系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
7 (4) (1987), 366—379

李善兰系数和 Newcomb 问题

石 赫
(中国科学院系统科学研究所)

清代数学家李善兰 (1811—1882) 在"垛积比类"一书中对垛积数进行了系统的研究[2]. 所谓垛积数就是二项式系数，因用于计算按照一定图形堆垛的物品数量而得其名. 在该书第二卷，李善兰讨论如下的求和问题

$$1^p + 2^p + \cdots + n^p,$$

这里 p 为正整数. 为此，他把乘幂 m^p 分解为垛积数的线性组合

$$m^p = \sum_{k=1}^{p} A(p, k)\binom{m+p-k}{p},\ m = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

其中 $\binom{m+p-k}{p} = \frac{(m+p-k)!}{p!(m-k)!}$ 为二项式系数，李善兰称之为垛积数.

我们称(1)式中的系数 $A(p, k)$, $k=1, 2, \cdots, p$ 为李善兰系数，简称为李氏数. Euler 在讨论其它数学问题时，曾以不同方式引入过此类系数，故而近代西方文献中称其为欧拉氏数 (Eulerian number)[5]. 有关李氏数 (欧拉氏数) 的研究已经积累了丰富的文献. 李氏数与许多数学问题有联系. 本文将指出，李氏数在组合数学中的意义之一是它给出了 Simon-Newcomb 问题的解答.

记自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 为 $Z(n)$. 设 $A(N) = (a_1, a_2, \cdots, a_N)$ 为长度为 N 的数列. 如果 $a_j \in Z(n)$, $j = 1, 2, \cdots, N$, 且每个整数 $i \in Z(n)$ 刚好在 $A(N)$ 中出现 s_i 次, $s_i \geqslant 0$, 则称 $A(N)$ 为具有类分 (specification) $[s] = [s_1, s_2, \cdots, s_n]$ 的数列. 和数 $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = N$ 也称为类分 $[s]$ 的长度. 数列 $A(N) = (a_1, a_2, \cdots, a_N)$ 中每对相邻数 (a_i, a_{i+1}), $1 \leqslant i \leqslant N-1$, 定义它的下降数 $d(a_i, a_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant N-1$ 如次:

$$d(a_i, a_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a_i > a_{i+1}, \\ 0, & \text{当 } a_i \leqslant a_{i+1}. \end{cases}$$

如果数列 $A(N)$ 恰好有 $k \geqslant 0$ 个相邻对使下降数 $d(a_i, a_{i+1}) = 1$, 则称数列 $A(N)$ 具有下降数 k. 对任意给定的类分 $[s]$, 命 $\{A[s]\}$ 表示全体具有类分 $[s]$ 的数列. 那么，所谓 Simon-Newcomb 问题是问: 对给定的类分 $[s]$ 和整数 $k \geqslant 0$, 在 $\{A[s]\}$ 中存在多少具有下降数 k 的数列?

至今，有关 Newcomb 问题的文献已相当丰富. MacMahon[7]构造--类对称函数给出它的解答. 其后 Shanks[8], Carlitz[3], Foata 和 Schützenberger[5] 从不同观点分别对一些特殊情形加以讨论. Dillon 和 Roselle[4]另辟新径独立给出一般情形的解答. 最近，Foulkes[6]又从对称群表示论的观点进行新的探讨.

本文首先对李善兰系数的基本性质进行讨论，在此基础上给出李善兰恒等式的初等证明。然后，把李氏数加以推广，从而系统地给出 Newcomb 问题的简明解答。

一、李善兰系数的基本性质

为书写方便，把(1)式重新写为

$$m^n = \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\binom{m+n-k-1}{n}, \tag{1.1}$$

其中 n 为正整数，m 为适当选取的整数。显然，垛积数(二项式系数)满足下面的关系式

$$\frac{n+1}{m-k-1}\binom{m+n-k-1}{n+1} = \binom{m+n-k-1}{n} = \frac{n+1}{m+n-k}\binom{m+n-k}{n+1}.$$

而经直接验算可知

$$(n+1)m = (m+n-k)(k+1) + (m-k-1)(n-k),\ 0 \leqslant k \leqslant n.$$

于是，以 m 乘(1.1)式双方可得

$$\begin{aligned}
m^{n+1} &= m\sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\binom{m+n-k-1}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\cdot\frac{m\cdot(n+1)}{m+n-k}\binom{m+n-k}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)\left\{(k+1)\binom{m+n-k}{n+1} + \frac{m-k-1}{m+n-k}(n-k)\binom{m+n-k}{n+1}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)(k+1)\binom{m+n-k}{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)(n-k)\cdot\binom{m+n-k-1}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k)(k+1)\binom{m+n-k}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A(n,k-1)(n-k+1)\binom{m+n-k}{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\{(k+1)A(n,k) + (n-k+1)A(n,k-1)\}\binom{m+n-k}{n+1}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

利用 m 的任意性，依李善兰系数的定义可知

$$A(n+1,k) = (k+1)A(n,k) + (n-k+1)A(n,k-1),\ 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.3}$$

这里我们约定 $A(n,-1) = A(n,n) = 0$.

