系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
8 (4) (1988), 367—372

# 具有给定性质的 $(g, f)$ 因子

陈 赐 平
（北京农业工程大学）

## 1. 引 言

本文考虑的图 $G$ 均为无环边的有限图. 文中未定义的符号及术语均引自 [1]. 对 $S, T \subseteq V(G)$, 使得 $S \cap T = \phi$, 我们用 $E_G(S, T)$ 表示 $G$ 的端点分别包含在 $S$ 及 $T$ 中的边的集合. 记 $e_G(S, T) = |E_G(S, T)|$.

## 2. 关于二分图的结果

设 $G$ 为一个图, 且 $f, g$: $V(G) \to \boldsymbol{Z}$ 使得 $g \leqslant f$. 对 $V(G)$ 的不交子集 $S$ 及 $T$, 我们记

$$\gamma_G(S, T) = \sum_{s \in S} f(s) - \sum_{t \in T} g(t) + \sum_{t \in T} d_{G-S}(t).$$

**引理 $F$** (Folkman, Fulkerson [2]). 设 $G = (X, Y)$ 为二分图, 且 $f, g: V(G) \to \boldsymbol{Z}$ 使得 $\forall x \in V(G)$ 均有 $g(x) \leqslant f(x)$. 则 $G$ 有 $(g, f)$-因子当且仅当任给 $S \subseteq X$ 及 $T \subseteq Y$, 有 $\gamma_G(S, T) \geqslant 0$ 及 $\gamma_G(T, S) \geqslant 0$.

**定理 2.1.** 设 $G = (X, Y)$ 为二分图, 且 $f, g: V(G) \to \boldsymbol{Z}$ 使得 $\forall x \in V(G)$ 均有 $g(x) \leqslant f(x)$ 及 $f(x) \geqslant 1$. 则 $G$ 具有包含一条任意给定边的 $(g, f)$-因子当且仅当任给 $S \subseteq X$ 及 $T \subseteq Y$, 有

$$\gamma_G(S, T) \geqslant \varepsilon_1(S, T) \text{ 且 } \gamma_G(T, S) \geqslant \varepsilon_1(T, S),$$

其中

$$\varepsilon_1(S, T) = \begin{cases} 1, \text{ 如果 } \sum_{x \in S} d_{G-T}(x) \geqslant 1, \\ 0, \text{ 否则}. \end{cases}$$

证. 由于定理的必要性及充分性的证明是类似的, 我们这里只给出充分性的证明.

任给 $e = ab \in E(G)$. 我们令 $G^* = G - e$, 并定义

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{当 } x \in V(G) \setminus \{a, b\}, \\ g(x) - 1, & \text{当 } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in V(G) \setminus \{a, b\}, \\ f(x) - 1, & \text{当 } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

1987 年 4 月 25 日收到, 1988 年 5 月 6 日收到修改稿.

易知$G$具有包含$e$的 $(g, f)$-因子当(且仅当) $G^*$ 有 $(g^*, f^*)$-因子. 这样,由引理$F$知,只需证明对任意的 $S\subseteq X$ 及 $T\subseteq Y$, 有 $\gamma_{G^*}(S, T):=\sum_{s\in S} f^*(s)-\sum_{t\in T} g^*(t)+\sum_{t\in T} d_{G^*-S}(t)\geqslant 0$ 且 $\gamma_{G^*}(T, S)\geqslant 0$.

如果 $e\in E_G(S, Y\backslash T)$, 则可验证 $\gamma_{G^*}(S, T)=\gamma_G(S, T)-1$ 及 $\gamma_{G^*}(T, S)=\gamma_G(T,S)$; 如果 $e\in E_G(X\backslash S,T)$, 则同理可得 $\gamma_{G^*}(S,T)=\gamma_G(S, T)$ 及 $\gamma_{G^*}(T, S)=\gamma_G(T, S)-1$; 否则 $\gamma_{G^*}(S, T)=\gamma_G(S, T)$ 且 $\gamma_{G^*}(T, S)=\gamma_G(T, S)$. 从而由定理的条件我们得到 $\gamma_{G^*}(S, T)\geqslant 0$ 及 $\gamma_{G^*}(T, S)\geqslant 0$. 故 $G^*$ 具有 $(g^*, f^*)$-因子. 亦即$G$具有所要求的因子. 充分性证毕.

我们用$\boldsymbol{N}$表示自然数集.

