系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(3) (2008, 3), 282–287

关于图的团符号控制数*

徐 保 根

(华东交通大学数学系， 南昌 330013)

摘要 引入了图的团符号控制的概念，给出了 n 阶图 G 的团符号控制数 $\gamma_{ks}(G)$ 的若干下限，确定了几类特殊图的团符号控制数，并提出了若干未解决的问题和猜想.

关键词 团符号控制函数，团符号控制数，平面图，轮，完全 m- 部图.

MR(2000) 主题分类号 05C22

1 引 言

本文所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献 [1].

设 $G=(V,E)$ 为一个图，其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$, 对于任意 $u\in V(G)$, 则 $N_G(u)$ 为 u 点在 G 中的邻域，$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 u 点在 G 中的闭邻域，$\delta=\delta(G)$ 和 $\Delta=\Delta(G)$ 分别为图 G 的最小度和最大度．若 $A,\ B\subseteq V$, 则记 $E(A,B)=\{uv\in E\,|\,u\in A, v\in B\}$. 设 G_1 和 G_2 为两个点不交的图，则 G_1+G_2 表示在 $G_1\cup G_2$ 中将 G_1 的每个顶点与 G_2 的各个顶点邻接所得的图．图 G 的每一个极大完全子图 K 称为 G 的一个团，即 G 中没有其它 (除 K 外) 的完全子图包含 K. 图 G 的最大完全子图的阶称为 G 的团数，记为 $\omega(G)$.

近些年来，图的控制理论的研究内容越来越丰富，其应用也越来越广泛， Haynes W T 等 [2] 较为系统地综述了近期的一些主要研究成果. 就图的符号控制而言，我们已将图的点符号控制概念 [3–6] 转向研究边符号控制问题，如符号边控制 [7] 和符号星控制 [8–9] 等．然而，图的边符号控制中存在许多未解决的问题的猜想，它们不仅与一些实际问题相联系 (如局部占优设计问题等), 而且与某些特殊的点符号控制相关．为此，我们引入团符号控制概念.

定义 1.1 设 $G=(V,E)$ 为一个图，一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 被称为图 G 的一个团符号控制函数，如果对于 G 中每个团 K 均有 $\sum\limits_{v\in V(K)}f(v)\geq 1$ 成立．图 G 的团符号控制数定义为

$$\gamma_{ks}(G)=\min\left\{\sum_{v\in V(G)}f(v)\,|\,f\ \text{为图}\ G\ \text{的团符号控制函数}\right\}.$$

为了方便，若 $S\subseteq V=V(G)$, 我们记 $f(S)=\sum\limits_{v\in S}f(v)$. 从而 $\gamma_{ks}(G)=\min\{f(V)\,|\,f$ 为图 G 的团符号控制函数 $\}$.

* 国家自然科学基金资助项目 (10661007), 江西省教育厅资助课题 (2005122) 和江西省自然科学基金 (2007GZS0715) 资助课题.

收稿日期：2005-12-13, 收到修改稿日期：2006-06-28.

根据上述定义，不难看出：

引理 1.2

1) 若 G 为一个 n 阶无三角形图，则 $\gamma_{ks}(G)=n$;

2) 对于任意两个点不交的图 G_1 和 G_2, 均有 $\gamma_{ks}(G_1\cup G_2)=\gamma_{ks}(G_1)+\gamma_{ks}(G_2)$;

3) 对于任意一个 n 阶图 G, $\gamma_{ks}(G)\equiv n(\mathrm{mod}2)$.

本文主要给出了 n 阶图 G 的团符号控制数 $\gamma_{ks}(G)$ 的下限，确定了几类特殊图的团符号控制数，并提出了若干未解决的问题和猜想.

2　主要结果

我们首先给出图的团符号控制数的几个下界.

定理 2.1　对于任意一个 n 阶图 $G(n\geq 2)$, 图 G 的最大度 $\Delta=\Delta(G)\geq 1$, 则有

$$\gamma_{ks}(G)\geq 2\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil-n.$$

并且此下界是最好可能的.

证　当 $\Delta=1$ 时定理显然成立. 下设 $\Delta\geq 2$.