公式(1.3)就是李善兰在"垛积比类"一书中所指出的(既没有推导也没有证明)系数 $A(n,k)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, 所满足的递推关系。利用这个递推关系，它给出了李氏数的表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&& 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 4 && 1 &&& \\
&& 1 && 11 && 11 && 1 && \\
& 1 && 26 && 66 && 26 && 1 & \\
1 && 57 && 302 && 302 && 57 && 1 \\
& \cdots && \cdots && \cdots && \cdots &&&
\end{array}$$

注记. 对任意的复数 x, 如果命

$$\binom{x}{i}=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!},\quad i\geqslant 0, \tag{1.4}$$

则从以上的推导不难看出,等式

$$x^n=\sum_{k=0}^{n-1}A(n,k)\binom{x+n-k-1}{n} \tag{1.5}$$

依然成立,其中 $A(n,k)$, $0\leqslant k\leqslant n-1$ 为李氏数.

根据递推关系(1.3),可以得到李氏数的若干性质.

性质 1 (对称性). 李氏数适合

$$A(n,k)=A(n,n-k-1),\quad 0\leqslant k\leqslant n-1. \tag{1.6}$$

证. 对 n 行归纳法. $n=2$ 时,此性质显然成立. 现假设对 n 命题为真. 即有

$$A(n,k)=A(n,n-k-1),\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

而由递推关系(1.3)知

$$\begin{aligned}A(n+1,k)&=(k+1)A(n,k)+(n-k+1)A(n,k-1)\\&=(k+1)A(n,n-k-1)+(n-k+1)A(n,n-k)\\&=A(n+1,n-k).\end{aligned}$$

性质 1 证毕.

性质 2. 对任意给定的 n, 李氏数之和为

$$\sum_{k=0}^{n-1}A(n,k)=n!.$$

证. 对 n 行归纳法,当 $n=2$ 时命题显然成立. 现假设命题在 n 时为真. 即

$$\sum_{k=0}^{n-1}A(n,k)=n!,$$

而由递推关系(1.3)知,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}A(n+1,k)&=\sum_{k=0}^{n}\{(k+1)A(n,k)+(n-k+1)A(n,k-1)\}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A(n,k)+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)A(n,k-1)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)+(n-k)\}A(n,k)\\&=(n+1)\sum_{k=0}^{n-1}A(n,k)\\&=(n+1)!.\end{aligned}$$

性质 2 证毕.

性质 3. 李氏数 $A(n,k)$, $0\leqslant k\leqslant n-1$ 有如下明确表达式

$$A(n,k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n+1}{j}(k+1-j)^n,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1. \tag{1.7}$$

证. 对 n 行归纳法. 当 $n=1$ 时,

$$A(1,0)=\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{2}{j}(1-j)=1,$$

命题成立．现假设命题对 n 及 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 成立．由递推关系(1.3)知

$$\begin{aligned}
A(n+1,k)&=(k+1)A(n,k)+(n-k+1)A(n,k-1)\\
&=(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n\\
&\quad+(n-k+1)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k-i)^n\\
&=(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+1}{i}(k+1-i)^n\\
&\quad+(n-k+1)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{n+1}{i-1}k(k+1-i)^n\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left\{(k+1)\binom{n+1}{i}-(n-k+1)\binom{n+1}{i-1}\right\}(k+1-i)^n\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left\{(k+1)\binom{n+2}{i}-(n+2)\binom{n+1}{i-1}\right\}(k+1-i)^n\\
&=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2}{i}(k+1-i)^{n+1}.\quad k=0,1,\cdots,n.
\end{aligned}$$

性质 3 证毕．

如果把 $s_1=s_2=\cdots=s_n=1$ 这种特定的类分记为 $[s]=[1^n]$，那么我们有

性质 4. 李氏数 $A(n,k)$，$0\leqslant k\leqslant n-1$，给出相应于类分 $[1^n]$ 的 Newcomb 问题的解．

证．为书写方便，对给定的数列 $A(n)=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，若命 $a_0=0$，$a_{n+1}=n+1$，则数列 $A(n)$ 有 $n+1$ 个相邻的数对 (a_i,a_{i+1})，$0\leqslant i\leqslant n$．容易看出，做此约定并不改变 $A(n)$ 的下降数．

