Hessian 矩阵的秩．如果系统是正则的，可以直接求出 $\dot{q}$ 的显式表达式，得到运动方程，如果是退化的，可以求出首约束．其次对带约束的 Hamilton 系统，在求出首约束的基础上引入

乘子，吴消元法和求相容条件的 Poisson 括号的结合，提出一个新算法，求出全部次约束. 新算法不需求解线性方程组，并利用多项式除法计算 Hamilton 函数，不必在求出乘子后再做带入运算. 求出所有的约束后，把它们分为第一类约束和第二类约束. 整个算法可以在计算机上实现，借助于符号计算软件，能很快得到相应的结果.

下面我们先给出算法，再说明算法的正确性. 对于正则系统，算法 3.1 能够直接给出运动方程；对于退化系统，先用算法 3.1 求出首约束和 Hamilton 函数，然后用算法 3.2 求出所有的次约束，并利用多项式除法，求出运动方程和 Hamilton 函数，最后利用算法 3.3 将约束分为第一类约束和第二类约束. 整个算法分为三个模块来实现，这样编写程序源代码比较容易，而且其它程序调用也很方便. 此外，为描述方便，我们用 Re 表示多项式除法 [6,7].

算法 3.1

输入 Lagrange 函数 L;

输出 Hamilton 函数 H_c, 首约束 Pc, 运动方程 $\dot{p},\dot{q}$;

Step 1 给定一个序：

$$q_1<\cdots<q_n<p_1<\cdots<p_n<\dot{q}_1<\cdots<\dot{q}_n; \tag{12}$$

Step 2 计算广义动量

$$p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

并令 $Ps=\{p^i-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}|(i=1,2,\cdots,n)\}$. 转入 Step 3;

Step 3 按照 (3.1) 给出的序，求 Ps 的特征列，记作 CS;

Step 4 计算 Hamilton 函数 H_c

$$H_c=\mathrm{Re}(p^i\dot{q}_i-L,CS), \tag{14}$$

Step 5 求运动方程

$$\dot{q}^i=\frac{\partial H_c}{\partial p^i},\quad \dot{p}^i=\frac{\partial H_c}{\partial q^i}. \tag{15}$$

所有的运动方程记作 Ms;

Step 6 从 CS 中选出不含 $\dot{q}$ 的方程，添加到 Pc 中， Pc 是首约束集. 如果 Pc 是空集，则 Hamilton 系统是正则的，否则是退化的. 输出规范 Hamilton 函数 H_c 和运动方程 Ms, CS 和 Pc.

如果系统是正则的，Hessian 矩阵满秩，动量的定义 (4) 给出的坐标变换是一一对应的，根据隐函数定理，所有的 $\dot{q}$ 都可以被解出，并显式表出. 如果系统非正则，某些 $\dot{q}$ 不能解出，并且从 (6) 可以看出，最终会出现不含 $\dot{q}$ 的方程. 求解 $\dot{q}$ 的过程实际是代入和消元的过程. 在算法 3.1 中，用吴消元法求 (4) 的特征列 CS, 求特征列也是代入和消元的过程，结果和其它方法是一样的. 但是这里的代入和消元过程是在给定的序下进行的，因此比其他的方法要简单. 如果特征列中 CS 有不含 $\dot{q}$ 的多项式，则系统是退化的，否则是正则的. CS 中包含 $\dot{q}$ 的方程的个数就是 Hessian 矩阵的秩，不包含 $\dot{q}$ 的方程就是首约束. 在 Dirac 方法中，解出 $\dot{q}$, 并代入 (7), 通过 Legendre 变换 Lagrange 函数化为 Hamilton 函数. 利用特征列，可以

很容易解出 $\dot{q}$. 在算法 3.1 中，没有具体解出 $\dot{q}$ 并用代入，而是用多项式除法，多项式除法实际也是代入. 正则的， H_c 就是 Hamilton 函数；退化的， H_c 是规范 Hamilton 函数.

