系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(2) (2005, 4), 170–178

紧支撑 Weyl-Heisenberg 框架的摄动*

周 家 云

(曲阜师范大学数学系， 山东曲阜 273165)

摘要 本文研究了 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上具有紧支撑的 Weyl-Heisenberg 框架分别对窗口函数、平移指标、旋转指标以及多项混合摄动的稳定性.

关键词 Weyl-Heisenberg 框架，紧支撑，摄动.

MR(2000) 主题分类号 41A30, 42C15

1 引 言

文献 [1] 和 [2] 运用一般框架的一个摄动定理 (设 H 是 Hilbert 空间，$\{f_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 H 的以 A, B 为界的框架，$\{g_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \subseteq H$ 满足 $\{f_n - g_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是以 M 为界的 Bessel 序列, 其中 $M < A$, 那么 $\{g_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 H 的以 $A[1-(\frac{M}{A})^{\frac{1}{2}}]^2$, $B[1+(\frac{M}{A})^{\frac{1}{2}}]^2$ 为界的框架) 研究了 Weyl-Heisenberg 框架的摄动. 本文从另一个角度来研究具有紧支撑的 Weyl-Heisenberg 框架的摄动，主要运用 [3] 中的定理 4.1.2, 定理 4.1.4, [4] 中的定理 1, [5] 中的 kadec's-$\frac{1}{4}$ 定理和本文中的引理 3.2, 分别对窗口函数、平移指标、旋转指标以及多项混合摄动时 Weyl-Heisenberg 框架的稳定性进行了讨论.

2 预备知识

本文中以 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}$ 分别表示整数集和实数集， J 表示一般的可数集， H 表示复的无限维的可分的 Hilbert 空间，其上的内积是 $\langle , \rangle$.

定义 2.1 设 $\{x_n\}_{n\in J} \subseteq H$, 如果存在 $M > 0$, 使 $\forall x \in H$, 有

$$\sum_{n\in J} |\langle x, x_n\rangle|^2 \le M\|x\|^2,$$

那么称 $\{x_n\}_{n\in J}$ 是 H 上的 Bessel 序列， M 为其 Bessel 界.

定义 2.2 设 $\{x_n\}_{n\in J} \subseteq H$, 如果存在 $A, B > 0$, 使 $\forall x \in H$, 有

$$A\|x\|^2 \le \sum_{n\in J} |\langle x, x_n\rangle|^2 \le B\|x\|^2,$$

* 国家自然科学基金 (19871048) 资助课题.
收稿日期：2002-11-25.

那么称 $\{x_n\}_{n\in J}$ 是 H 的框架，称 B, A 分别为其框架上、下界．当 $A=B$ 时，称 $\{x_n\}_{n\in J}$ 是 H 的严格框架；当 $A=B=1$ 时，称 $\{x_n\}_{n\in J}$ 是 H 的正规框架．

定义 2.3 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, 令 $g_{mn}(x)=\mathrm{e}^{2\pi imbx}g(x-na)$, $m,n\in\boldsymbol{Z}$. 如果 $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架，那么称 $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 Weyl-Heisenberg 框架，称 g 是窗口函数，a 和 b 分别称为平移参数和旋转参数．如果 g 的支集 supp$g$ 是紧的，那么称 $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是具有紧支撑的 Weyl-Heisenberg 框架．

本文用到三个算子． $b\in\boldsymbol{R}$, $a\in\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$, 令

$$\begin{aligned} T_b:\quad & L^2(\boldsymbol{R})\to L^2(\boldsymbol{R}) \\ & g\mapsto T_bg, \end{aligned}$$

其中 $T_bg(x)=g(x-b)$, $x\in\boldsymbol{R}$.

$$\begin{aligned} E_b:\quad & L^2(\boldsymbol{R})\to L^2(\boldsymbol{R}) \\ & g\mapsto E_bg, \end{aligned}$$

其中 $E_bg(x)=\mathrm{e}^{2\pi ibx}g(x)$, $x\in\boldsymbol{R}$.

$$\begin{aligned} D_a:\quad & L^2(\boldsymbol{R})\to L^2(\boldsymbol{R}) \\ & g\mapsto D_ag, \end{aligned}$$

其中 $D_ag(x)=|a|^{-\frac{1}{2}}g(\frac{x}{a})$, $x\in\boldsymbol{R}$.