现对 n 行归纳法．当 $n=1,2$ 时，命题显然成立．假设命题对 n 成立．即对给定的 k，$0\leqslant k\leqslant n-1$，在 $\{A[1^n]\}$ 中存在 $A(n,k)$ 个具有下降数 k 的数列．任取 $\{A[1^n]\}$ 中的一个下降数为 k 的数列．我们要把正整数 $n+1$ 置入这个数列之中．记 $a^*=n+1$．对数列 $A(n)=(a_1,\cdots,a_n)$，显然有 $d(a^*,a_i)=1$，$d(a_i,a^*)=0$，$1\leqslant i\leqslant n$．而且 $d(a^*,a_{n+1})=0$．由于数列 $A(n)$ 的下降数为 k，即恰好存在 k 个邻对 (a_i,a_{i+1}) 使得 $d(a_i,a_{i+1})=1$，而其它 $(n+1-k)$ 个邻对有 $d(a_j,a_{j+1})=0$．当把 a^* 置入这 k 个下降数为 1 的邻对，以及 (a_n,a_{n+1}) 时，可得 $\{A[1^{n+1}]\}$ 中的 $k+1$ 个具有下降数 k 的数列．而把 a^* 置入其它 $(n-k)$ 个下降数为零的邻对时，则得到 $(n-k)$ 个 $\{A[1^{n+1}]\}$ 中的下降数为 $k+1$ 的数列．根据归纳法假设，在 $\{A[1^n]\}$ 中存在 $A(n,k)$ 个具有下降数 k 的数列，以及 $A(n,k-1)$ 个具有下降数 $k-1$ 的数列．所以，当把 $a^*=n+1$ 置入 $\{A[1^n]\}$ 中的数列之后，得到 $\{A[1^{n+1}]\}$ 中的具有下降数 k 的数列的总数为

$$(k+1)A(n,k)+(n-k+1)A(n,k-1).$$

由递推关系(1.3),此数等于 $A(n+1,k)$. 命题证毕.

二、李善兰恒等式

(1.1)式把乘幂 m^n 分解为垛积数的线性组合. 如果把乘幂 m^n 视为 $\binom{m}{1}^n$,一类特殊的垛积数的乘幂,那么自然要问: 如何把一般的乘幂 $\binom{m}{k}^n$, $k\geqslant 1$, 分解为垛积数的线性组合? 在最简单的情形 $n=2$, 其解答就是著名的李善兰恒等式(见[1], 138 页).

对于任意给定的正整数 $k\geqslant 1$, 有恒等式

$$\binom{m+k}{k}^2=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{m+2k-i}{2k}, \tag{2.1}$$

其中 m 为适当选取的整数.

李善兰在"垛积比类"中称 $\binom{m+k}{k}^2$ 为自乘垛. 他只是写下了这个恒等式, 既未给出证明也未说明推导它的方法(见[2]). 其后,数学家们曾希望给出这一恒等式的简单证明,但所获得的证明都须要较为高深的数学知识,且去之垛积数原意甚远. 本文给出的证明是很初等的,并且较为符合垛积数本意.

施惠同把李善兰恒等式推广为(见[1])

$$\binom{x+k}{k}\binom{x+l}{l}=\sum_{i=0}^{l}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l-i}{k+l}, \tag{2.2}$$

其中 k, l 为整数, $k\geqslant l>0$, x 为任意复数. 符号 $\binom{x}{i}$ 如上节注记中给出.

显然,李善兰恒等式(2.1)是(2.2)式的特例. 故只须证明(2.2)式.

对 $k\geqslant l>0$ 行归纳法. 当 $k=l=1$ 时,(2.2)式为

$$(x+1)^2=\binom{x+2}{2}+\binom{x+1}{2}, \tag{2.3}$$

命题显然成立. 现设对任意的 $k\geqslant l>0$ 命题成立. 即有

$$\binom{x+k}{k}\binom{x+l}{l}=\sum_{i=0}^{l}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l-i}{k+l}.$$

我们首先证明(2.2)式对 $k+1$, l 成立, 然后再证明(2.2)式对 $k+1$, $l+1$ 成立.

根据定义(1.4)和归纳法假设我们有

$$\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l}{l}=\frac{x+k+1}{k+1}\binom{x+k}{k}\binom{x+l}{l} \tag{2.4}$$

$$=\frac{x+k+1}{k+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l-i}{k+l}.$$

经过直接计算易得

$$(x+k+1)(k+l+1)=(x+k+l+1-i)(k+1+i)+(x-i)(l-i),$$
$$i=0,1,2,\cdots,l.$$

所以,(2.4)式化为

$$\begin{aligned}&\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l}{l}\\&=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\left\{(k+1+i)\frac{x+k+l+1-i}{k+l+1}+(l-i)\frac{x-i}{k+l+1}\right\}\\&\quad\times\binom{x+k+l-i}{k+l}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

再次根据定义(1.4),我们有

$$\frac{x+k+l+1-i}{k+l+1}\binom{x+k+l-i}{k+l}=\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}$$

$$\frac{x-i}{k+l+1}\binom{x+k+l-i}{k+l}=\binom{x+k+l-i}{k+l+1}$$

因此,(2.5)式等于

$$\begin{aligned}\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l}{l}&=\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{i=0}^{l}\binom{k}{i}\binom{l}{i}(k+1+i)\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}\\&\quad+\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{l-1}\binom{k}{i}\binom{l}{i}(l-i)\binom{x+k+l-i}{k+l+1}\\&=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{l}\left\{\binom{k+1}{i}(k+1-i)+i\binom{k}{i}\right\}\binom{l}{i}\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}\\&\quad+\frac{1}{k+1}\cdot\sum_{i=1}^{l}\binom{k}{i-1}\binom{l}{i-1}(l+1-i)\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