**推论 2.2.** 设 $G=(X, Y)$ 为二分图,且 $f: V(G)\to \boldsymbol{N}$ 使得 $\sum_{x\in X} f(x)=\sum_{y\in Y} f(y)$. 则$G$具有包含一条任意给定边的$f$-因子, 当且仅当任给 $S\subseteq X$ 及 $T\subseteq Y$, 有

$$\sum_{s\in S} f(s)-\sum_{t\in T} f(t)+\sum_{t\in T} d_{G-S}(t)\geqslant \varepsilon_1(S, T).$$

证. 注意到当 $g=f$ 时, $\gamma_G(S, T)=\gamma_G(Y\backslash T, X\backslash S)$ 对任何 $S\subseteq X$ 及 $T\subseteq Y$ 均成立,则由定理 2.1 立即得到本推论.

推论 2.2 如下的形式也许有时更为实用.

**推论 2.3.** 设 $G=(X, Y)$ 为二分图,且 $f: V(G)\to \boldsymbol{N}$ 使得 $\sum_{x\in X} f(x)=\sum_{y\in Y} f(y)$. 则$G$具有包含一条任意给定边的$f$-因子,当且仅当任给 $T\subseteq Y$, 有

$$\sum_{t\in T} f(t)\leqslant \sum_{x\in X} \min\{f(x), e_G(\{x\}, T)\}-\varepsilon_1(X(T), T),$$

其中 $X(T)=\{x\in X\,|\,f(x)\leqslant e_G(\{x\}, T)\}$.

证. 由推论 2.2 知,只需对 $S\subseteq X$ 及 $T\subseteq Y$ 往证得下列两式等价:

$$\sum_{t\in T} f(t)>\sum_{s\in S} f(s)+\sum_{t\in T} d_{G-S}(t)-\varepsilon_1(S, T), \tag{1}$$

$$\sum_{t\in T} f(t)>\sum_{x\in X} \min\{f(x), e_G(\{x\}, T)\}-\varepsilon_1(X(T), T). \tag{2}$$

易看出, $\sum_{s\in S} f(s)+\sum_{t\in T} d_{G-S}(t)=\sum_{s\in S} f(s)+\sum_{x\in X\backslash S} e_G(\{x\}, T)\geqslant \sum_{x\in X} \min\{f(x), e_G(\{x\}, T)\}$. 若大于号成立,则显然 (1) 式隐含 (2) 式;若等号成立,则对所有 $x\in S$ 均有 $f(x)\leqslant e_G(\{x\}, T)$, 即有 $S\subseteq X(T)$. 从而按定义有 $\varepsilon_1(X(T), T)\geqslant \varepsilon_1(S, T)$. 于是我们仍有 (1) 式隐含 (2) 式. 反之,如果 (2) 式成立,令 $S=X(T)$, 则得 (1) 式. 证毕.

由推论 2.3 我们易导出下面的推论.

**推论 2.4**[6]. 设 $G=(X, Y)$ 为连通图且 $|X|=|Y|$. 则$G$的每条边包含在一个1-因子中,当且仅当任给 $T\subset Y$ 有 $|N_G(T)|>|T|$.

## 3. 关于一般图的结果

设$G$为一个图,且 $f, g: V(G)\to \boldsymbol{Z}$ 使得 $g\leqslant f$. 设 $S$ 及 $T$ 为 $V(G)$ 的不交子集, $C$

为 $G-(S\cup T)$ 的一个分支. 如果 $\forall\ x\in V(C)$ 均有 $g(x)=f(x)$, 则我们视 $\sum_{x\in V(C)} f(x)+e_G(V(C),T)$ 为奇数或偶数而分别称 $C$ 为 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-奇分支或偶分支. 设 $e$ 为 $G-(S\cup T)$ 的一条割边, $C$ 为 $G-(S\cup T)$ 中包含 $e$ 的分支, $G^*=G-e$. 如果 $C-e$ 的两个分支均为 $G^*-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-偶分支, 则称 $e$ 为 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-关键割边(注意这时 $C$ 必为 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-偶分支). 如果 $C-e$ 中恰含有 $G^*-(S\cup T)$ 的一个 $(g,f)$-偶分支, 且存在 $x\in V(C)$ 使 $g(x)<f(x)$, 则称 $e$ 为 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-次关键割边. 并且,我们记

$$\delta_G(S,T)=\sum_{s\in S} f(s)-\sum_{t\in T} g(t)+\sum_{t\in T} d_{G-S}(t)-h_G(S,T),$$

其中 $h_G(S,T)$ 表示 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-奇分支的数目.

