系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
14(4) (1994), 365—368

关于 (f,g)-因子定理的注记*

蔡 茂 诚
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080)

我们只考虑有限的一般图,允许多重边和自环.一般图记作 $G=(V,E)$,其中 $V(G)$ 是点集合,而 $E(G)$ 是边集合. 对于任意点 $v\in V(G)$,用 $d_G(v)$ 记点 v 的度,即 G 中关联于 v 的边数,自环要计算两次. 对于任意点子集 $X\subseteq V(G)$, $G-X$ 表示从 G 中去掉 X 的所有点及其关联边所得到的子图,记 $G[X]=G-(V(G)-X)$. 若 X 和 Y 是 $V(G)$ 的不相交子集,则用 $\lambda_G(X,Y)$ 记 X 与 Y 之间的连边数.

Z^+ 记非负整数集合. f: $V(G)\to Z^+$ 记定义在 $V(G)$ 上的非负整函数 f. 设 $U\subseteq V(G)$,我们写成 $f(U)=\sum_{u\in U}f(u)$,且置 $f(\phi)=0$. 特别注意,依照我们的记号 $d_G(U)=\sum_{u\in U}d_G(u)$. 对于任意实数 x,我们用 $\lfloor x\rfloor$ 表示其整数部分.

给定函数 $f,g:V(G)\to Z^+$,图 $G=(V,E)$ 的 (f,g)-因子定义为 G 的满足下述条件的支撑子图 F:

$$\forall v\in V(G),\ g(v)\leqslant d_F(v)\leqslant f(v).$$

而 (f,f)-因子则简称为 f-因子.

令 $\mathscr{B}(G)$ 记 $V(G)$ 的所有满足条件 $X\cap Y=\varnothing$ 的有序子集偶 (X, Y) 所成的族. 设 $B=(X,Y)\in\mathscr{B}(G)$, $W\subseteq V(G)$ 且 $W\cap(X\cup Y)=\varnothing$,我们记

$$J_G(W,f,B)=f(W)+\lambda_G(W,Y).$$

Lovász 于1972年给出下面著名的一般因子定理.

奇偶(f,g)-因子定理[4]. 设 $G=(V,E)$是一般图,$P\subseteq V(G)$.并设函数 $f,g:V(G)\to Z^+$ 满足条件: $\forall v\in V(G)$, $f(v)\geqslant g(v)$; $\forall v\in P$, $f(v)\equiv g(v)\pmod 2$. 那么G有 (f,g)-因子 F,满足条件: $\forall v\in P$, $d_F(v)\equiv f(v)\pmod 2$ (称F为关于 (f,P)同余的 (f,g)-因子),其充要条件是:

$$\forall B\in\mathscr{B}(G),\ h_G(B;f,g,P)-f(X)-d_G(Y)+g(Y)+\lambda_G(X,Y)\leqslant 0. \quad (1)$$

其中 $h_G(B;f,g,P)$ 表示 $G-(X\cup Y)$ 中满足下述条件的连通分支 C 的个数:

$$V(C)\subseteq P \text{ 且 } J_G(V(C),f,B)\equiv 1\pmod 2.$$

这样的连通分支 C 称为关于 $(B;f,g,P)$ 的奇连通分支.

上述定理有两个直接推论. 对给定的 g,f $(g\leqslant f)$, 令 $P=\{v\in V(G)\mid g(v)=f(v)\}$. 则得出

(f,g)-因子定理[3]. 设 $G=(V,E)$是一般图,函数 $f,g:V(G)\to Z^+$,满足条件: $\forall v\in$

---

*国家自然科学基金资助项目.
1993年2月5日收到.