显然,$\binom{l}{i-1}(l+1-i)=i\binom{l+1}{i}-i\binom{l}{i-1}=i\binom{l}{i}$ 成立

所以(2.6)式可写为

$$\begin{aligned}\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l}{l}&=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{l}\left\{\binom{k+1}{i}(k+1-i)\right.\\&\quad\left.+i\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]\right\}\binom{l}{i}\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}\\&=\sum_{i=0}^{l}\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1},\end{aligned}\tag{2.7}$$

即命题对 $k+1$, l 成立. 完全类似地,我们有

$$(x+l+1)(k+l+2)=(x+k+l+2-i)(l+1+i)+(x-i)(k+1-i),$$
$$i=0,1,2,\cdots,l.$$

所以,依定义(1.4)和(2.7)式可得

$$\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l+1}{l+1}=\frac{x+l+1}{l+1}\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l}{l}$$

$$=\frac{x+l+1}{l+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}$$

$$=\frac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}\left\{\frac{x+k+l+2-i}{k+l+2}(l+1+i)\right.$$

$$\left.+\frac{x-i}{k+l+2}(k+1-i)\right\}\binom{x+k+l+1-i}{k+l+1}$$

$$=\frac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}(l+1+i)\binom{x+k+l+2-i}{k+l+2}$$

$$+\frac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l}\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}(k+1-i)\binom{x+k+l+1-i}{k+l+2}$$

$$=\frac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l+1}\left\{\binom{k+1}{i}\binom{l}{i}(l+1+i)\right.$$

$$\left.+\binom{k+1}{i-1}\binom{l}{i-1}(k+2-i)\right\}\binom{x+k+l+2-i}{k+l+2}. \tag{2.8}$$

利用关系式

$$(k+2-i)\binom{k+1}{i-1}=i\binom{k+1}{i}.$$

(2.8) 式等于

$$\binom{x+k+1}{k+1}\binom{x+l+1}{l+1}=\frac{1}{l+1}\sum_{i=0}^{l+1}\left\{\binom{l}{j}(l+1+i)\right.$$

$$\left.+\binom{l}{i-1}i\right\}\binom{k+1}{i}\binom{x+k+l+2-i}{k+l+2}$$

$$=\sum_{i=0}^{l+1}\binom{k+1}{i}\binom{l+1}{i}\binom{x+k+l+2-i}{k+l+2}, \tag{2.9}$$

即等式(2.2)对 $k+1\geqslant l+1>0$ 成立．证毕．

三、李善兰恒等式的推广

本节考虑一般的乘幂 $\binom{m+k}{k}^n$，$k\geqslant 1$，$n\geqslant 2$，如何分解为垛积数的线性组合．当 $n=3$，我们有

命题 3.1. 乘幂 $\binom{m+k}{k}^3$，$k\geqslant 1$，具有下列分解

$$\binom{m+k}{k}^3=\sum_{i=0}^{2k}A(3k,i)\binom{m+3k-i}{3k}, \tag{3.1}$$

其中m为适当选取的整数，并且系数 $A(3k, l)$，$0 \leqslant l \leqslant 2k$ 满足递推公式

$$A(3k, l)=\sum_{j=0}^{3} \phi_{3(k-1), l-j} A(3(k-1), l-j), \tag{3.2}$$

其中

$$\phi_{3(k-1), l}=(k+l)^{3},$$

$$\begin{aligned}
\phi_{3(k-1), l-1}= & (2k-l+1)(k+l-1)^{2}+(2k-l)(k+l)(k+l-1) \\
& +(2k-l-1)(k+l)^{2}, \\
\phi_{3(k-1), l-2}= & (2k-l+1)^{2}(k+l-2)+(2k-l+1)(2k-l)(k+l-1) \\
& +(2k-l)^{2}(k+l), \\
\phi_{3(k-1), l-3}= & (2k-l+1)^{3}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们仍称系数 $A(3k, l)$，$0 \leqslant l \leqslant 2k$ 为李善兰系数，简称为李氏数.

证. 对k行归纳法. 当 $k=1$ 时，(3.1)式为

$$(m+1)^{3}=\sum_{i=0}^{2} A(3, i)\binom{m+3-i}{3},$$

其中系数分别为

$$A(3,0)=1,\ A(3,1)=4,\ A(3,2)=1,$$

这在第一节已讨论过. 现假设(3.1)式对 $k-1$ 成立，即有

$$\binom{m+k-1}{k-1}^{3}=\sum_{i=0}^{2k-2} A(3(k-1), i)\binom{m+3k-3-i}{3k-3}. \tag{3.4}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\binom{m+k}{k}\binom{m+k-1}{k-1}^{2} & =\frac{m+k}{k}\binom{m+k-1}{k-1}^{3} \\
& =\frac{m+k}{k} \sum_{i=0}^{2k-2} A(3(k-1), i)\binom{m+3k-3-i}{3k-3}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