**引理 L**[3]. 设 $G$ 为一个图, 且 $f,g$: $V(G)\to\mathbf{Z}$ 使得 $\forall\ x\in V(G)$ 均有 $g(x)\leqslant f(x)$. 则 $G$ 有 $(g,f)$-因子当且仅当

任给 $S,T\subseteq V(G)$ 使得 $S\cap T=\phi$, 有 $\delta_G(S,T)\geqslant 0$.

这个引理将用来证明下面的主要定理.

**定理 3.1.** 设 $G$ 为一个图,且 $f,g$: $V(G)\to\mathbf{Z}$ 使得对所有 $x\in V(G)$ 均有 $g(x)\leqslant f(x)$ 及 $f(x)\geqslant 1$. 则 $G$ 具有包含一条任意给定边的 $(g,f)$-因子当且仅当

$$\text{任给 } S,T\subseteq V(G) \text{ 使得 } S\cap T=\phi,\ \text{有 } \delta_G(S,T)\geqslant \varepsilon_2(S,T), \tag{3}$$

其中

$$\varepsilon_2(S,T)=\begin{cases}2, \text{如果 } G[S] \text{ 含有边,或 } G-(S\cup T) \text{ 含有 } (g,f)\text{-关键割边,或 } G-(S\cup T) \text{ 含有 } (g,f)\text{-偶分支 } C \text{ 使得 } e_G(V(C),S)\geqslant 1;\\ 1, \text{如果 } G-(S\cup T) \text{ 含有 } (g,f)\text{-次关键割边,或 } G-(S\cup T) \text{ 含有分支 } C \text{ 使得 } \sum_{x\in V(C)} g(x)<\sum_{x\in V(C)} f(x) \text{ 且 } e_G(V(C),S)\geqslant 1;\\ 0, \text{否则.}\end{cases}$$

证. 由于定理的必要性与充分性的证明是相似的,我们这里只给出充分性的证明.

任给 $e=ab\in E(G)$. 我们由 $G$ 构造出一个新图 $G^*$ 如下: 在 $e$ 中插入一个新的顶点 $v$. 即 $V(G^*)=V(G)\cup\{v\}$ 且 $E(G^*)=E(G)\cup\{av,bv\}\backslash\{e\}$. 并且定义

$$g^*(x)=\begin{cases}g(x), & \text{当 } x\in V(G),\\ 2, & \text{当 } x=v.\end{cases}$$

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in V(G),\\ m, & \text{当 } x=v.\end{cases}$$

其中, $m$ 是一个充分大的正整数. 易看出, $G$ 具有包含 $e$ 的 $(g,f)$-因子当(且仅当) $G^*$ 有 $(g^*,f^*)$-因子. 这样,由引理 L 知,只需对 $V(G^*)$ 的任意不交子集 $S$ 及 $T$, 证明 $\delta_{G^*}(S,T):=\sum_{s\in S} f^*(s)-\sum_{t\in T} g^*(t)+\sum_{t\in T} d_{G^*-S}(t)-h_{G^*}(S,T)\geqslant 0$.

既然 $m$ 是一个充分大的数,若 $v\in S$, 则 $\delta_{G^*}(S,T)\geqslant 0$. 因此我们可以假定 $v\notin S$.

如果 $e\in E(G[S])$，或 $e$ 是 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-关键割边，或存在 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-偶分支 $C$ 使得 $e\in E_G(V(C),S)$，则可以验证 $\delta_{G^*}(S,T)=\delta_G(S,T)-2$；如果 $e$ 是 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-次关键割边，或存在 $G-(S\cup T)$ 的分支 $C$ 使得 $e\in E_G(V(C),S)$ 且 $\sum\limits_{x\in V(C)}g(x)<\sum\limits_{x\in V(C)}f(x)$，则同理可验证 $\delta_{G^*}(S,T)=\delta_G(S,T)-1$；否则 $\delta_{G^*}(S,T)=\delta_G(S,T)$。从而由定理的条件我们得到 $\delta_{G^*}(S,T)\geqslant 0$。故 $G^*$ 有 $(g^*,f^*)$-因子。亦即 $G$ 具有所要求的因子。充分性证毕。

