系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
7 (1) (1987), 35—39

联接图中的最长链

胡 智 全
(华中师范大学数学系,武汉)

一、引 言

文中未加说明的述语均同于[1]. 给定图 G, 以 $c(G)$ 记其联通分支数,定义

$$h(G)=\min\{|S|-c(G\backslash S): S\subseteq V(G),\ c(G\backslash S)>1\},$$

$$f(G)=\min\{d(u)+d(v): u、v\in V(G),\ u\neq v,\ uv\notin E\}.$$

1978 年 H. A. Jung 在[2]中证明了,当 $f(G)\geqslant n(G)-4$, $n(G)\geqslant 11$, $h(G)\geqslant 0$ 时,G 含哈密顿圈. 本文研究了上述参数与图中最长链所含点数 $l(G)$ 之间的关系,得到下述结果:

定理 1. 设 G 为联接图, $f(G)=n-t$, $n\geqslant 3t-1$, 且 $h(G)\geqslant h$, 则 $l(G)\geqslant \min\left\{n,\ \frac{1}{2}(n+f+h+2)\right\}$. 如果 $h=0$ 或 1, 则 $l(G)\geqslant\min\{n, n-t+3h+8+\alpha_{n,t}\}$. 其中 $\alpha_{n,t}$ 视 $n-t$ 的奇偶性分别取值 1 与 0.

定理 1 不能再改进. 事实上如果我们用 G_k 表示 k 阶任意图, 用 E_k 表示 k 阶孤立点图,用 T_k 表示由 k 阶完全图的每一点增加一悬挂边所得到的图,作

$$G'=G_k+E_{k+t}(k\geqslant 1,\ t\geqslant 1),$$

$$G''=G_k+(T_{2h+5}\cup E_{k-h-1})\ (k\geqslant h+3),$$

则 $l(G')=2k+1=\frac{1}{2}(n+f+h+2)$;

$$l(G'')=n-1=n-t+3h+8+\alpha_{n,t}.$$

二、主要引理

设 G 联接 $f(G)=n-t$, $l(G)=l<n$, $n\geqslant 3t-1$.

$P=v_1v_2\cdots v_l$ ($v_1=a$, $v_l=b$) 是 G 中最长链, 则 $N(a)\subseteq V(P)$; $N(b)\subseteq V(P)$ 且 $ab\notin E$.

定义.

$$T(a)=\{v_i: v_{i+1}\in N(a)\};$$

$$T(b)=\{v_i: v_{i-1}\in N(b)\}.$$

易见有

1984 年 5 月 29 日收到, 1985 年 9 月 16 日收修改稿.

引理 1. $N(T(a))\subseteq V(P)$, $N(T(b)\subseteq V(P)$.

取 $v\in V(G)-V(P)$, 考虑 $T(a)\cup T(b)\cup N(v)$ 的维数,我们有 $d(a)+d(b)+d(v)-|T(a)\cap T(b)|\leqslant n-1$, 由此即得

引理 2. $T(a)\cap T(b)\neq\varnothing$.

推论 2.1. $G\backslash P=E_{n-l}$.

推论 2.2. G中存在最长链P及P外一点v, 使 $\min\{d(a),d(b),d(v)\}\geqslant\frac{n-t}{2}$, 且 v_2, $v_{l-1}\in N(v)$.

证. 选最长链P和P外一点v, 使$d(v)$最大, 易知 $d(v)\geqslant\frac{f}{2}$. 令

$$S_1=\{v_i:v_{i-1}\in N(v)\};$$
$$S_2=\{v_i:v_{i-2}\in N(v)\}.$$

由P的最长性, $S_1\cap(N(a)\cup S_2\cup\{a\})=\varnothing$, 因此 $N(a)\cap S_2\neq\varnothing$. 设 $v_i\notin N(a)\cap S_2$, $P=v_{i-1}v_{i-2}\cdots v_1v_iv_{i+1}\cdots v_i$, 则 $v_2'=v_{i-2}\in N(v)$. 由于 $v_{i-1}\notin N(a)$, 至多再这样变换一次就可使 $d(v_{i-1})\geqslant\frac{f}{2}$. 由于 $v_i\notin N(a)$, $i\leqslant l-1$. P'和P的最后两个点相同, 我们对链的另一头作一至二次类似的变换就可得到符合要求的链和点.