利用关系式

$$(m+k)(3k-2)=(m+3k-2-i)(k+i)+(m-i)(2k-2-i),$$
$$i=0,1,2, \cdots, 2k-2,$$

(3.5) 式化为

$$\begin{aligned}
k\binom{m+k}{k}\binom{m+k-1}{k-1}^{2}= & \sum_{i=0}^{2k-2} A(3k-3, i) \\
& \times\left\{\frac{m+3k-2-i}{3k-2}(k+i)+\frac{m-i}{3k-2}(2k-2-i)\right\} \cdot\binom{m+3k-3-i}{3k-3} \\
= & \sum_{i=0}^{2k-2} A(3k-3, i)(k+i)\binom{m+3k-2-i}{3k-2} \\
& +\sum_{i=0}^{2k-3} A(3k-3, i)(2k-2-i)\binom{m+3k-3-i}{3k-2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{2k-2} \{A(3k-3, i)(k+i) + A(3k-3, i-1)(2k-1-i)\}$$
$$\times \binom{m+3k-2-i}{3k-2} \tag{3.6}$$

再利用关系式

$$(m+3k)(3k-1) = (m+3k-1-i)(k+i) + (m-i)(2k-1-i),$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots, 2k-1.$$

经过类似的推导可得

$$k^2 \binom{m+k}{k}^2 \binom{m+k-1}{k-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{2k-1} \{(k+i)[A(3k-3, i)(k+i) + A(3k-3, i-1)(2k-1-i)]$$
$$+ (2k-i)[A(3k-3, i-1)(k+i-1) + A(3k-3, i-2)(2k-i)]\}$$
$$\cdot \binom{m+3k-1-i}{3k-1}. \tag{3.7}$$

再次利用关系式

$$(m+k) \cdot 3k = (m+3k-i)(k+i) + (m-i)(2k-i), \quad i = 0, 1, \cdots, 2k.$$

经过类似的推导最后得

$$k^3 \binom{m+k}{k}^3$$
$$= \sum_{i=0}^{2k} \{(k+i)^2[A(3k-3, i)(k+i) + (2k-1-i)A(3k-3, i-1)]$$
$$+ (k+i)(2k-i)[(k+i-1)A(3k-3, i-1) + (2k-i)A(3k-3, i-2)]$$
$$+ (2k-i+1)(k+i-1)[(k+i-1)A(3k-3, i-1)$$
$$+ (2k-i)A(3k-3, i-2)]$$
$$+ (2k-i+1)^2[(k+i-2)A(3k-3, i-2) + (2k+1-i)A(3k-3, i-3)]\}$$
$$\cdot \binom{m+3k-i}{3k}. \tag{3.8}$$

利用m的任意性，所以有

$$A(3k, i) = \sum_{j=0}^{3} \phi_{3(k-1), i-j} A(3k-3, i-j),$$

其中 $\phi_{3(k-1), i-j}$, $j = 0, 1, 2, 3$ 如(3.3)式的形式．命题 3.1 证毕．

显然，上述推导方法可用于推导一般的乘幂 $\binom{m+k}{k}^n$, $n \geqslant 2$．即对任意给定的 n，乘幂 $\binom{m+k}{k}^n$ 有如下的分解式

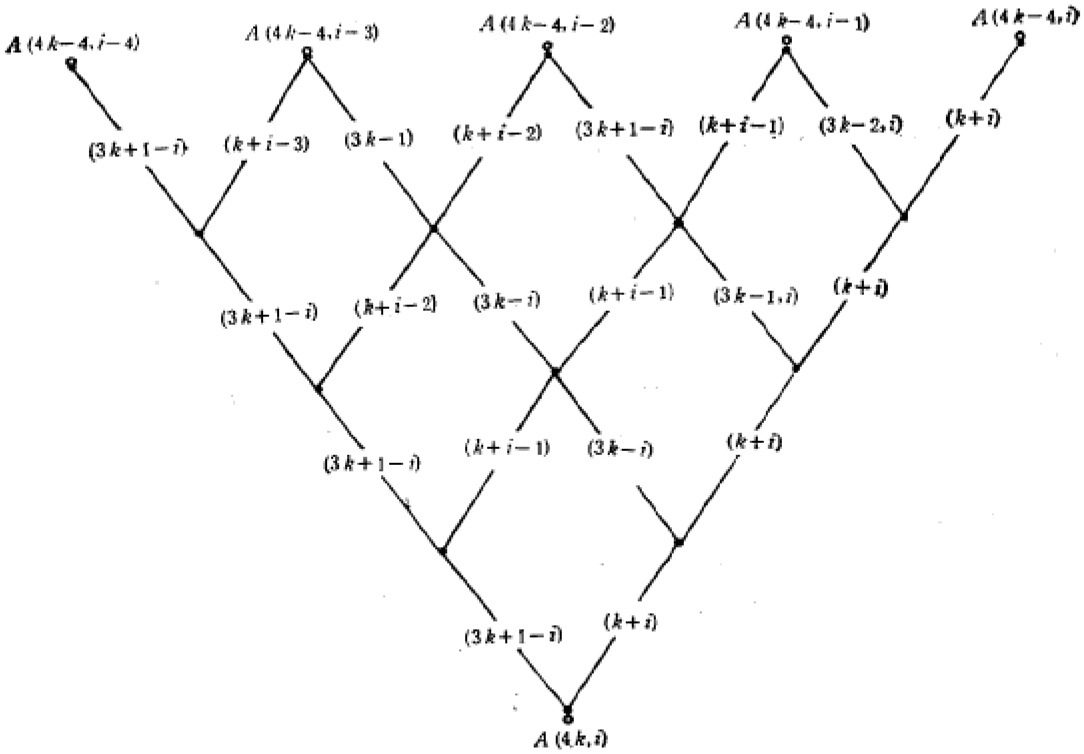
$$\binom{m+k}{k}^n = \sum_{j=0}^{(n-1)\cdot k} A(nk, j) \binom{m+nk-j}{nk}. \tag{3.9}$$