定理 3.1 算法 3.1 中，特征列 CS 含 $\dot{q}$ 的方程的数目等于 Hessian 矩阵的秩，而不含 $\dot{q}$ 的方程是首约束.

证 把 (4) 写成

$$p_i = f_i(q, \dot{q}), \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{16}$$

(16) 可以看成是 p 和 $\dot{q}$ 之间的坐标变换，变换的 Jacobi 矩阵就是 Hessian 矩阵. 设 Hessian 矩阵的秩是 R, 当 $R = n$ 时，坐标变换是一一变换，根据隐函数定理，所有的 $\dot{q}$ 都可以显式表出；当 $R < n$ 时，坐标变换不是一一变换， Hessian 矩阵存在 $R \times R$ 非奇异子阵 $w_{\alpha a} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial \dot{q}_a}$, 这个子矩阵所对应的变换可以看成是一一变换，不失一般性，设该变换为

$$p_a = f_a(q, \dot{q}_\alpha, \dot{q}_j), \quad a = 1, 2, \cdots, R, \ \alpha = 1, 2, \cdots, R, \ j = R+1, 2, \cdots, n. \tag{17}$$

(17) 中 $\dot{q}_j$ 被看作参数. 因为变换 (17) 的 Jacobi 行列式非奇异，则有

$$\dot{q}_\alpha = g_\alpha(q, p_a, \dot{q}_j). \tag{18}$$

把 (18) 代入 (16), 可得

$$p_a = f_a(q, \dot{q}_\alpha, \dot{q}_j) = f_a(q, g_\alpha, \dot{q}_j), \quad a = 1, 2, \cdots, n, \tag{19}$$

(19) 是恒等式；其余 $n - R$ 个为

$$p_r = f_r(q, p_\alpha), \quad r = R+1, 2, \cdots, n, \tag{20}$$

(20) 不包含 $\dot{q}$, 否则从 (20) 中还可以解出 $\dot{q}$, 与 Hessian 矩阵的秩是 R 矛盾. (20) 是首约束. 对多项式类型的 Euler-Lagrange 方程，上述求首约束的过程是消元和带入的过程，利用吴消元法求特征列的过程也是消元和带入的过程，得到的运动方程和首约束和上述讨论的结果是一致的，所以，特征列 CS 中含 $\dot{q}$ 的方程个数和 Hessian 矩阵的秩是一样，不含 $\dot{q}$ 的方程就是首约束.

算法 3.1 给出了利用吴消元法判定系统是否正则，并且利用多项式除法求 Hamilton 函数，整个算法可以在计算机上实现，并且步骤也比 Dirac 方法简单.

如果系统是退化的，在算法 3.1 的基础上，利用下面给出的算法 3.2, 可以求出 Hamilton 函数，运动方程和次约束. 设 Hessian 矩阵的秩是 $n - R$, 引入乘子 $\mu = (\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^R)$, 得到首 Hamilton 函数和运动方程

$$H_p = H_c + \mu^r \phi_r, \tag{21}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p^i} + \mu^r \frac{\partial \phi_r}{\partial p^i} = \frac{\partial H_p}{\partial p^i}, \quad \dot{p}^i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \mu^r \frac{\partial \phi_r}{\partial q_i} = -\frac{\partial H_p}{\partial q_i}. \tag{22}$$

下面给出求约束的算法 3.2, 仍沿用算法 3.1 的记号.

算法 3.2

输入 首 Hamilton 函数 H_p, 首约束 Pc, 运动方程 Ms;

输出 Hamilton 函数 H, Hamilton 运动方程 Hs, 约束 Ps;

Step 1 令 $Dc = Pc$, 根据首约束引入乘子 μ, 并给定序满足

$$q_1 < \cdots < q_n < p_1 < \cdots < p_n < \dot{q}_1 < \cdots < \dot{q}_n < \mu^1 < \cdots < \mu^R; \tag{23}$$

Step 2 求 Dc 的相容条件 Cc;

Step 3 求 Cc 的特征列 CS, 从 CS 取出不包含 μ 的多项式，记作 Ds;

Step 4 如果 $Ds \subset Dc$, 转入 Step 5; 否则 $Dc = Ds \cup Dc$, 返回 Step 2;

Step 5 $P_\mu = Bc - Cs$, $H = \mathrm{Re}(H_p, P_\mu)$, $Hs = \mathrm{Re}(Ms, P_\mu)$;

Step 6 输出 H, Hs, 和 Cs.