$V(G)$, $f(v)\geqslant g(v)$. 那么G有(f,g)-因子的充要条件是:

$$\forall B\in\mathscr{B}(G),\ h_G(B;f,g)-f(X)-d_G(Y)+g(Y)+\lambda_G(X,Y)\leqslant 0.$$

其中 $h_G(B;f,g)$ 表示 $G-(X\cup Y)$ 中满足下述条件的连通分支C的个数:

$$J_G(V(C),f,B)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)\quad 且\quad \forall v\in V(C),\ f(v)=g(v).$$

而取 $g\equiv f$,则给出著名的 Tutte f-因子定理.

f-因子定理[6]. 设 $G=(V,E)$ 是一般图, 函数 $f:V(G)\to Z^+$. 那么G有 f-因子的充要条件是:

$$\forall B\in\mathscr{B}(G),\ h_G(B;f)-f(X)-d_G(Y)+f(Y)+\lambda_G(X,Y)\leqslant 0. \tag{2}$$

其中 $h_G(B;f)$ 表示 $G-(X\cup Y)$ 中满足下述条件的连通分支C的个数:

$$J_G(V(C),f,B)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

满足上述条件的连通分支C称为关于$(B;f)$的奇连通分支,而不满足的则称为偶连通分支.

下面我们证明奇偶(f,g)-因子定理容易由f-因子定理简短推出. 为此目的记 $Q=V(G)-P$,并令

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & 若\ f(V)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 0, & 若\ f(V)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

由图G构造新图G'如下:

1) 给G添加一个新点r,并添加 $\lfloor(f(Q)-g(Q)-\varepsilon)/2\rfloor$ 个自环$[r,r]$;

2) 对于每个点 $v\in P$,添加 $(f(v)-g(v))/2$ 个自环 $[v,v]$;

3) 对于每个点 $v\in Q$,添加 $f(v)-g(v)$ 条边 $[r,v]$;

并令
$$f'(v)=\begin{cases}\varepsilon+2\lfloor(f(Q)-g(Q)-\varepsilon)/2\rfloor, & 若\ v=r,\\ f(v), & 若\ v\in V(G).\end{cases}$$

那么显然有

$$f'(V(G'))\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2);$$

$$d_{G'}(v)=\begin{cases}f(Q)-g(Q)+2\lfloor(f(Q)-g(Q)-\varepsilon)/2\rfloor, & 若\ v=r,\\ d_G(v)+f(v)-g(v), & 若\ v\in V(G);\end{cases}$$

容易验证

$$f'(r)=\begin{cases}f(Q)-g(Q)-1, & 若\ f(Q)-g(Q)\not\equiv\varepsilon\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ f(Q)-g(Q), & 若\ f(Q)-g(Q)\equiv\varepsilon\ (\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}$$

由 G' 的构造与 f' 的定义直接推出: G有关于(f,P)同余的(f,g)-因子当且仅当G'有f'-因子.

事实上,设F'是G'的f'-因子,那么 $F'\cap E(G)$ 就是G的关于(f,P)同余的(f,g)-因子. 反之设G含有关于(f,P)同余的(f,g)-因子F,那么不难从 $E(G')-E(G)$ 中适当选取某些边,使之与F一起构成G'的f'-因子.

因此要证明由f-因子定理可以导出奇偶(f,g)-因子定理,我们只需证明条件(1)等价于关于G'与f'的条件(2),即条件

$$\forall B\in\mathscr{B}(G'),\ h_{G'}(B;f')-f'(X)-d_{G'}(Y)+f'(Y)+\lambda_{G'}(X,Y)\leqslant 0. \tag{2$'$}$$

为简便起见我们把条件(1)和(2)$'$中不等式的左端分别记作 $\delta(B)$ 和 $\delta'(B)$. 显然,要证

(1)与(2)′等价，只需要证明

断言. 就 G' 与 f' 而言，条件(2)′和(1)都等价于条件

$$\forall B \in \mathscr{B}(G'-r), h_{G'}(B;f') - f'(X) - d_{G'}(Y) + f'(Y) + \lambda_{G'}(X,Y) \leqslant 0. \quad (2)''$$

证. 我们用到 $\delta'(B)$ 的简单性质: $\forall B=(X,Y)\in\mathscr{B}(G'),\delta'(B)\equiv 0 \pmod 2$ (因为 $\delta'(B)\equiv f'(V(G')) \pmod 2$，参见 [8, pp. 172—173]).