设 $G=(V,E)$, f 为图 G 的一个团符号控制函数且使得 $f(V)=\gamma_{ks}(G)$. 令： $A=\{v\in V\,|f(v)=1\}$, $B=\{v\in V\,|f(v)=-1\}$, $|A|=s$, $|B|=t$. 显然有 $n=s+t$, $\gamma_{ks}(G)=s-t=2s-n$.

由定义 1.1 知：对于每个 $u\in B$, $|N_G(u)\cap A|\geq 2$(否则，对 u 点所在的任何团 K, 则有 $f(V(K))\leq 0$, 矛盾), 因此有 $|E(A,B)|\geq 2t$.

下面估计 A 在 G 中的导出子图的边数 $r=|E(G[A])|$. 对于每个 $u\in B$, 由定义 1.1 知：对于 u 点所在的任何团 K, $f(V(K))\geq 1$, 由此可见， u 点至少与 A 中某两个相邻点均邻接. 而对于每条边 $e=v_1v_2\in E(G[A])$, v_1 和 v_2 至多与 B 中 $\Delta-1$ 个点同时邻接，从而有 $r\geq\frac{|B|}{\Delta-1}=\frac{t}{\Delta-1}$, 并且得到 $\Delta s=\Delta\,|A|\geq\sum\limits_{v\in A}d_G(v)=2r+|E(A,B)|\geq\frac{2\Delta t}{\Delta-1}$, 即有 $s\geq\frac{2t}{\Delta-1}=\frac{2(n-s)}{\Delta-1}$, 注意到 s 为整数，因此， $s\geq\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil$,$\gamma_{ks}(G)=2s-n\geq 2\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil-n$.

下面证明此下界是最好可能的.

当 $\Delta=1$ 时，取 $G=K_2\cup\overline{K}_{n-2}$, 显然有 $\gamma_{ks}(G)=n=2\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil-n$.

当 $\Delta=2$ 时，取 G 为 $t=\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ 个 K_3 与 $n-3t$ 个 K_1 之并. 显然有

$$\gamma_{ks}(G)=n-2t=2\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil-n=2\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil-n.$$

当 $\Delta\geq 3$ 时，取 G_1 为 $s=\left\lfloor\frac{n}{\Delta+1}\right\rfloor$ 个 $K_2+\overline{K}_{\Delta-1}$ 之并，令 $q=n-s(\Delta+1)$, 显然 $0\leq q\leq\Delta$. 当 $q=0$ 时，令 $G=G_1$; 当 $1\leq q\leq 2$ 时，令 $G=G_1\cup\overline{K_q}$; 当 $q\geq 3$ 时，令 $G=G_1\cup(\overline{K}_{q-2}+K_2)$. 不难验证： G 为一个 n 阶图，并且有 $\gamma_{ks}(G)=2\left\lceil\frac{2n}{\Delta+1}\right\rceil-n$. 至此，定理 2.1 证毕.

推论 2.2　对于任意 n 阶图 $G(n\geq 2)$, 均有 $n\geq\gamma_{ks}(G)\geq 4-n$, 并且此上、下界都是最好可能的.

证　这个上界是平凡的，下界可由定理 2.1 得出，且对于任意 n 阶树 T, 显然 $\gamma_{ks}(T)=n$. 且不难看出 $\gamma_{ks}(K_2+\overline{K}_{n-2})=4-n$, 推论 2.2 证毕.

定理 2.3　对于任意 n 阶图 G, 图 G 的最小度 $\delta=\delta(G)\geq 3$, 则有

$$\gamma_{ks}(G)\geq 2\left\lceil\frac{3n}{\varDelta+2}\right\rceil-n,$$

其中 $\varDelta=\varDelta(G)$ 为 G 的最大度.

证　类似于定理 2.1 的证明，其中 f, A, B, s 和 t 的定义均同于定理 2.1 的证明中.