在 Dirac 算法中，求首约束的相容条件，得到关于乘子 μ 的线性方程组

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{R1} & \cdots & g_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varOmega_1 \\ \vdots \\ \varOmega_R \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中 $g_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n$ 和 $\varOmega$ 是关于 p,q 的多项式. 设系数矩阵的秩为 r, 当 $r=R$ 时，方程有唯一解. 当 $r<R$ 时，经过初等行变换， (24) 可变为

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1R} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & \cdots & g_{rR} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \\ \mu_{r+1} \\ \vdots \\ mu_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varOmega_1 \\ \cdots \\ \varOmega_r \\ \varOmega_{r+1} \\ \vdots \\ \varOmega_R \end{pmatrix}. \tag{25}$$

对于 (25) 有 3 种情况

1) $\varOmega_{r+1},\cdots,\varOmega_R$ 中有非零常数，方程无解，系统没有稳定点，这里不作考虑；

2) $\varOmega_{r+1},\cdots,\varOmega_R$ 全为零，可求出方程的基础解系；

3) $\varOmega_{r+1},\cdots,\varOmega_R$ 不全为零且无非零常数，不妨设 $\varOmega_{r+1},\cdots,\varOmega_R$ 全不为零，则得到新的方程

$$0=\varOmega_k, \quad k=r+1,\ r+2,\cdots,R. \tag{26}$$

(26) 就是新的约束，对 (26) 再求相容条件，如此继续，直到没有新的约束. 求出所有的约束后，再解出乘子 μ. 从上述过程可以看得出，求约束的过程就是对增广矩阵进行初等的行变换，实际也就是代入和消元的的过程. 求解乘子需要把方程组化为梯形形式或三角形式，这一过程也是代入和消元. 算法 3.2 利用吴消元法，求关于乘子 μ 的线性方程组的特征列，直接就可以求出约束. 求出所有的约束，最终得到关于 μ 的梯形形式或三角形式. 求特征列的过程也是代入和消去的过程，这和对矩阵做初等的行变换是相同的. 但是求特征列是在给定的序的基础上进行的，比直接进行初等变换要简单，而且可以在计算机上实现. 求出所有的约束，在 Dirac 方法中，解出 μ, 并代入首 Hamilton 函数和运动方程. 在这里和算法 3.1 一样，没有解出 μ, 而是直接用多项式除法得到首 Hamilton 函数和运动方程. 所以算法 3.2 得到的结果和 Dirac 算法是一致的.

在 Dirac 算法中，将所有的约束分为第一类约束和第二类约束，并求出乘子 μ, 在此基础上，可以进一步研究系统的规范变换、量子化等. 算法 3.3 给出了将约束分为第一类约束和第二类约束的算法.

算法 3.3

输入 约束集 Ps;

输出 第一类约束集 $Ps1$, 第二类约束集 $Ps2$;

Step 1 令 $Ps1=\Phi$, $Ps2=\Phi$, $i=1$;

Step 2 如果 $i<\|Ps\|$ 取出 Ps 的第 i 个元素 p_i, $j=i+1$, 取出 Ps 的第 j 个元素 p_j;

Step 3 如果 $j\le\|Ps\|$, 计算 $[p_i,p_j]$, 如果 $[p_i,p_j]$ 不等于零， p_i 是第二类约束， $Ps2=Ps2\cup\{p_i\}$,$i=i+1$, 返回 Step 2; 否则，转入 Step 4;

Step 4 $j=j+1$, 如果 $j>\|Ps\|$, p_i 是第一类约束， $Ps1=Ps1\cup\{p_i\}$, $i=i+1$, 转入 Step 3; 否则，返回 Step 2.