分别称 T_b, E_b 和 D_a 为平移算子、旋转算子和膨胀算子．易知它们都是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上的酉算子，并且 $\forall f,g\in L^2(\boldsymbol{R})$, 有

$$\langle f,T_bg\rangle=\langle T_{-b}f,g\rangle, \langle f,E_bg\rangle=\langle E_{-b}f,g\rangle, \langle f,D_ag\rangle=\langle D_{\frac{1}{a}}f,g\rangle,$$

$$\widehat{T_bf}=E_{-b}\widehat{f}, \widehat{E_bf}=T_b\widehat{f}, \widehat{D_af}=D_{\frac{1}{a}}\widehat{f},$$

其中 $\widehat{g}$ 是 g 的 Fourier 变换

$$\widehat{g}(x)=\int_{\boldsymbol{R}}g(y)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y=\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}g(y)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y,$$

即 $\|\widehat{g}-C_r\|_2\to 0$ $(r\to\infty)$, 这里

$$C_r(x)=\int_{-r}^{r}g(y)\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\mathrm{d}y.$$

易知 $L^2(\boldsymbol{R})$ 上的 Fourier 变换是酉算子．

本文用到的记号如下． $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\lambda_n\in\boldsymbol{R}$, $\beta_n\in\boldsymbol{R}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

$$g_{mn}(x)=E_{mb}T_{na}g(x)=\mathrm{e}^{2\pi imbx}g(x-na),\quad x\in\boldsymbol{R},$$

$$g_{mn}^{(p)}(x)=E_{mb}T_{\lambda_na}g(x)=\mathrm{e}^{2\pi imbx}g(x-\lambda_na),\quad x\in\boldsymbol{R},$$

$$g_{mn}^{(q)}(x)=E_{\beta_mb}T_{na}g(x)=\mathrm{e}^{2\pi i\beta_mbx}g(x-na),\quad x\in\boldsymbol{R},$$

$$g_{mn}^{(p,q)}(x)=E_{\beta_mb}T_{\lambda_na}g(x)=\mathrm{e}^{2\pi i\beta_mbx}g(x-\lambda_na),\quad x\in\boldsymbol{R},$$

$$G_0(x)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}|T_{na}g(x)|^2=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}|g(x-na)|^2,\quad x\in\boldsymbol{R},$$
$$G_0^{(p)}(x)=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}|T_{\lambda_n a}g(x)|^2=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}|g(x-\lambda_n a)|^2,\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

以上内容在文献 [6, 7] 中可以查到.

命题 2.1([3] 定理 4.1.4) 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, 如果 $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架, 那么

$$bA\le G_0(x)\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

特别的有 $g\in L^\infty(\boldsymbol{R})$.

命题 2.2([3] 定理 4.1.2) 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[\alpha,\alpha+\frac{1}{b}]$, α 是实数, 如果存在 $A,B>0$, 使

$$bA\le G_0(x)\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R},$$

那么 $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架.

命题 2.3([4] 定理 1) 设 $\lambda_n\in\boldsymbol{R},n\in\boldsymbol{Z}$, 如果 $\exists L,l>0$, 使

$$|\lambda_n-n|\le L,|\lambda_n-\lambda_m|\ge l,\quad m\ne n,m,n\in\boldsymbol{Z},$$

那么 $\{\mathrm{e}^{i\lambda_n x}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2[-r,r]$ 的框架, 其中 $0<r<\pi$.