对于每个点 $u\in B$, 若 u 点与 B 中另一个点 v 邻接，由定义 1.1 知，$e=uv$ 所在的任何团 K 中至少有 A 中 3 个点 (否则 $f(V(K))\leq 0$, 矛盾), 即 $|N_G(u)\cap A|\geq 3$; 若 u 点与 B 中任何点均不邻接，由于 $\delta=\delta(G)\geq 3$, 可见仍有 $|N_G(u)\cap A|\geq 3$.

因此 $|E(A,B)|\geq 3t$, 故 A 中有一点 u 与至少 $\lceil\frac{3t}{s}\rceil$ 个 B 中点邻接，而 u 点至少与 1 个 A 中点邻接，从而有 $\varDelta\geq 1+\lceil\frac{3t}{s}\rceil\geq 1+\frac{3(n-s)}{s}$, 即 $s\geq\frac{3n}{\varDelta+2}$, 注意到 s 为整数，故有

$\gamma_{ks}(G)=2s-n\geq 2\left\lceil\frac{3n}{\varDelta+2}\right\rceil-n$. 定理 2.3 证毕.

推论 2.4　对于任意 n 阶 k- 正则图 $G(n>k\geq 1)$, 均有

$$\gamma_{ks}(G)\geq\begin{cases}\lceil\frac{n}{3}\rceil, & k=2;\\ 2\left\lceil\frac{3n}{k+2}\right\rceil-n, & k\neq 2.\end{cases}$$

证　当 $k=1$ 时显然成立. 而 $k=2$ 和 $k\geq 3$ 可分别由定理 2.1 和定理 2.3 得到.

引理 2.5　对于任意 n 阶 k- 正则图 $G(n>k\geq 1)$, 若 $\omega(G)\leq 4$ 则有

$$\gamma_{ks}(G)\geq\left\lceil\frac{n}{2k-1}\right\rceil.$$

证 设 f 为图 G 的一个团符号控制函数且使得 $f(V)=\gamma_{ks}(G)$. 令：$A=\{v\in V\,|\,f(v)=1\}$, $B=\{v\in V\,|\,f(v)=-1\}$, $|A|=s$, $|B|=t$. 显然有 $n=s+t$, $\gamma_{ks}(G)=s-t$. 由 $\omega(G)\leq 4$ 知 B 中任何两点是不邻的 (否则，若存在 $u,v\in B$ 使得 $e=uv\in E(G)$, 则对 $e=uv$ 所在的任何团 K, 有 $f(V(K))\leq 0$, 矛盾), 注意到 G 为 k- 正则图，故 B 中每个顶点均与 A 中 k 个顶点邻接，且 A 中每个顶点 u 至少与 A 中 1 个顶点邻接 (否则 u 点所在的团均为 K_2, 且 $f(V(K_2))=0$, 矛盾). 因此 A 中各顶点的度数之和 $ks\geq kt+s$, 即有 $k(s-t)\geq s=\frac{s}{2}+\frac{n-t}{2}=\frac{n}{2}+\frac{s-t}{2}$, 从而 $\gamma_{ks}(G)=s-t\geq\frac{n}{2k-1}$,$\gamma_{ks}(G)$ 为整数，证毕.

定理 2.6　对于任意一个无孤立顶点的 n 阶平面图 G, 则有

$$\gamma_{ks}(G)\geq\left\lceil\frac{\delta-\varDelta+1}{\delta+\varDelta-1}n\right\rceil,$$

其中 δ 和 $\varDelta$ 分别为图 G 的最小度和最大度.

证　1) 当 $\delta=\varDelta$ 时，G 为 $k=\delta=\varDelta$ 度正则图，注意到 $k\geq 1$, 由于 G 为平面图，故 $\omega(G)\leq 4$, 根据引理 2.5 得知定理成立.

2) 当 $\delta\leq\varDelta-1$ 时，注意到 $\delta\geq 1$.

设 f 为图 G 的一个团符号控制函数且使得 $f(V)=\gamma_{ks}(G)$. 令 $A=\{v\in V\,|\,f(v)=1\}$, $B=\{v\in V\,|\,f(v)=-1\}$, $|A|=s$, $|B|=t$. 显然有 $n=s+t$, $\gamma_{ks}(G)=s-t$.