当 $g=f$ 时，定理 3.1 的 $\varepsilon_1(S,T)$ 可以简化，因为这时可以排除 $\varepsilon_1(S,T)=1$ 的情形(参见 [7])。

**引理 3.2.** 设 $G$ 为一个图，且 $f,g$: $V(G)\to \mathbf{Z}$ 使得 $\forall x\in V(G)$ 均有 $0\leqslant g(x)\leqslant 1\leqslant f(x)$。则 $G$ 具有包含一条任意给定边的 $(g,f)$-因子当且仅当

$$\text{任给 } S,T\subseteq V(G) \text{ 使得 } S\cap T=\phi,\text{ 有 } \delta_G(S,T)\geqslant \varepsilon_3(S,T), \tag{4}$$

其中

$$\varepsilon_3(S,T)=\begin{cases}2, & \text{如果 } G[S] \text{ 含有边;}\\ 1, & \text{如果 } G-(S\cup T) \text{ 含有分支 } C \text{ 使得} \\ & \sum\limits_{x\in V(C)}g(x)<\sum\limits_{x\in V(C)}f(x) \text{ 且 } e_G(V(C),S)\geqslant 1;\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

证. 显然，条件 (3) 隐含条件 (4)。因此由定理 3.1 知，只需证明当 $0\leqslant g\leqslant 1\leqslant f$ 时条件 (4) 也隐含条件 (3)。

假设 $G-(S\cup T)$ 有 $(g,f)$-次关键割边 $e=ab$。设 $G-(S\cup T)-e$ 中包含 $a$ 及 $b$ 的分支分别为 $C_1$ 及 $C_2$。按定义可假定 $C_1$ 为 $(G-e)-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-偶分支。则 $g(a)=f(a)=1$ 且 $C_2$ 是 $G-[(S\cup\{a\}\cup T]$ 的满足 $\sum\limits_{x\in V(C_2)}g(x)<\sum\limits_{x\in V(C_2)}f(x)$ 及 $e_G(V(C_2),S\cup\{a\})\geqslant 1$ 的分支。这样，我们由条件 (4) 不难得到 $1\leqslant\delta_G(S\cup\{a\},T)=\left[\sum\limits_{s\in S}f(s)+1\right]-\sum\limits_{t\in T}g(t)+\left[\sum\limits_{t\in T}d_{G-S}(t)-e_G(\{a\},T)\right]-h_G(S\cup\{a\},T)\leqslant \delta_G(S,T)+1-1=\delta_G(S,T)$。假设 $G-(S\cup T)$ 有 $(g,f)$-关键割边 $e=ab$。则按定义可知 $g(a)=f(a)=1$ 及 $g(b)=f(b)=1$。既然 $G[S\cup\{a,b\}]$ 含有边 $e$，我们仍由条件 (4) 不难得到 $2\leqslant\delta_G(S\cup\{a,b\},T)=\left[\sum\limits_{s\in S}f(s)+2\right]-\sum\limits_{t\in T}g(t)+\left[\sum\limits_{t\in T}\cdot d_{G-S}(t)-e_G(\{a,b\},T)\right]-h_G(S\cup\{a,b\},T)\leqslant\delta_G(S,T)+2-2=\delta_G(S,T)$。类似地，若 $G-(S\cup T)$ 含有 $(g,f)$-偶分支 $C$ 使得 $e_G(V(C),S)\geqslant 1$，则应用条件 (4) 我们同样可得 $\delta_G(S,T)\geqslant 2$。对于其余情况，则显然 $\varepsilon_1(S,T)=\varepsilon_3(S,T)$。故条件(4)隐含条件 (3)。证毕。

设 $G$ 为一个图。我们用 $I(G)$ 表示 $G$ 的孤立点集，并记 $i(G)=|I(G)|$。若 $f,g$: $V(G)\to\mathbf{Z}$ 使得 $0\leqslant g\leqslant 1\leqslant f$，则我们记

$\zeta(G)=\#\{C|C$ 为 $G$ 的分支满足或 $C=\{x\}$ 且 $g(x)=1$，或 $|V(C)|$ 为奇数 $\geqslant 3$ 且对所有 $x\in V(C)$ 有 $g(x)=f(x)=1\}$。