其中李善兰系数 $A(nk, j)$，$0 \leqslant j \leqslant (n-1)k$ 满足一定的递推关系

$$A(nk,\ i) = \sum_{j=0}^{n} \phi_{i-j}(n(k-1))A(n(k-1),\ i-j),\ \ 0 \leqslant i \leqslant (n-1)k. \qquad (3.10)$$

当 n 给定时，系数 $\phi_{i-j}(n(k-1))$，$0 \leqslant j \leqslant n$ 可明确表出.

实际上，上述系数的推导，可利用绘出网格的方法简便的得到. 例如，$n=4$，可先绘出下图



(3.10)式中李氏数 $A(4k, i)$ 由五项生成. 在网格的每条边上都标有一定的数值.（每条斜行相同，而相邻的斜行依次差 1）. 如果把从 $A(4(k-1), i-j)$ 到达的 $A(4k, i)$ 的路径所经过的每条边上的因子相乘，再把这个乘积按所有可能的从 $A(4(k-1), i-j)$ 到达 $A(4k, i)$ 的路径求和，那么就得到系数 $\phi_{i-j}(4(k-1))$. 即

$$\phi_i(4k-4) = \frac{1}{k^4}(k+i)^4,$$

$$\phi_{i-1}(4k-4) = \frac{1}{k^4}\{(k+i)^3(3k-2-i) + (k+i)^2(k+i-1)(3k-1-i) + (k+i)(k+i-1)^2(3k-i) + (k+i-1)^3(k+1-i)\}$$

$$\phi_{i-2}(4k-4) = \frac{1}{k^4}\{(k+i)^2(3k-1-i)^2 + (k+i)(k+i-1)(3k-i)(3k-1-i) + (k+i)(k+i-2)(3k-i)^2 + (3k+1-i)^2(k+i-2)^2\}$$

$$\phi_{i-3}(4k-4)=\frac{1}{k^4}\{(k+i)(3k-i)^3+(k+i-1)(3k+1-i)(3k-i)^2$$
$$+(k+i-2)(3k+1-i)^2(3k-i)+(k+i-3)(3k+1-i)^3\}$$
$$\phi_{i-4}(4k-4)=\frac{1}{k^4}(3k+1-i)^4.$$

值得指出，递推关系(3.10)中所出现的系数 $\phi_{i-j}(n(k-1))$，$0\leqslant j\leqslant n$，与对称群表示论中的一些问题有密切联系(见[6]).

四、一 般 情 形

设 $[s]=[s_1,s_2,\cdots,s_n]$ 为长度为N的类分．命

$$\binom{m+[s]}{[s]}=\prod_{i=1}^{n}\binom{m+s_i}{s_i} \tag{4.1}$$

本节讨论乘积(4.1)分解为垛积数的线性组合这一问题.

为书写方便,把长度为$N+1$的类分 $[s_1,\cdots,s_{i-1},s_i+1,s_{i+1},\cdots,s_n]$ 简记为 $[s;s_i+1]$. 我们有

定理 4.1. 设 $[s]=[s_1,s_2,\cdots,s_n]$ 为长度为N的类分，则乘积(4.1)有如下的分解

$$\binom{m+[s]}{[s]}=\sum_{k=0}^{N-1}A([s],k)\binom{m+N-k}{N}, \tag{4.2}$$

这里m为适当选取的整数．并且对任一长度为$N+1$的类分 $[s;s_i+1]$, $0\leqslant i\leqslant n$，分解系数 $A([s;s_i+1],k)$ 满足如下的递推关系

$$(s_i+1)A([s;s_i+1],k)=(s_i+1+k)A([s],k)+(N-s_i-k+1)A([s],k-1),$$
$$i=1,2,\cdots,n,$$
$$k=0,1,\cdots,N. \tag{4.3}$$

我们仍称分解系数 $A([s],k)$ 为李善兰系数.