如果存在 $u, v \in B$ 使得 $e = uv \in E(G)$, 因为 $e = uv$ 所在的任何团 K, 有 $f(V(K)) \geq 1$, 故 $|V(K)| \geq 5$, 这与 $\omega(G) \leq 4$ 矛盾.

因此， B 中任何两个点是不邻的，即对任何 $u \in B$, 均有 $N_G(u) \subseteq A$, 从而 $|E(A,B)| \geq \delta|B| = t\delta$. 由 $\delta \geq 1$ 可见 $G[A]$ 中无孤立顶点 (否则，每个孤立顶点所在的团 $K = K_2$, 并且 $f(V(K)) = 0$ 矛盾), 可见 A 中各点的度数之和不小于 $s + t\delta$, 故至少有一点 $v \in A$, 使得 $d_G(v) \geq \frac{s+t\delta}{s}$, 即有 $(\Delta-1)s \geq t\delta$, $(\Delta-1)t = (\Delta-1)t$, 两式相加、减 (注意到 $n = s+t$) 分别得到 $t \leq \frac{(\Delta-1)n}{\delta+\Delta-1}$, $\gamma_{ks}(G) = s - t \geq \frac{\delta-\Delta+1}{\Delta-1}t$. 由于 $\delta \leq \Delta - 1$, 即 $\delta - \Delta + 1 \leq 0$, 从而有 $\gamma_{ks}(G) \geq \frac{(\delta-\Delta+1)}{\delta+\Delta-1}n$, 注意到 $\gamma_{ks}(G)$ 为整数，定理 2.6 证毕.

对于任意一个 n 阶无三角形的图 G, 显然有 $\gamma_{ks}(G) = n$. 但图 G 无三角形仅仅是 $\gamma_{ks}(G) = n$ 的一个充分条件，不是必要条件. 如何刻划适合 $\gamma_{ks}(G) = n$ 的 n 阶图 G 仍然是一个困难的问题.

定理 2.7 设 G 为一个 n 阶图 $G(n \geq 4)$, 且 $\gamma_{ks}(G) = n$, 则有

$$\omega(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

并且此上界是最好可能的.

证 设 $\omega(G) = s$, K_s 为图 G 的一个最大团，当 $s \leq 2$ 时定理显然成立. 下设 $s \geq 3$.

若存在 $u \in V(K_s)$, 使得 u 点所在的每个团的阶不小于 3, 则可定义 G 的一个团符号控制函数 f 如下： $f(u) = -1$, 并且当 $v \neq u$ 时 $f(v) = 1$, 可见 $\gamma_{ks}(G) \leq f(V(G)) = n - 2$, 与定理中条件矛盾.

因此，对于每一个 $u \in V(K_s)$, 则 u 点必在某一个 2 阶团 K_2 中. 注意到 $s \geq 3$, 即 $V(K_s)$ 中每一个点 u 必与某一个不在 $V(K_s)$ 中的点 v 邻接，而 v 点与 $V(K_s)$ 中 (除了 u 点外) 其它点均不邻接. 因此， $n \geq 2s$, 注意到 s 为整数，故有 $\omega(G) = s \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

下面我们构造一个 n 阶图 $G(n \geq 4)$, 使得定理中等式成立.

当 $n = 2t$ 为偶数时，令 G 为图 $K_t \cup K_t$ 中增加 t 条独立边所得的图.

当 $n = 2t+1$ 为奇数时，在图 $K_t \cup K_t$ 中增加 t 条独立边所得的图记为 H, 令 $G = H \cup K_1$.

不难看出： G 为一个 n 阶图， $\omega(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 并且 $\gamma_{ks}(G) = n$, 定理 2.7 证毕.

下面我们考虑几类特殊图的团符号控制数. 由引理 1.2 得知，若 G 为 n 阶二部图或者 G 为 n 阶 $(n \neq 3)$ 圈，则有 $\gamma_{ks}(G) = n$.