**推论 3.3**[4]. 设 $G$ 为连通图，且 $f, g: V(G)\to \mathbf{Z}$ 使得对所有 $x\in V(G)$ 均有 $0\leqslant g(x)\leqslant 1\leqslant f(x)$. 则 $G$ 具有包含一条任意给定边的 $(g,f)$-因子当且仅当

$$\text{任给 } S\subseteq V(G)\text{，有 } \sum_{x\in S} f(x)\geqslant \zeta(G-S)+\varepsilon_4(S). \tag{5}$$

其中

$$\varepsilon_4(S)=\begin{cases}2\text{，如果 } G[S] \text{ 含有边；}\\ 1\text{，如果 } G-S \text{ 含有孤立点 } v \text{ 使得 } g(v)=0\text{，}\\ \quad\text{或 } G-S \text{ 含有非孤立点 } v \text{ 使得 } f(v)\geqslant 2\text{；}\\ 0\text{，否则.}\end{cases}$$

证. 由引理 3.2 知，只需证得当 $G$ 为连通图时条件 (4) 等价于条件 (5).

假定条件 (4) 成立. 任给 $S\subseteq V(G)$. 令 $T=\{t\in I(G-S)\mid g(t)=1<f(t)\}$. 则易知，$h_G(S,T)+\sum_{t\in T} g(t)=h_G(S,T)+|T|=\zeta(G-S)$，且 $\sum_{t\in T} d_{G-S}(t)=0$. 这样，

$$\sum_{s\in S} f(s)-\zeta(G-S)=\delta_G(S,T).$$

由 $G$ 的连通性易知 $\varepsilon_3(S,T)\geqslant\varepsilon_4(S)$. 故条件 (4) 隐含条件 (5).

反之，假定条件 (5) 成立. 任给 $S, T\subseteq V(G)$ 使得 $S\cap T=\phi$. 我们记 $Q=\{C\mid C$ 为 $G-(S\cup T)$ 的 $(g,f)$-奇分支$\}$. 设 $\tau\in T$. 我们令 $\mu(\tau)=\#\{C\mid C\in Q$ 且 $e_G(\{\tau\},V(C))\geqslant 1\}$. 易看出，$\varepsilon_3(S,T\backslash\{\tau\})\geqslant\varepsilon_3(S,T)$. 这样，

$$\begin{aligned}\Delta_1(\tau):&=[\delta_G(S,T)-\varepsilon_3(S,T)]-[\delta_G(S,T\backslash\{\tau\})-\varepsilon_3(S,T\backslash\{\tau\})]\\ &\geqslant\delta_G(S,T)-\delta_G(S,T\backslash\{\tau\})\geqslant -g(\tau)+d_{G-S}(\tau)-\mu(\tau).\end{aligned}$$

若 $g(\tau)=0$，或 $N_G(\tau)\not\subseteq\bigcup_{C\in Q}V(C)\cup S$，或存在 $C\in Q$ 使 $e_G(\{\tau\},V(C))\geqslant 2$，则易得 $\Delta_1(\tau)\geqslant 0$. 令 $S'=S$，$T'=T\backslash\{\tau\in T\mid\Delta_1(\tau)\geqslant 0\}$. 则对所有 $t\in T'$ 均有 $g(t)=1$，$N_G(t)\subseteq\bigcup_{C\in Q}V(C)\cup S'$，且对所有 $C\in Q$ 均有 $e_G(\{t\},V(C))\leqslant 1$. 并且

$$\delta_G(S,T)-\varepsilon_3(S,T)\geqslant\delta_G(S',T')-\varepsilon_3(S',T'). \tag{6}$$

假设 $C\in Q$ 及 $u\in V(C)$ 使得 $e_G(\{u\},T')\geqslant 1$. 则易知 $\varepsilon_3(S'\cup\{u\},T')\geqslant\delta_3(S',T')$，从而不难得到

$$\begin{aligned}\Delta_2(u):&=[\delta_G(S',T')-\varepsilon_3(S',T')]-[\delta_G(S'\cup\{u\},T')-\varepsilon_3(S'\cup\{u\},T')]\\ &\geqslant\delta_G(S',T')-\delta_G(S'\cup\{u\},T')\\ &=-1+e_G(\{u\},T')+[h_G(S'\cup\{u\},T')-h_G(S',T')]\geqslant 0.\end{aligned}$$

令

$$S^*=S'\cup\left\{u\in\bigcup_{C\in Q}V(C)\,\middle|\,e_G(\{u\},T')\geqslant 1\right\}\text{ 及 } T^*=T'.$$