由此即知, 如果 $\{\lambda_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 满足命题 2.3 的条件, 那么 $\{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda_n bx}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2[-r,r]$ 的框架, 其中 $b>0,0<r<\frac{1}{2b}$.

命题 2.4([5]kadec's-$\frac{1}{4}$ 定理) 设 $\lambda_n\in\boldsymbol{R},n\in\boldsymbol{Z}$, 如果 $|\lambda_n-n|\le L<\frac{1}{4},n\in\boldsymbol{Z}$, 那么 $\{\mathrm{e}^{i\lambda_n x}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的 Riesz 基.

由定理的证明可知, 如果 $\{\lambda_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 满足命题 2.4 的条件, 那么 $\{\mathrm{e}^{i\lambda_n x}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(I_r)$ 的 Riesz 基, 其中 $I_r=[r\pi,(r+2)\pi],r$ 是整数. 由此即知, $\{\mathrm{e}^{2\pi i\lambda_n bx}\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2[\frac{r}{2b},\frac{r+2}{2b}]$ 的 Riesz 基, 其中 $b>0,r$ 是整数.

3 主要结果

定理 3.1 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[\alpha,\alpha+\frac{1}{b}]$, α 是实数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $h\in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足: $\mathrm{supp}h\subseteq I$, 并且 $\exists\lambda_1\in[0,1)$, $\lambda_2\in[0,1)$, 使

$$|g(x)-h(x)|^2\le\lambda_1|g(x)|^2+\lambda_2|h(x)|^2,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R},$$

那么 $\{h_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}})^2A$, $(\frac{1+\sqrt{\lambda_1}}{1-\sqrt{\lambda_2}})^2B$ 为界的框架.

证 由条件 (1) 及命题 2.1 知

$$bA\le\sum_n|g(x-na)|^2\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

由

$$\Big(\sum_n|h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le\Big(\sum_n|g(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_n|g(x-na)-h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (bB)^{\frac{1}{2}} + \Big(\lambda_1 \sum_n |g(x-na)|^2 + \lambda_2 \sum_n |h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (bB)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lambda_1}\Big(\sum_n |g(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lambda_2}\Big(\sum_n |h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\le (1+\sqrt{\lambda_1})(bB)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\lambda_2}\Big(\sum_n |h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

知

$$
\sum_n |h(x-na)|^2 \le \Big(\frac{1+\sqrt{\lambda_1}}{1-\sqrt{\lambda_2}}\Big)^2 bB, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R}.
$$

再由

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_n |h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\ge \Big(\sum_n |g(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} - \Big(\sum_n |g(x-na)-h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\ge (1-\sqrt{\lambda_1})(bA)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\lambda_2}\Big(\sum_n |h(x-na)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

知

$$
\sum_n |h(x-na)|^2 \ge \Big(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}}\Big)^2 bA, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R}.
$$

由命题 2.2 知，$\{h_{mn}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}})^2 A$, $(\frac{1+\sqrt{\lambda_1}}{1-\sqrt{\lambda_2}})^2 B$ 为界的框架.

引理 3.2　设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp} g \subseteq I$, 其中 $I = [\alpha, \alpha + \frac{1}{b}]$, α 是实数，$g \in L^\infty(\boldsymbol{R})$, 那么

(1) $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架 $\Leftrightarrow bA \le G_0^{(p)}(x) \le bB$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$;

(2) $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A 为界的严格框架 $\Leftrightarrow G_0^{(p)}(x) = bA$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$;

(3) $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的正规框架 $\Leftrightarrow G_0^{(p)}(x) = b$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$.