Step 5 输出 $Ps1$, $Ps2$.

例 3.1 Lagrange 函数为 $L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1)^2+q_2\dot{q}_2+(1-\alpha)q_1\dot{q}_2+\frac{\beta}{2}(q_1-q_2)^2$ 利用算法 3.1 得到首约束 $\theta=p_2+(\alpha-1)q_1$, 系统是退化的. 规范 Hamilton 函数为 $H_c=\frac{1}{2}(p_1-q_2)^2-\frac{\beta}{2}(q_1-q_2)^2$, 引入乘子 λ, 首 Hamilton 函数为 $H_p=H_c+\lambda\theta$. 利用算法 3.2 得到次约束 $\theta'=\alpha(p_1-q_2)-\beta(q_1-q_2)$, 约束均为第二类约束． Hamilton 函数是 $H=H_c+\frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2)(p_2+(\alpha-1)q_1)$. 运动方程

$$\dot{p}_1=\frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2),\quad \dot{p}_2=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}(q_1-q_2);\quad \dot{q}_1=p_1-q_2,\quad \dot{q}_2=\frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2).$$

例 3.2 质量为 m, 带有完整约束的点粒子, 在球面上运动的 Lagrange 函数为 $L=\frac{1}{2}m^2\dot{q}^2+\mu(q^2-1)$, $q^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2$, μ 是附加坐标. 利用算法 3.1 可得首约束 $p_\mu(=\frac{\partial L}{\partial\mu})$, 规范 Hamilton 函数为 $H_c=\frac{1}{2m^2}p^2-\mu(q^2-1)$, $p^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2$. 引入乘子 λ, 首 Hamilton 函数为 $H_p=H_c+\lambda p_\mu$. 利用算法 3.2 得到次约束 q^2-1, $2m^2q_1^2+2m^2q_2^2\mu-2m^2\mu+q_2^2p_1^2p_1^2+q_1^2p_2^2-p_2^2-2q_1q_2p_1p_2$, $\sum\limits_{i=1}^{3}p_iq_i$, 约束均为第二类约束． Hamilton 函数为 $H=H_c$, 运动方程为

$$\dot{p}_1=2\mu q_1,\quad \dot{p}_2=2\mu q_2,\quad \dot{p}_3=2\mu q_3;\quad \dot{q}_1=\frac{p_1}{m^2},\quad \dot{q}_2=\frac{p_2}{m^2},\quad \dot{q}_3=\frac{p_3}{m^2}.$$

利用算法 3.1 和算法 3.2 在几秒钟就可以得到上述结果.

4 吴微分特征列法求 Hamiton 约束

在利用 Dirac 算法或者算法 3.2 求解约束的过程中， p, q, $\dot{q}$, $\dot{p}$ 都被看作独立变量，但实际这些变量并不独立， p 与 $\dot{p}$, q 与 $\dot{q}$ 之间存在求导关系．在求约束的过程中，这些求导关系并没有体现出来．另外，最终结果中运动方程和约束之间也存在着求导关系，还可以在做进一步的化简，这一点可以从上一节的例子看得出来．例如在例 3.1 中，约束为

$$p_2+(\alpha-1)q_1=0,\quad \alpha(p_1-q_2)-\beta(q_1-q_2)=0.$$

运动方程为

$$\dot{p}_1=\frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2),\quad \dot{p}_2=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha}(q_1-q_2);\quad \dot{q}_1=p_1-q_2,\quad \dot{q}_2=\frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2).$$

对约束求导，带入运动方程，可以对运动方程作进一步的化简．这一过程可以利用微分特征列法来完成 [8]．实际上， Euler-Lagrange 方程式微分方程，直接可以用微分特征列法求约

束，在求约束过程中计算相容条件通过 Possion 括号来完成，因此利用微分特征列求约束，相容条件仍然通过 Possion 括号来完成．在这里设已经利用算法 3.1 求出首约束和首 Hamiton 函数和运动方程，采用全次逆字典序，先给出算法，然后再作分析和说明． Red 表示微分带余除法 [8].