则

$$\delta_G(S',T')-\varepsilon_3(S',T')\geqslant\delta_G(S^*,T^*)-\varepsilon_3(S^*,T^*). \tag{7}$$

我们现在要证

$$\delta_G(S^*,T^*)\geqslant\varepsilon_3(S^*,T^*). \tag{8}$$

注意到 $T^*\subseteq I(G-S^*)$，且对所有 $t\in T^*$ 均有 $g(t)=1$，则我们得到 $\sum_{t\in T^*} d_{G-S^*}(t)=$

0，$h_G(S^*, T^*) + \sum_{t \in T^*} g(t) = h_G(S^*, T^*) + |T^*| = \zeta(G - S^*) - \eta$，其中 $\eta$ 表示 $G-(S^* \cup T^*)$ 中所有满足 $g(a) = 1 < f(a)$ 的孤立点 $a$ 的数目．这样，我们有

$$\delta_G(S^*, T^*) = \sum_{s \in S^*} f(s) - \zeta(G - S) + \eta. \tag{9}$$

假设 $G-(S^* \cup T^*)$ 含有非孤立点分支 $C$ 使得 $\sum_{x \in V(C)} g(x) < \sum_{x \in V(C)} f(x)$ 及 $e_G(V(C), S^*) \geqslant 1$，且 $\forall x \in V(G)$ 均有 $f(x) = 1$．我们设 $e = ab \in E_G(V(C), S^*)$，其中 $a \in V(C)$ 及 $b \in S^*$．易知 $\zeta(G-(S^* \cup \{a\})) \geqslant \zeta(G - S^*)$．既然 $G[S^* \cup \{a\}]$ 含有边 $e$，我们由条件(5)及(9)式得到 $2 \leqslant \sum_{x \in S \cup \{a\}^*} f(x) - \zeta(G-(S^* \cup \{a\})) \leqslant \sum_{x \in S^*} f(x) + 1 - \zeta(G - S^*) \leqslant \delta_G(S^*, T^*) + 1$．即有 $\delta_G(S^*, T^*) \geqslant 1$．对于其它情形，我们易验证 $\varepsilon_4(S^*) + \eta \geqslant \varepsilon_3(S^*, T^*)$．从而由(9)式及条件(5)得到(8)式．故由(6)、(7)及(8)式知条件(5)也隐含条件(4)．证毕．

注意当 $g = 1$ 且 $f \geqslant 2$ 时推论 3.3 的条件可以简化(参见[5])．而且，由推论 3.3 我们易导出下面的推论．

**推论 3.4**[6]．图 $G$ 的每条边包含在一个 1-因子中当且仅当任给 $S \subseteq V(G)$ 有 $o(G-S) \leqslant |S|$，并且 $o(G-S) = |S|$ 隐含 $S$ 为 $G$ 的独立集．

致谢：本文得到谢力同先生及刘家壮先生的热情指导，王涛同志也提供了有益的建议．特此鸣谢．

## 参 考 文 献

[1] Akiyama, J. and M. Kano, Factors and factorizaions of graphs——A survey, *J. Graph Theory*, 9(1985), 1—42.
[2] Folkman J. and D. R. Fulkerson, Flows in infinite graphs, *J. Combin. Theory*, 8(1970), 30—44.
[3] Lovász, L., Subgraphs with prescribed valencies, *J. Combin. Theory*, 8(1970), 391—416.
[4] Las Vergnas, M., An extension of Tutte's 1-factor theorem, *Discrete Math.*, 23(1978), 241—255.
[5] Berge C. and M. Las Vergnas, On the existence of subgraphs with degree constrains, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wet.*, A81(1978), 165—176.
[6] Little, C. H. C., D. D. Grant and D. A. Holton, On defect-d matchings in graphs, *Discrete Math.*, 13(1975) 41—54.
[7] 陈赐平，f- 因子覆盖的图，数学物理学报(待发)．

# (g, f)-FACTORS WITH GIVEN PROPERTIES

Chen Ci-Ping
*(Beijing Agricultural Engineering University)*

## ABSTRACT

Let $G$ be a graph, and $f$ and $g$ be integer valued functions defined on $V(G)$ such that $g(x) \leqslant f(x)$ and $f(x) \geqslant 1$ for all $x \in V(G)$. Here we give a necessary and sufficient condition for $G$ to have a $(g, f)$-factor that contains an arbitrarily given edge, which generalizes some results of Las Vergnas and others.