证　(1) 对任意的 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 设 $I_n = [\alpha + \lambda_n a, \alpha + \lambda_n a + \frac{1}{b}]$. 易知 $\mathrm{supp}(f \cdot \overline{T_{\lambda_n a} g}) \subseteq I_n$, 再由 $g \in L^\infty(\boldsymbol{R})$ 知，$f \cdot \overline{T_{\lambda_n a} g} \in L^2(I_n)$. 令 $e_{mb}(x) = \mathrm{e}^{2\pi i m b x}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, 那么 $\{b^{\frac{1}{2}} e_{mb}\}_{m\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(I_n)$ 的就范正交基，因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{m,n} |\langle f, g_{m,n}^{(p)}\rangle|^2 &= \sum_{m,n} |\langle f, E_{mb} T_{\lambda_n a} g\rangle|^2 \\
&= \sum_{m,n} b^{-1} |\langle f \cdot \overline{T_{\lambda_n a} g}, b^{\frac{1}{2}} e_{mb}\rangle|^2 \\
&= b^{-1} \sum_n \|f \cdot \overline{T_{\lambda_n a} g}\|^2_{L^2(I_n)} \\
&= b^{-1} \sum_n \int_{I_n} |f(x)|^2 |g(x-\lambda_n a)|^2 \mathrm{d}x \\
&= b^{-1} \sum_n \int_{\boldsymbol{R}} |f(x)|^2 |g(x-\lambda_n a)|^2 \mathrm{d}x. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

($\Rightarrow$)

由 $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架知，对任意 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$, 有

$$A\|f\|^2\le\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}^{(p)}\rangle|^2\le B\|f\|^2,$$

再由 (*) 式及 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$ 的任意性知 $bA\le G_0^{(p)}(x)\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}$.

($\Leftarrow$)

由 $bA\le G_0^{(p)}(x)\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}$ 及 (*) 式知，对任意 $f\in L^2(\boldsymbol{R})$, 有

$$A\|f\|^2\le\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}^{(p)}\rangle|^2=b^{-1}\int_{\boldsymbol{R}}|f(x)|^2G_0^{(p)}(x)\mathrm{d}x\le B\|f\|^2,$$

即 $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架.

(2), (3) 类似 (1) 证明.

定理 3.3 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[\alpha,\alpha+\frac{1}{b}]$, α 是实数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $\exists c>0$, $\beta>0$, 使 $\forall z\in\boldsymbol{R}$, 有 $|g(x+z)-g(x)|\le c|z|^\beta,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}$,

(3) $\lambda_n\in\boldsymbol{R}$, $n\in\boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta=\sum_n|\lambda_n-n|^{2\beta}<\infty$,

(4) $bA>c^2\delta a^{2\beta}$.

那么 $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $(\sqrt{A}-ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$, $(\sqrt{B}+ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$ 为界的框架.

证 由条件 (1) 知， $g\in L^\infty(\boldsymbol{R})$, 且

$$bA\le G_0(x)\le bB,\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

再由条件 (2), (3) 知,

$$\sum_n|g(x-na)-g(x-\lambda_na)|^2\le\sum_n c^2|\lambda_na-na)|^{2\beta}=c^2\delta a^{2\beta},\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R}.$$

故

$$\begin{aligned}G_0^{(p)}(x)^{\frac12}&\le G_0(x)^{\frac12}+\Big(\sum_n|g(x-na)-g(x-\lambda_na)|^2\Big)^{\frac12}\\&\le(bB)^{\frac12}+ca^\beta\sqrt{\delta},\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_0^{(p)}(x)^{\frac12}&\ge G_0(x)^{\frac12}-\Big(\sum_n|g(x-na)-g(x-\lambda_na)|^2\Big)^{\frac12}\\&\ge(bA)^{\frac12}-ca^\beta\sqrt{\delta},\quad \text{a.e.}\quad x\in\boldsymbol{R},\end{aligned}$$

即 $b(\sqrt{A}-ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2\le G_0^{(p)}(x)\le b(\sqrt{B}+ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$ a. e. $x\in\boldsymbol{R}$. 由引理 3.2 知， $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $(\sqrt{A}-ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$, $(\sqrt{B}+ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$ 为界的框架.