定理 2.8

1) 若 $n \geq 1$, 则 $\gamma_{ks}(K_n) = \frac{3+(-1)^n}{2}$;

2) 若 $n \geq 3$, 则 $\gamma_{ks}(W_{n+1}) = \frac{3-(-1)^n}{2}$; 其中 K_n 为 n 阶完全图， $W_{n+1} = C_n + K_1$ 为 $n+1$ 阶轮图.

证 1) 是明显的，我们只证明 2).

记 $G = W_{n+1}$, $V = V(G)$. 设 f 为图 G 的一个团符号控制函数且使得 $f(V) = \gamma_{ks}(G)$. 令： $A = \{v \in V \,|\, f(v) = -1\}$. 当 $n = 3$ 时定理是明显的. 下设 $n \geq 4$. 由于 G 中每个团均为一个 K_3, 故 A 中任何两点是不邻的 (A 为 G 的一个独立集), 可见 $|A| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, 从而有 $\gamma_{ks}(G) = |V(G)| - 2|A| \geq n + 1 - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{3-(-1)^n}{2}$.

另一方面，取 M 为图 $G = W_{n+1}$ 的一个最大独立集，易见 $|M| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, 定义 G 的一个团符号控制函数 f 如下：当 $v \in M$ 时 $f(v) = -1$; 当 $v \in V(G) \backslash M$ 时 $f(v) = +1$. 因此 $\gamma_{ks}(G) \leq f(V) = \frac{3-(-1)^2}{2}$. 至此，定理 2.8 证毕.

我们知道 $\gamma_{ks}(K_{m,n}) = m+n$, 推广到完全多部图时有下面的结论.

定理 2.9 设 $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m (m \ge 3)$, 则完全 m 部图 $K(n_1, n_2, \cdots, n_m)$ 的团符号控制数

$$\gamma_{ks}(K(n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \sum_{k=1}^{t} n_k - \sum_{k=t+1}^{m} n_k,$$

这里 $t = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

证 记 $G = K(n_1, n_2, \cdots, n_m)$, $V = V(G) = \bigcup\limits_{k=1}^{m} V_k$, $|V_k| = n_k (1 \le k \le m)$.

首先, 定义图 G 的一个团符号控制函数 f 如下:

当 $v \in \bigcup\limits_{k=1}^{t} V_k$ 时 $f(v) = +1$; 当 $v \in \bigcup\limits_{k=t+1}^{m} V_k$ 时 $f(v) = -1$. 故 $\gamma_{ks}(G) \le f(V) = \sum\limits_{k=1}^{t} n_k - \sum\limits_{k=t+1}^{m} n_k$.

另一方面, 设 f 为图 G 的一个团符号控制函数, 使得 $\gamma_{ks}(G) = f(V)$. 令: $A = \{v \in V \,|\, f(v) = -1\}$, $S = \{k \,|\, A \cap V_k = \phi\}$, $R = \{k \,|\, A \cap V_k \ne \phi\}$, 可见 $S \cap R = \phi$, $S \cup R = \{1, 2, 3, \cdots\cdots, m\}$, 即有 $|S| + |R| = m$. 记 $|R| = q$. 下证 $|S| \ge t$.

用反证法. 假若 $|S| \le t-1$, 则 $q = |R| \ge m - t + 1 = m - \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$(这里分 m 为奇数和偶数), 记 $R = \{k_1, k_2, \cdots, k_q\}$, 注意到 $q \ge \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. 由 R 的定义知: 对每一个 $i (1 \le i \le q)$, $A \cap V_{k_i} \ne \phi$, 故可取 $v_i \in A \cap V_{k_i} (1 \le i \le q)$. 令 $M = \{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_q\}$, 可见 $M \subseteq A$, 即 $f(v_i) = -1 (i = 1, 2, \cdots, q)$. 又因 M 中任意两个点 v_i 和 $v_j (i \ne j)$ 均不是 G 的同一部中的点 (分别在 V_{k_i} 和 V_{k_j} 中), 故 M 在 G 中的导出子图 $G[M] = K_q$ 为一个 q 阶完全图. 对于包含这个 q 阶完全图 K_q 的任何一个团 K, 由于 G 为完全 m 部图, $|V(K)| \le m$, 并且注意到 $q \ge \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$, 因此有 $f(V(K)) = f(V(K) \backslash V(K_q)) + f(V(K_q) \le |V(K)| - q - q \le m - 2q \le 0$. 这与 f 为图 G 的一个团符号控制函数矛盾.