算法 4.1

输入 H_p, Pc, 和 Ms;

输出 带约束 Hamiton 运动方程 Hs;

Step 1　令 $H=H_p$, $Ls=Ms$, $Dc_1=Pc$;

Step 2　求 $Dc1$ 的相容条件，记作 Bc. 从 Bc 中找出约束记作 Nc, 如果有新的约束出现， $Dc1=Dc1\cup Nc$, 返回 Step 2; 否则，转入 Step 3;

Step 3　$Ls=Ls\cup Dc2$, 按照全次逆字典序，求 Ls 的微分特征列，记作 DCS;

Step 4　$Dc_1=\Phi$, 从 DCS 选出所有不含 $\dot{q},\dot{p}$ 和乘子的方程，记作 Dc_2, 如果 $Dc2$ 等于 Nc, 转入 Step 5, 否则 $Dc_1=Dc_1\cup Dc_2$, 返回 Step 2;

Step 5　输出 DCS, 停止.

在算法 4.1 中，运动方程与约束并在一起，把它们都看成相同方程．运动方程必须满足约束，把它们并在一起是合理的．求微分特征列时，基本的一个算法就是微分带余除法．微分带余除法就是代入和约化的过程．如果两个方程是同阶的，微分带余除法就是多项式带余除法，也就是代入．

$$f=f_1\dot{q}+r_f,\quad g=g_1\dot{q}+r_g.$$

f 除以 g, 则有

$$\mathrm{Red}(f,g)=g_1f-f_1g=g_1r_f-f_1r_g. \tag{27}$$

如果是低阶的去除高阶的，先做一次求导，再做多项式除法，也就是进行一次约化．设

$$f=f_1\dot{q}+r_f,\quad g=g_1q+r_g.$$

g 先对 t 求导，得到

$$\dot{g}=g_2\dot{q}+R, \tag{28}$$

其中 R 不含 $\dot{q}$. 然后 f 按照 (27) 除以 $\dot{g}$, 则有

$$\mathrm{Red}(f,\dot{g})=g_2f-f_1g=g_2r_f-f_1R. \tag{29}$$

这一步也就是相当于把 q 代入 f, 替换 $\dot{q}$, 余式 $\mathrm{Red}(f,\dot{g})$ 已经不含 $\dot{q}$. (29) 再除以 g.

$$\mathrm{rd}=\mathrm{Red}(\mathrm{Red}(f,\dot{g}),g). \tag{30}$$

两个过程合起来就是 (30) 微分带余除法．在算法中，采用的是全次逆字典序，约束和含乘子的方程都是零阶的，也就是代数方程，所以它们之间只是代入，没有求导运算．另外，运动方程是一阶的，因此可以用约束和含乘子的方程约化运动方程，但是运动方程不能约化约束和含乘子的方程．求相容条件也是用 Possion 括号来实现的．所以，整个算法除了用约束和含乘子的方程约化运动方程以外，其它都与算法 4.2 和 Dirac 算法是一致的．运动方程和约束都是有限的，根据吴微分特列法理论，该算法在有限步内可以结束．从输出的微分特征列中，直接可以解出乘子．微分特征列中也包含约束，但为了方便，约束作为一个单独的结果

输出. 微分特征列是一个化简了的微分方程组, 直接就可以求解. 当然, 算法 4.1 也可以只求约束. 下面给出用算法 4.1 求解例 3.1 的结果.