以下设P是推论 2.2 中链,令 $Y_0=\varnothing$, 对 $i\geqslant 1$

定义.

$$X_i=N(Y_{i-1}\cup\{v\}),$$
$$Y_i=\{v_i:v_{i-1},\ v_{i+1}\in X_i\}\cup\{a,b\}.$$

我们有 $X_1\subseteq X_2\subseteq\cdots$, $Y_1\subseteq Y_2\subseteq\cdots$. 令 $X=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}X_i$, $Y=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}Y_i$,

$$X^+=\{v_i:v_{i-1}\in X\},\ X^-=\{v_i:v_{i+1}\in X\}.$$

由[3]中的 Hopping 引理,下述结论成立:

(1) X和Y均不含P上的相继点, $X\cap Y=\varnothing$;

(2) $N(Y)\subseteq X\subseteq V(P)$;

(3) $Z^+=X^+\backslash Y$, $Z^-=X^-\backslash Y$ 是G中点独立集.

设 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 是G中点互异的链,如果 $V(P)=\bigcup\limits_{i=1}^{r}V(P_i)$, 则称 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 为P的划分. 如果此划分满足对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,r\}$, $j\leqslant k-1$:

若 $y\in V(P_i)\cap Y_j$, $xy\in E(P_i)$, 有 $x\in X_j$, 则称其为P的k-良序划分.

对 $G_0=G+v_0$, $c_0=v_0v_1v_2\cdots v_lv_0$, $v\in G_0\backslash c_0=E_{n-l}$ 应用[4]中引理 1 即得

引理 3. 对所有 $k\geqslant 1$, 不存在P的k-良序划分 $P_1=b_1b_2\cdots b_s$, $P_2=c_1c_2\cdots c_t$ 使 $b_1c_1\in X_k$.

推论 3.1. 设 $|X|\leqslant|X_1|+1$, 则不存在P的划分 $P_1=b_1b_2\cdots b_s$, $P_2=c_1c_2\cdots c_t$ 使 b_1, $c_1\in X$, b_1与b_2, c_1与c_2均在P上相继.

证. 设结论不成立,则$\{b_1,c_1\}\not\subseteq X_1$. 无妨设 $b_1\notin X_1$. 由于 b_1 与 b_2 在 P 上相继,存在 $y\in Y\setminus\{b_2\}$, 使 $b_1\in N(y)$. 不妨设 $y=b_i$, 则 $b_{i-1}\in X$. 但 $X\setminus X_1=\{b_1\}$, 因此 $b_{i-1}\in X_1$. 得更长链

$$b_sb_{s-1}\cdots b_ib_1b_2\cdots b_{i-1}vc_1c_2\cdots c_t,$$

导致矛盾.

推论 3.2 设 $|X|\leqslant|X_1|+2$, 则不存在 P 的划分 $P_1=b_1b_2\cdots b_rb_{r+1}\cdots b_s$, $P_2=c_1c_2\cdots c_t$ 满足

(1) $b_1,\ c_1\in X,\ b_r\in X\setminus X_1,\ r>1$;

(2) $b_1\notin X_1\cup N(b_{r+1})$, 且 b_1b_2 在 P 上相继;或 (2′) $c_1\notin X_1\cup N(b_{r-1})$, 且 c_1,c_2 在 P 上相继.

证. 仿推论 3.1.

注. 引理 3, 推论 3.1, 推论 3.2 中的链 P_2 可以是空图或孤立点图.

以下再设 $|X|=x$, $S_i=P(a_i,b_i)=P[u_i,w_i]$ $(1\leqslant i\leqslant x+1)$ 是 P 按 X 划分的区间. 定义 $\varphi=\{S_i:|V(S_i)|\geqslant 2\}$. 为了方便,以下记 $V(S_i)=S_i$, 令

$$X^*=(N(a)\cap N(b))\cup(N(b)\cap X_1)\cup(X_1\cap N(a)).$$

引理 4. 设 $i\in\{1,2,3\}$, $g_i,h_i\in S_i$, $g_i^+\in N(u_i)$, $h_i^-\in N(w_i)$. 如果 $x_i\in N(g_i)$, $y_i\in N(h_i)$, 则下述结论成立:

(1) $g_1\notin N(g_2)$;