证．当类分为 $[s]=[1^n]$，则公式(4.2)和(4.3)就是公式(1.1)和(1.3)，故命题为真．现假设对任意长为N的类分$[s]$定理成立．我们只须证明(4.3)式对任意给定的长度为$N+1$的类分 $[s;s_i+1]$, $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

根据定义(4.1)和归纳法假设,我们有

$$\binom{m+[s;s_i+1]}{[s;s_i+1]}=\frac{m+s_i+1}{s_i+1}\binom{m+[s]}{[s]}$$
$$=\frac{m+s_i+1}{s_i+1}\sum_{k=0}^{N-1}A([s],k)\binom{m+N-k}{N}. \tag{4.4}$$

直接验证可知下式成立

$$(m+s_i+1)(N+1)=(s_i+1+k)(m+N+1-k)+(N-s_i-k)(m-k),$$
$$k=0,1,\cdots,N-1.$$

因此(4.4)式变为

$$
\begin{aligned}
&(s_i+1)\binom{m+[s;s_i+1]}{[s;s_i+1]}\\
&\quad=\sum_{k=0}^{N-1}(s_i+1+k)A([s],k)\times\frac{m+N+1-k}{N+1}\binom{m+N-k}{N}\\
&\qquad+\sum_{k=0}^{N-1}(N-s_i-k)A([s],k)\frac{m-k}{N+1}\binom{m+N-k}{N}\\
&\quad=\sum_{k=0}^{N-1}(s_i+1+k)A([s],k)\binom{m+N+1-k}{N+1}\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{N}(N-s_i-k+1)A([s],k-1)\binom{m+N+1-k}{N+1}\\
&\quad=\sum_{k=0}^{N}\{(s_i+1+k)A([s],k)+(N-s_i-k+1)A([s],k-1)\}\\
&\qquad\times\binom{m+N+1-k}{N+1}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

利用m的任意性，可知递推关系(4.3)成立．定理证毕．

根据递推公式(4.3)，可得李氏数 $A([s],k)$ 的明确表达式．为书写方便，对任意类分 $[s]=[s_1,s_2,\cdots,s_n]$ 和正整数k，我们引入符号

$$P([s],k)=\prod_{i=1}^{n}\binom{s_i+k}{s_i}.$$

定理 4.2. 对任意给定的长度为N的类分 $[s]=[s_1,s_2,\cdots,s_n]$，李氏数 $A([s],k)$，$0\leqslant k\leqslant N-1$，可表示为

$$A([s],k)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{N+1}{j}P([s],k-j),\ k=0,1,\cdots,N-1. \tag{4.6}$$

证．对N行归纳法．当 $N=1,2$ 时，定理显然成立．现假设 (4.6) 式对$N-1$和$0\leqslant k\leqslant N-2$ 成立，即对任意的长为$N-1$的类分 $[s]=[s_1,\cdots,s_n]$ 成立．根据递推公式(4.3)和归纳法假设，我们有

$$
\begin{aligned}
A([s;s_i+1],k)&=\frac{s_i+1+k}{s_i+1}A([s],k)+\frac{N-s_i+k}{s_i+1}A([s],k-1)\\
&=\frac{s_i+1+k}{s_i+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{N}{j}P([s],k-j)\\
&\quad+\frac{N-s_i-k}{s_i+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{N}{j}P([s],k-j-1)\\
&=\frac{s_i+1+k}{s_i+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{N}{j}P([s],k-j)\\
&\quad+\frac{N-s_i-k}{s_i+1}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\binom{N}{j-1}P([s],k-j)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left\{ \frac{s_i+N+1}{s_i+1} \binom{N}{j} - \frac{N-s_i-k}{s_i+1} \binom{N}{j-1} \right\} P([s], k-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{N+1}{j} \frac{s_i+k+1-j}{s_i+1} P([s], k-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{N+1}{j} P([s; s_i+1], k-j),\ k=0, 1, \cdots, N. \tag{4.7}$$

定理 4.2 证毕.

从定理 4.1 和定理 4.2 容易看出,李氏数 $A([s], k)$ 只依赖于类分 $[s]=[s_1, s_2, \cdots, s_n]$ 中 s_i, $1\leqslant i\leqslant n$ 的数值,而与它们的次序无关. 换言之,若 θ 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一置换,并记类分 $[s_{\theta(1)}, s_{\theta(2)}, \cdots, s_{\theta(n)}]$ 为 $[\theta^{-1}s]$, 那么我们有

推论 4.3. 李氏数 $A([s], k)$, $k\geqslant 0$, 是在置换 θ 之下不变的. 即

$$A([s], k) = A([\theta^{-1}s], k),\ k=0, 1, \cdots, N-1. \tag{4.8}$$

最后,给出李氏数的组合意义.

定理 4.4. 对任意给定的类分 $[s]$ 和正整数 $k\geqslant 0$, 李善兰系数 $A([s]k)$ 给出 Simon-Newcomb 问题的解.