定理 3.4 设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[-r,r]$, $0<r<\frac{1}{2b}$. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $\beta_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L, l > 0$, 使 $|\beta_n - n| \le L$, $|\beta_n - \beta_m| \ge l$, $n \ne m$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$,
那么 $\{g_{mn}^{(q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证 由条件 (1) 及命题 2.1 知， $g \in L^\infty(\boldsymbol{R})$, 且

$$bA \le G_0(x) \le bB, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

再由命题 2.3 知， $\{\mathrm{e}^{2\pi i\beta_m bx}\}_{m\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(I)$ 的框架，设界为 C, D. 令

$$e_m(x) = \mathrm{e}^{2\pi i\beta_m bx}, x \in \boldsymbol{R}, m \in \boldsymbol{Z}.$$

对任意 $f \in L^2(\boldsymbol{R})$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 易知 $\mathrm{supp}(\overline{g}\cdot T_{-na}f) \subseteq I$, 且 $\overline{g}\cdot T_{-na}f \in L^2(I)$, 故

$$\begin{aligned}\sum_m |\langle f, g_{m,n}^{(q)}\rangle|^2 &= \sum_m |\langle f, E_{\beta_m b}T_{na}g\rangle|^2 \\ &= \sum_m |\langle \overline{g}\cdot T_{-na}f, e_m\rangle|^2,\end{aligned}$$

因此

$$C\|\overline{g}\cdot T_{-na}f\|_{L^2(I)}^2 \le \sum_m |\langle f, g_{m,n}^{(q)}\rangle|^2 \le D\|\overline{g}\cdot T_{-na}f\|_{L^2(I)}^2.$$

又

$$\begin{aligned}\|\overline{g}\cdot T_{-na}f\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I |\overline{g}(x)\cdot T_{-na}f(x)|^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} |f(x+na)|^2|g(x)|^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{\boldsymbol{R}} |f(x)|^2|g(x-na)|^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因此

$$\sum_n \|\overline{g}\cdot T_{-na}f\|_{L^2(I)}^2 = \sum_n \int_{\boldsymbol{R}} |f(x)|^2|g(x-na)|^2\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}} |f(x)|^2 G_0(x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$bAC\|f\|^2 \le \sum_{m,n} |\langle f, g_{m,n}^{(q)}\rangle|^2 \le bBD\|f\|^2,$$

即 $\{g_{mn}^{(q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

定理 3.5 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp}g \subseteq I$, 其中 $I = [\frac{r}{2b}, \frac{r+2}{2b}]$, r 是整数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $\beta_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L > 0$, 使 $|\beta_n - n| \le L < \frac{1}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$,
那么 $\{g_{mn}^{(q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证 利用命题 2.4, 证明类似定理 3.4.

推论 3.6 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp}g \subseteq I$, 其中 $I = [-r, r]$, $0 < r < \frac{1}{2b}$. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $\exists c > 0$, $\beta > 0$, 使 $\forall z \in \boldsymbol{R}$, 有 $|g(x+z) - g(x)| \le c|z|^\beta$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$,

(3) $\lambda_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta = \sum_n |\lambda_n - n|^{2\beta} < \infty$,

(4) $bA > c^2\delta a^{2\beta}$,

(5) $\beta_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L, l > 0$, 使 $|\beta_n - n| \le L$, $|\beta_n - \beta_m| \ge l$, $n \ne m$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{g_{mn}^{(p,q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证 由条件 (1)–(4) 及定理 3.3 知, $\{g_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $\big(\sqrt{A} - ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}}\big)^2$, $\big(\sqrt{B} + ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}}\big)^2$ 为界的框架, 并且 $g \in L^\infty(\boldsymbol{R})$. 再由引理 3.2 知,

$$b\Big(\sqrt{A} - ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}}\Big)^2 \le G_0^{(p)}(x) \le b\Big(\sqrt{B} + ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}}\Big)^2, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

其余可类似于定理 3.4 的证明知 $\{g_{mn}^{(p,q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