因此 $|S| \ge t$. 由 S 的定义知: G 的 m 部顶点中有 $|S| \ge t$ 部, 每一部均不包含 A 中的任何点. 即 A 中的顶点分布在至多 $m-t$ 部中. 注意到 $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m$, 因此 $|A| \le \sum\limits_{k=t+1}^{m} n_k$, 故 $\gamma_{ks}(G) = f(V) = |V| - 2\,|A| \ge \sum\limits_{k=1}^{t} n_k - \sum\limits_{k=t+1}^{m} n_k$. 至此, 定理 2.9 证毕.

3 未解决问题和猜测

本文主要考虑了 $\gamma_{ks}(G)$ 的下界, 一个平凡的上界为 $\gamma_{ks}(G) \le |V(G)|$, 自然地提出下面的猜测.

猜测 3.1 对于任意 n 阶图 G, 若 $\gamma_{ks}(G) = n$, 则 $|E(G)| \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

如果这个猜测正确的话, 则此上界是最好可能的. 例如, 当 $s = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, t = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 时, $G = K_{s,t}$ 能使等式成立.

猜测 3.2 在定理 2.6 中给出的 $\gamma_{ks}(G)$ 的下界对任意图 G 成立.

考虑一个图 G 与其补图 $\overline{G}$ 的团符号控制数的关系, 我们提出问题.

问题 3.3 对于任意 n 阶图 G, 如何给出 $\gamma_{ks}(G) + \gamma_{ks}(\overline{G})$ 的一个好下界?

值得注意的是：确实存在 n 阶连通图 G 和 $\overline{G}$, 使得 $\gamma_{ks}(G)=\gamma_{ks}(\overline{G})=n$ 成立. 例如，当 $n=2t$ 为偶数时， G 为图 $K_t\cup K_t$ 中增加 t 条独立边所得的图.

问题 3.4 如何刻划 n 阶连通图 G 和 $\overline{G}$, 使得 $\gamma_{ks}(G)=\gamma_{ks}(\overline{G})=n$ 成立.

上述问题和猜测还有待于进一步探讨和研究.

参 考 文 献

[1] Bondy J A and Murty V S R. Graph Theory with Applications. Elsevier, Amsterdam, 1976.

[2] Haynes T W, Hedetniemi S T and Slater P J. Domination in Graphs. New York, 1998.

[3] Zhang Z, Xu Baogen, Li Y and Liu L. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph. *Discrete Math.*, 1999, **195**: 295–298.

[4] Xu Baogen, Cockayne E J, Haynes T W, Hedetniemi S T and Zhou S. Extremal graphs for inequalities involving domination parameters. *Discrete Math.*, 2000, **216**: 1–10.

[5] Xu Baogen. On minus domination and signed domination in graphs. 数学研究与评论， 2003, **4**: 586–590.

[6] Cockayne E J and Mynhart C M. On a generalization of signed domination functions of graphs. *Ars. Combin.*, 1996, **43**: 235–245.

[7] Xu Baogen. On signed edge domination numbers of graphs. *Discrete Math.*, 2001, **239**: 179–189.

[8] Xu Baogen. On edge domination numbers of graphs. *Discrete Math.* 2005, **294**: 311–316.

[9] Xu Baogen. Two classes of edge domination in graphs. *Discrete Appl. Math.*, 2006, **154**: 1541–1546.

ON CLIQUE SIGNED DOMINATION NUMBERS OF GRAPHS

XU Baogen

(*Department of Mathematics, East China Jiaotong University, Nanchang* 330013)

Abstract The concept of clique signed domination in graphs is introduced, some lower bounds for the clique signed domination numbers of graphs are given, and the exact values of the clique signed domination numbers for some special graphs are determined. Finally some open problems and conjectures are proposed.

Key words Clique signed domination function, clique signed domination number, planar graph, Wheel, complete m-partite graph.