(2) 如果 $G(S_1)$ 中存在连接 g_1,h_1 的哈密顿链,则 $x_1y_1\notin E(S_3)$;

(3) 如果 $d(a)\geqslant x-1$, $|X_1|\geqslant x-1$, 则 $x_1x_2\notin E(S_3)$;

(4) 如果 $d(a)\geqslant x-1$, $|X_1|\geqslant x-1$, 且 $g_1\in N(h_2)$, 则 $a_1=b_2\notin X^*$;

(5) 如果 $\min\{d(a),d(b),|X_1|\}\geqslant x-1$, 且 $x_1y_2\in E(S_3)$, 则 $a_1=b_2\notin X^*$.

证. 用反证法. 设引理不成立,利用所给条件,我们将得到 P 的五类良序划分:

类　别	特　　征			
I	X ○—○ a	X ○—○ b		
II	X ○—○ a	X ○—○ b	X ○—○ Z	
III	a ○—○ b	X ○—○ X		
IV	X ○—○ a	X ○—○ b	X ○—○ Z	X ○—○ Z
V	a ○—○ b	X ○—○ X	X ○—○ Z	

其中 X 代表 X-型点, Z 代表非 X-型点. 划分中每条非退化链的前两点均在 P 上相继. 易知 (I) 与引理 3 矛盾; (II), (IV) 分别在条件 $\min\{d(a),|X_1|\}\geqslant x-1$ 及 $\min\{d(a),d(b),|X_1|\}\geqslant x-1$ 下与引理 3 或推论 3.1 矛盾;如果 (III) 或 (V) 在相应条件下存在,则它们均含退化链,且此时有 $a_1=b_2\notin X^*$.

令 $E_1=\{(i,j):S_i,S_j\in\varphi,\ i\neq j$，且存在 $g\in S_i,\ h\in S_j$ 使 $g\in N(h),\ g^+\in N(u_i)$，$h^-\in N(w_j)\}$. 设 $S_1\in\varphi$，$D\subseteq V(P)$. 对任意的 $z\in V(P)$，记 $N(z,D)=N(z)\cap D$. 如果对任意的 $x_1y_1\in E(S_1)$：

若 $x_1,y_1\in N(D)$，有 $|N(x_1,D)\cup N(y_1,D)|=1$，则称集合 D 具性质 $\mathscr{D}$.

推论 4.1. 设 $\min\{d(a),\ d(b),\ |X_1|\}\geqslant x-1$，$D=(Z^+\cup Z^-)\backslash\{u_1,w_1\}$，则 $|X^*|\geqslant x-1$，且

(1) 如果 $X^*=X$，则 $E_1=\emptyset$ 且集合 D 具性质 $\mathscr{D}$；

(2) 如果 $a_i=b_j\in X\backslash X^*$，则 $E_1\subseteq\{(i,j)\}$，且集合 $D'=D\backslash\{u_i\}$，$D''=D\backslash\{w_j\}$ 均具性质 $\mathscr{D}$.

引理 5. 设 $\min\{d(a),d(b),|X_1|\}\geqslant x-2$，$u_rp_r\in E(S_r)$，$r\in(i,j,k)$，则 $u_i\in N(w_j)$，P_i，$w_i\in N(u_k)$ 不同时成立. 特别当 $|S_i|=2$ 时，$N(u_i,\ Z^-\backslash w_i)$ 和 $N(w_i,\ Z^+\backslash u_i)$ 至少有一个为空集.

引理 5 的证明用反证法. 其主要思想是，利用条件 $\min\{d(a),d(b),|X_1|\}\geqslant x-2$ 得出各种与引理 3 或推论 3.2 相矛盾的链.

引理 6. 对所有 $k\geqslant 1$，不存在 P 的 k-良序划分 $P_1=b_1b_2\cdots b_s$，$P_2=c_1c_2\cdots c_t$，使 $b_2,c_2\in X_2$，$b_s\in X_k$，$N(c_t)\nsubseteq V(P)\cup\{v\}$.

其证明用数学归纳法.