证. 对类分 $[s]$ 的长度 N 行归纳法. 当 $N=1$, 定理显然成立. 现假设定理对 N 成立,即对任意给定的长度为 N 的类分 $[s]$, 在 $\{A[s]\}$ 中存在 $A([s], k)$ 个具有下降数 k 的数列.

考虑长度为 $N+1$ 的类分 $[s; s_n+1]$. 设 $A(N)=(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ 为 $\{A[s]\}$ 中的任一数列, 我们要把数字 $a^*=n$ 置入数列 $A(N)$ 之中. 显然有: $d(a_i, a^*)=0$, $d(a^*, n)=0$, 以及 $d(a^*, a_i)=1$, 当 $a_i\neq n, i=1, 2, \cdots, N$. 如果数列 $A(N)$ 的下降数为 k, 即恰好有 k 个邻对 (a_i, a_{i+1}) 使 $d(a_i, a_{i+1})=1$, 其余 $N+1-k$ 个邻对的下降数为零. 当把 $a^*=n$ 置入 k 个下降数为 1 的邻对以及邻对 (a_N, a_{N+1}) 之时,得到 $\{A[s; s_n+1]\}$ 内的 $k+1$ 个下降数为 k 的数列. 此外,在 $A(N)$ 中还有 s_n 个邻对 (a_i, n), 当把 $a^*=n$ 置入这 s_n 个邻对时,又在 $\{A[s; s_n+1]\}$ 内得到 s_n 个下降数为 k 的数列. 这样总共得到 $\{A[s_1, s_n+1]\}$ 内的 $k+1+s_n$ 个下降数为 k 的数列. 而当把 a^* 置入其余的 $N-k-s_n$ 个下降数为零的邻对时,得到 $\{A[s; s_n+1]\}$ 内的 $N-k-s_n$ 个下降数为 $k+1$ 的数列. 因此, 经过把 $a^*=n$ 置入 $\{A[s]\}$ 中的每个数列总共得到 $(k+s_n+1)A([s], k)+(N-s_n-k+1)A([s], k-1)$ 个 $\{A[s; s_n+1]\}$ 内的下降数为 k 的数列. 然而, 由于在 $\{A[s; s_n+1]\}$ 内的每一数列中整数 n 出现 s_n+1 次. 故通过上述方法将使 $\{A[s; s_n+1]\}$ 中的每一数列都要重复得到 s_n+1 次. 因此,在 $\{A[s; s_n+1]\}$ 中存在下降数为 k 的数列的总数为

$$\frac{1}{s_n+1}[(k+s_n+1)A([s], k)+(N-s_n-k+1)A([s], k-1)].$$

根据递推关系(4.3),这恰为 $A([s; s_n+1], k)$.

根据推论 4.3 知,系数 $A([s; s_n+1], k)$ 在置换 θ 之下是不变的. 所以, 对任意长为 $N+1$ 的类分 $[s; s_i+1]$, $i=1, 2, \cdots, n$, 命置换 θ 适合 $\theta(i)=n$, 则有

$$A([s; s_i+1], k) = A([\theta s; s_{\theta^{-1}(n)}+1], k)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s_{\theta^{-1}(n)}+1}\{(k+s_{\theta^{-1}(n)}+1)A([\theta s],k) \\
&\quad + (N-s_{\theta^{-1}(n)}+1-k)A([\theta s],k-1)\} \\
&= \frac{1}{s_i+1}\{(k+s_i+1)A([s],k)+(N-s_i-k+1)A([s],k-1)\},
\end{aligned}
$$

其中 $s_{\theta^{-1}(n)}=s_i$. 定理 4.4 证毕.

注记. 从上述证明中不难看出，若把整数m替换为任意复数，本节中的定理依然成立.

参 考 文 献

[1] 华罗庚，华罗庚科普著作选集. 上海教育出版社，上海，1984.

[2] 钱宝琮，中国数学史，科学出版社，北京，1964.

[3] Carlitz, L., Note on a paper of Shanks, *Amer. Math. Monthly*, 59(1952), 239—241.

[4] Dillon J. F. and D. P. Roselle, Simon Newcomb's problem, *SIAM. J. Applied Math.*, 17(1969), 1086—1093.

[5] Foata D. and M. P. Schützenberger, Théorie Géométrique des Polynomes Eulerions, *L. N. in Math.*, 138 (1970), Springer-Verlage, Berlin.

[6] Soulkes, H. O., Eularian Numbers, Newcomb's problem and Representations of Symmetric Groups, *Discrete Math.*, 30(1980), 3—49.

[7] MacMahon, P. A., Combinatory Analysis, Vol. 1, Combridge University Press, Combridge, 1915.

[8] Shanks, E. B., Iterated sums of powers of binamial coefficients, *Amer. Math. Monthly*, 58(1951), 404—407.

LI SHAN-LAN NUMBERS AND NEWCOMB'S PROBLEM

SHI HE

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this note, an elementary proof of the famous Li Shan-lan identity is provided. Also, some generalizations of this identity from the point of view of figurate numbers are obtained. As a consequence, we get the solutions of Simon-Newcomb's problem.