任取 $B=(X,Y)\in\mathscr{B}(G)$，记 $B_1=(X\cup\{r\},Y)$，$B_2=(X,Y\cup\{r\})$. 则 $B_i\in\mathscr{B}(G'),i=1,2$. $G'-(X\cup Y\cup\{r\})$中与 r 有连边且关于$(B_i;f')$为奇连通分支的分支数记作 $\mu_i(r)$，$G'-(X\cup Y)$ 中 r 所在的那个连通分支记作 L. 依照 L 关于 $(B;f')$ 是奇或偶连通分支，令 $\eta(r)=1$ 或 0. 显然，$G'-(X\cup Y\cup\{r\})$ 中与 r 无连边的那些连通分支也是 $G'-(X\cup Y)$ 的连通分支，而且关于 $(B_i;f')$ 与关于 $(B;f')$ 的奇偶性相同，$i=1,2$；反之，除 r 所在的连通分支 L 外，$G'-(X\cup Y)$ 的每个连通分支也是 $G'-(X\cup Y\cup\{r\})$的连通分支，且其奇偶性保持不变. 于是不难推出

$$\begin{aligned}\delta'(B_1)-\delta'(B) &= \mu_1(r) - f'(r) + \lambda_{G'}(r,Y) - \eta(r)\\ &\leqslant \mu_1(r) - f(Q) + g(Q) + \lambda_{G'}(r,Y) + 1\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\delta'(B_2)-\delta'(B) &= \mu_2(r) - d_{G'}(r) + f'(r) + \lambda_{G'}(X,r) - \eta(r)\\ &= \mu_2(r) - f(Q) + g(Q) + \varepsilon + \lambda_{G'}(X,r) - \eta(r)\\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

因此若 $\delta'(B)\leqslant 0$，则由 $\delta'(B_i)$ 的偶数性推出 $\delta'(B_i)\leqslant 0$，$i=1,2$. 于是条件(2)′与(2)″等价.

现在证 (1) 与 (2)″ 等价. 显然，若 $C'\neq L$ 是 $G'-(X\cup Y)$ 中任一关于$(B;f')$的奇连通分支，则 $G[V(C')]$ 是 $G-(X\cup Y)$ 的关于 $(B;f,g,P)$ 的奇连通分支；反之，若 C 是 $G-(X\cup Y)$ 中任一关于 $(B;f,g,P)$ 的奇连通分支，则 $G'[V(C)]$ 是 $G'-(X\cup Y)$ 的关于 $(B;f')$ 的奇连通分支，且与 r 无连边. 因此我们得到

$$\begin{aligned}\delta'(B) &= h_{G'}(B;f') - f'(X) - d_{G'}(Y) + f'(Y) + \lambda_{G'}(X,Y)\\ &= \eta(r) + h_G(B;f,g,P) - f(X) - d_G(Y) + g(Y) + \lambda_G(X,Y)\\ &= \eta(r) + \delta(B),\end{aligned}$$

于是 $\delta'(B)\leqslant 0$ 推出 $\delta(B)\leqslant 0$；反之亦然(利用 $\delta'(B)$ 是偶数). 因此(1)与(2)″等价. 证毕.

我们知道，Tutte 的 f-因子定理可由其 1-因子定理推出，而大大推广了的 Lovász 奇偶 (f,g)-因子定理又可由 f-因子定理简短推出. 因此 Tutte 的 1-因子定理具有很强的自改进能力，与之有关的详细资料请参见文后的文献.

参 考 文 献

[1] Bollobás, B. Extremal Graph Theory, Academic Press, London, 1978.
[2] Cai Mao-cheng, On some factor theorems of graphs, *Discrete Math.* **98**(1991), 223—229.
[3] Lovász, L., Subgraphs with prescribed valencies, *J. Combin. Theory*, 8(1970), 391—416.
[4] Lovász, L., The factorization of graphs II, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **23**(1972), 223—246.

[5] Lovász, L. and Plummer, M. D., Matching Theory, Académiai Kiadó, Budapest, 1985.
[6] Tutte, T., The factors of graphs, *Canad. J. Math.*, **4**(1952), 314—328.
[7] Tutte, T., Graph factors, *Combinatorica*, **1**(1981), 79—97.
[8] Tutte, T., Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

NOTE ON (f, g)-FACTOR THEOREM

CAI MAO-CHENG
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

ABSTRACT

The aim of this note is to show that Lovász's parity theorem is derived fairly early from Tutte's f-factor theorem.