三、定理 1 的证明

设定理 1 不真，则 $l(G)<n$. 设 P 和 v 是推论 2.2 中的链和点. 由引理 6，$N(Z^+\cup Z^-)\subseteq V(P)$. 由 $G\backslash P=E_{n-l}$ 和 $N(Y)\subseteq X\subseteq V(P)$，那么 $G-X-(V(P)-(Y\cup Z^+\cup Z^-))$ 至少有 $|Y|+(n-l)$ 个支. 因此

$$h\leqslant|V(P)-(Y\cup Z^+\cup Z^-)|-[|Y|+(n-l)].$$

但 $|Y\cup Z^+|=|Y\cup Z^-|=x+1$，得 $l(G)\geqslant\dfrac{n+2x+h+2}{2}\geqslant\dfrac{n+f+h+2}{2}$. 因此存在 $h=0$ 或 1 使 $l(G)\leqslant n-t+3h+7+\alpha_{n,t}$. 令 $\mathscr{C}=V(P)-(X\cup Y\cup Z^+)$，则

$$|\mathscr{C}|=\sum_{S_i\in\varphi}(|S_i|-1)=l-(2x+1)\leqslant 2\left\{\frac{f}{2}\right\}-2x+3h+6. \qquad (1)$$

以下设 S_1 是 φ 的最大区间，$D=(Z^+\cup Z^-)\backslash\{u_1,w_1\}$，在 $\varphi\backslash S_1$ 内引进指标集

$$I=\{i:|S_i|=3,\ u_iw_i\in E\},$$
$$J=\{i:|S_i|=3,\ u_iw_i\notin E\},$$
$$I'=\{i:|S_i|=4,\ u_iw_i\in E\},$$
$$J'=\{i:|S_i|=4,\ u_iw_i\notin E\}.$$

设 p_i 是 u_i 的后续，q_i 是 w_i 的前继. $|Y|=y$. 由 $X=N(Y\cup\{v\})$ 有 $c(G\backslash X)=y+1+c(G\backslash(X\cup Y\cup\{v\}))\leqslant|X|-h(G)$，那么 $|\mathscr{C}|\geqslant 1$，得 $c(G\backslash(X\cup Y\cup\{v\}))\geqslant 1$. 进而 $|\varphi|=x-y+1\geqslant h+3$. 由 (1) $x\leqslant\left\{\dfrac{f}{2}\right\}+h+\dfrac{3}{2}$. 因 $x\geqslant\dfrac{f}{2}$，故有 $x=$

$\left\{\frac{f}{2}\right\}$, $x=\left\{\frac{f}{2}\right\}+1$ 和 $x=\left\{\frac{f}{2}\right\}+2$ 三种情形. 利用集合 I, J, I', J' 和 S_1 进行讨论,得到各种与推论 4.1 或引理 5 相矛盾的链.

本文得到李修睦、朱永津、刘振宏、李为政、毛经中等老师的指导,深表谢意.

参 考 文 献

[1] 李修睦,图论导引,华中工学院出版社,武汉,1983.

[2] Jung, H. A., On maximal circuits in finite graphs, *Annals of Discrete Mathematics*, 3 (1978), 128—144.

[3] Woodall, D. R., The binding number of a graph and its Anderson number, *Journal of Combinatorial theory* (B), 15 (1973), 225—255.

[4] Jackson, B., Hamilton cycles in regular 2-connected graphs, *Jonrnal of Combinatorial Theory* (B), 29 (1980), 27—46.

ON THE MAXIMAL PATH IN CONNECTED GRAPHS

HU ZHI-QUAN

(*Department of Mathematics, Huazhong Normal University*)

ABSTRACT

Let G be a connected graph, $f(G)$ the maximal number f such that $d(u)+d(v)\geqslant f$ for any two different non-adjacent vertices u,v in G, and $h(G)=\min\{|S|-c(G/S),\ S\subseteq V(G),\ c(G/S)>1\}$. in [2] Jung has proved that G contains a Hamiltonian cycle if $f(G)\geqslant h(G)-4, h(G)\geqslant 11$ and $h(G)\geqslant 0$. This paper shows that, if G is a connected graph with $f(G)=h(G)-t$, $h(G)\geqslant 3t-1$, then (i) there is a path which has at least $\min\{n,\ (n+f+h+3)/2\}$ vertices in G, and (ii) G contains a Hamiltonian path where $t\leqslant 11$ and $h(G)\geqslant 1$, or $t\leqslant 8$ and $h(G)=0$. Each of these results is best possible.