类似于推论 3.6, 可以证明

推论 3.7 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp} g \subseteq I$, 其中 $I = [\frac{r}{2b}, \frac{r+2}{2b}]$, r 为整数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $\exists c > 0$, $\beta > 0$, 使 $\forall z \in \boldsymbol{R}$, 有 $|g(x+z) - g(x)| \le c|z|^\beta$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$,

(3) $\lambda_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta = \sum\limits_n |\lambda_n - n|^{2\beta} < \infty$,

(4) $bA > c^2\delta a^{2\beta}$,

(5) $\beta_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L > 0$, 使 $|\beta_n - n| \le L < \frac{1}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{g_{mn}^{(p,q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

推论 3.8 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp} g \subseteq I$, 其中 $I = [\alpha, \alpha + \frac{1}{b}]$, α 是实数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架,

(2) $h \in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足:

1° $\mathrm{supp} h \subseteq I$, 且 $\exists \lambda_1 \in [0,1)$, $\lambda_2 \in [0,1)$, 使

$$|g(x) - h(x)|^2 \le \lambda_1|g(x)|^2 + \lambda_2|h(x)|^2, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R},$$

2° $\exists c > 0$, $\beta > 0$, 使 $\forall z \in \boldsymbol{R}$, 有 $|h(x+z) - h(x)| \le c|z|^\beta$, a.e. $x \in \boldsymbol{R}$,

(3) $\lambda_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta = \sum\limits_n |\lambda_n - n|^{2\beta} < \infty$,

(4) $b(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}})^2 A > c^2\delta a^{2\beta}$,

那么 $\{h_{mn}^{(p)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 $(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{A} - ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$, $(\frac{1+\sqrt{\lambda_1}}{1-\sqrt{\lambda_2}}\sqrt{B} + ca^\beta\sqrt{\frac{\delta}{b}})^2$ 为界的框架.

证 由定理 3.1 和定理 3.3 即知.

推论 3.9 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp} g \subseteq I$, 其中 $I = [-r, r]$, $0 < r < \frac{1}{2b}$. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架,

(2) $h \in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足 $\mathrm{supp} h \subseteq I$, 且 $\exists \lambda_1 \in [0,1)$, $\lambda_2 \in [0,1)$, 使

$$|g(x) - h(x)|^2 \le \lambda_1|g(x)|^2 + \lambda_2|h(x)|^2, \quad \text{a.e.} \quad x \in \boldsymbol{R},$$

(3) $\beta_n \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L, l > 0$, 使 $|\beta_n - n| \le L$, $|\beta_n - \beta_m| \ge l$, $n \ne m$, $m, n \in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{h_{mn}^{(q)}\}_{m,n\in\boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证 由定理 3.1 和定理 3.4 即知.

推论 3.10 设 $g \in L^2(\boldsymbol{R})$, $a, b > 0$, $\mathrm{supp} g \subseteq I$, 其中 $I = [\frac{r}{2b}, \frac{r+2}{2b}]$, r 为整数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架，

(2) $h\in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足 $\mathrm{supp}h\subseteq I$, 且 $\exists\lambda_1\in[0,1)$, $\lambda_2\in[0,1)$, 使

$$|g(x)-h(x)|^2\le \lambda_1|g(x)|^2+\lambda_2|h(x)|^2,\quad \text{a.e.}\quad x\in \boldsymbol{R},$$

(3) $\beta_n\in \boldsymbol{R}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L>0$, 使 $|\beta_n-n|\le L<\frac{1}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{h_{mn}^{(q)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证　由定理 3.1 和定理 3.5 即知.