例 4.1 例 3.1 求出的特征列是

$$\alpha(p_1 - q_2) - \beta(q_1 - q_2), \quad p_2 + (\alpha - 1)q_1, \tag{31}$$

$$\mu\alpha + \beta(q_1 - q_2), \tag{32}$$

$$\alpha\dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2), \quad \alpha\dot{q}_2 - \beta(q_1 - q_2). \tag{33}$$

(31) 是两个第二类约束, 从 (32) 可以解出乘子. (33) 是运动方程. 结果中没有出现 $\dot{p}$, 是因为在求特征列的过程中 $\dot{p}$ 被约化了. 这从动力学方面也可以解释清楚, 含 $\dot{p}$ 的是两个方程, 但这两方程必须满足约束 (31), 所以两个运动方程也就被两个约束替代了. 例 3.2 的结果和例 4.1 不同, 是因为采用了不同的序, 例 3.2 用的是字典序, 例 4.1 是全次逆字典序, 通过换序 [8], 也可以化为一样的. 在算法 (4.1) 中, 也可以直接采用字典序, 例 3.2 如果采用字典序得到结果和 (33) 相同. 但是有些约束可能不会显示出来, 因为在求微分特征列的过程中可能被约化掉.

4 结 论

本文利用吴方法对带约束的 Hamilton 系统作了研究. 算法 3.1 可以快速判定系统是否正则. 若为正则, 可以得到运动方程和 Hamilton 函数; 若为退化, 则可求出首约束和规范 Hamilton 函数. 我们引入乘子, 进而可以得到首 Hamilton 函数. 对于退化的系统, 利用算法 3.2 求出次约束. 对于带约束的 Hamilton 系统, 可以利用吴微分特征列法对运动方程作进一步的化简, 使得求解运动方程比较容易. 也可以直接利用算法 4.1 求出约束, 得到化简的运动方程. 另外还给出了算法 3.3, 该算法可将约束分为第一类约束和第二类约束. 这几个算法都可以借助符号计算软件实现, 我们用 Mathematica 软件编写了算法 (3.1)–(3.3) 的程序. 利用这些程序, 前面的算例能很快给出结果. 有关算法的复杂性分析和优化还有待于进一步研究.

参 考 文 献

[1] Werner M Seiler and Robin W Tucker. Involution and constrained dynamics I: The dirac approach. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1995, **28**: 4431–4451.

[2] Valdimir P Gerdt and Soso A Gogilidze. Constrained Hamiltonian Systems and Groebner Bases. Computer Algebra in Scientific Computing(ed. by Ganzha V G, Mayr E W and Vorozhtsov E V), Springer-Verlag, Berlin, 1999, 139–146.

[3] Werner M Seiler and Robin W Tucker. Involution and constrained dynamics II: The faddeev-jackiw approach. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 1995, **28**: 7315–7331.

[4] Dirac P A M. Generalized Hamiltonian Dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*, 1950, **2**, 129–148.
[5] Sundermeyer K. Constrained Dynamics. Lecture Notes in Physics 169. Springer-Verlag, New York, 1982.
[6] 吴文俊．数学机械化．北京：科学出版社， 2003.
[7] 何青．计算代数．北京：北京师范大学出版社， 1997.
[8] 陈玉福．微分特征列法理论研究及应用．大连理工大学博士论文，大连， 1999 年 6 月．
[9] Dirac P A M. Generalized Hamiltonian Dynamics. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1958, **246**(1246): 326–332.
[10] Shanmugadhasan S. Generalized canonical formalism for degenerate dynamical systems. Proc. Camb. Phil. Soc., 1963, **59**: 743–757.

A NEW ALGORITHM FOR SOLVING HAMILTONIAN CONSTRAINS

JIA Yifeng

(*School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing* 100037)

CHEN Yufu

(*Department of Mathematics, Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049)

Abstract In this paper, the polynomial type of Hamilton system is considered. Using Wu elimination method, a new algorithm is given to determine the system regularity. For regular systems, the Hamiltonian and motion equations are obtained. For degenerate systems, two new algorithms are given to solve the constraints, and the constrained Hamiltonian and constrained motion equations are obtained. These algorithms can be executed in symbolic computation software platform.

Key words Constraints, characteristic set, Hessian matrix.