推论 3.11　设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[-r,r]$, $0<r<\frac{1}{2b}$. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架，

(2) $h\in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足

1° $\mathrm{supp}h\subseteq I$, 且 $\exists\lambda_1\in[0,1)$, $\lambda_2\in[0,1)$, 使

$$|g(x)-h(x)|^2\le \lambda_1|g(x)|^2+\lambda_2|h(x)|^2,\quad \text{a.e.}\quad x\in \boldsymbol{R},$$

2° $\exists c>0$, $\beta>0$, 使 $\forall z\in \boldsymbol{R}$, 有

$$|h(x+z)-h(x)|\le c|z|^{\beta},\quad \text{a.e.}\quad x\in \boldsymbol{R},$$

(3) $\lambda_n\in \boldsymbol{R}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta=\sum\limits_n|\lambda_n-n|^{2\beta}<\infty$,

(4) $b(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}})^2A>c^2\delta a^{2\beta}$,

(5) $\beta_n\in \boldsymbol{R}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L,l>0$, 使 $|\beta_n-n|\le L$, $|\beta_n-\beta_m|\ge l$, $n\ne m$, $m,n\in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{h_{mn}^{(p,q)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

证明类似于推论 3.6.

同样可以证明

推论 3.12　设 $g\in L^2(\boldsymbol{R})$, $a,b>0$, $\mathrm{supp}g\subseteq I$, 其中 $I=[\frac{r}{2b},\frac{r+2}{2b}]$, r 为整数. 如果

(1) $\{g_{mn}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的以 A, B 为界的框架，

(2) $h\in L^2(\boldsymbol{R})$, 满足

1° $\mathrm{supp}h\subseteq I$, 且 $\exists\lambda_1\in[0,1)$, $\lambda_2\in[0,1)$, 使

$$|g(x)-h(x)|^2\le \lambda_1|g(x)|^2+\lambda_2|h(x)|^2,\quad \text{a.e.}\quad x\in \boldsymbol{R},$$

2° $\exists c>0$, $\beta>0$, 使 $\forall z\in \boldsymbol{R}$, 有

$$|h(x+z)-h(x)|\le c|z|^{\beta},\quad \text{a.e.}\quad x\in \boldsymbol{R},$$

(3) $\lambda_n\in \boldsymbol{R}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\delta=\sum\limits_n|\lambda_n-n|^{2\beta}<\infty$,

(4) $b(\frac{1-\sqrt{\lambda_1}}{1+\sqrt{\lambda_2}})^2A>c^2\delta a^{2\beta}$,

(5) $\beta_n\in \boldsymbol{R}$, $n\in \boldsymbol{Z}$, 满足 $\exists L>0$, 使 $|\beta_n-n|\le L<\frac{1}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$,

那么 $\{h_{mn}^{(p,q)}\}_{m,n\in \boldsymbol{Z}}$ 是 $L^2(\boldsymbol{R})$ 的框架.

参 考 文 献

[1] Favier S J and Zalik R A. On the stability of frames and Risez bases. *Appl. Comp. Anal.* , 1995, **2**: 160–173.
[2] Zhang Jing. On the stability of Wavelet and Gabor frames (Riesz bases). *J. Fourier Anal. and Appl.*, 1999, **5**(1): 105–125.
[3] Heil C E and Walnut D F. Continuous and discrete wavelet transforms. *SIAM Review*, 1989, **31**(4): 628–666.
[4] Duffin R J and Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier Series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1952, **72**: 341–366.
[5] Young R M. An introduction to nonharmonic Fourier Series. Academic Press, New York, 1980, 42–44.
[6] Casazza P G. The art of frame theory. *Taiwanese J. Math.*, 2000, **4(2)**: 129–201.
[7] Deguang Han and Larson D R. Frames, bases and group representations. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 2000, 697.

PERTURBATION OF WEYL-HEISENBERG FRAMES WITH COMPACT SUPPORT

Zhou Jiayun

(*Department of Mathematics, Qufu Normal University, Shandong ,Qufu* 273165)

Abstract This paper studies the stability of Weyl-Heisenberg frames for $L^2(\boldsymbol{R})$ with compact support with respect to perturbation of window function, shift parameter, modulation parameter and their combination.

Key words Weyl-Heisenberg frame, compact support, perturbation.