系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
10 (4) (1990), 353—359

关于图的升分解问题

马 克 杰
(曲阜师范大学运筹学研究所，山东)

一、概念和记号

1987年，文献[1]中给出了图的升分解概念. 已知图G和自然数 n, G 的边数q满足 $\binom{n+1}{2} \leqslant q < \binom{n+2}{2}$. 如果$G$能分解为子图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的并，满足 G_i 与 G_{i+1} 的一个真子图同构 ($1 \leqslant i \leqslant n-1$)，$G_i$ 不含孤立点，则称这个分解为图G的一个**升分解**.

对于自然数 a 和互不相等的自然数 $b_1, b_2, \cdots, b_l$，如果 $a = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$，我们就称 a **能分解为** $b_1, b_2, \cdots, b_l$，记作 $a = [b_1, b_2, \cdots, b_l]$，并记 $Q_a = \{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$.

对于自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，如果 $a_1 = [b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_{s_1}^{(1)}]$，$a_2 = [b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \cdots, b_{s_2}^{(2)}]$，$\cdots$，$a_k = [b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \cdots, b_{s_k}^{(k)}]$，并且对 $\forall b_t^{(i)} \in Q_{a_i}$，$b_r^{(j)} \in Q_{a_j}$ ($i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant k$)，都有 $b_t^{(i)} \neq b_r^{(j)}$，就称 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的分解为**组异分解**. 如果还满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_{a_i} = \{1, 2, \cdots, n\}$，就称 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ **可分拆**为 $1, 2, \cdots n$.

设自然数 a 的 r 组分解

$$a = [b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \cdots, b_{s_i}^{(i)}], \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

如果不同组中的任意两个数都不同，就称这个分解为 a 的 **r-分解**.

如果在自然数集合 $Q = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$ 中 ($b_i \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant s$)有 r 个连续自然数 $n, n-1, \cdots, n-r+1$，并且 $n-r \bar{\in} Q$，就称Q**到达** $n-r+1$.

二、猜想和定理

在文献[1]中提出

猜想. 设自然数 $n \geqslant 2$, G 是由 k 个分离的星图 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 构成的图，S_i 含有 a_i 条边，$n \leqslant a_i \leqslant 2n-2$，$\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$. 则$G$可升分解为星图的并.

1988年12月7日收到，1989年7月22日收到修改稿.

这个猜想可表述为如下的等价形式:

设自然数 $n \geqslant 2$ 和自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $n \leqslant a_i \leqslant 2n-2$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$,则 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

以上猜想(下称猜想)是一个比较困难的问题, 因为提出不久, 还没有多少深刻的结果. 我们得到

定理 1. 设自然数 $n \geqslant 2$ 和自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $n \leqslant a_k \leqslant 2n-2$, $n \leqslant a_i \leqslant a_{i+1}$ $(i=1, 2, \cdots, k-2)$, 且 $a_{k-1} < 2(n-k+2)$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$,则 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

定理 2. $k \leqslant 5$ 时,猜想成立.

定理 3. 如果自然数 k, a 和 n 满足 $ka = \binom{n+1}{2}$, $n \leqslant a \leqslant 2n-2$,则 $\underbrace{a, a, \cdots, a}_{k\text{个}}$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

三、定理的证明

1. 定理 1 的证明

我们作分解

$$\begin{cases} a_1 = [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}] = [n, a_1 - n], \\ a_2 = [a_1^{(2)}, a_2^{(2)}] = [n-1, a_2 - n + 1], \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{k-1} = [a_1^{(k-1)}, a_2^{(k-1)}] = [n-(k-2), a_{k-1} - n + (k-2)]. \end{cases} \tag{1}$$

对任意的 i 和 $j (1 \leqslant i, j \leqslant k-1)$,当 $i < j$ 时,因为 $a_i \leqslant a_j$,所以 $n-(i-1) > n-(j-1)$, $a_i - n + (i-1) < a_j - n + (j-1)$. 又因为 $a_{k-1} < 2(n-k+2)$,所以 $a_{k-1} - n + (k-2) < n-(k-2)$. 因而在(1)式中, $n, n-1, \cdots, n-(k-2)$, $a_{k-1} - n + (k-2), \cdots, a_2 - n + 1, a_1 - n$ 是一个严格递减序列. 即对任意的 $a_r^{(i)} \in Q_{a_i}$ 和 $a_r^{(j)} \in Q_{a_j} (i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant k-1)$ 都有 $a_r^{(i)} \neq a_r^{(j)}$, (1)式是组异分解.

因为 $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$, 故令

$$Q_{a_k} = \{1, 2, \cdots, n\} \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_{a_i}. \tag{2}$$

显然 $a_k = \sum_{j \in Q_{a_k}} j$, $\bigcup_{i=1}^{k} Q_{a_i} = \{1, 2, \cdots, n\}$. 所以(1)和(2)把 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 分拆为 $1, 2, \cdots, n$. 定理 1 证毕.

容易验证,序列 $\underbrace{n, n, \cdots, n}_{(n+1)/2\text{个}}$ (n 为奇数)和序列 $\underbrace{n+1, n+1, \cdots, n+1}_{n/2\text{ 个}}$ (n 为偶数)都满足定理 1 的条件,因此有

推论. 序列 $\underbrace{n, n, \cdots, n}_{(n+1)/2个}$ (n 为奇数)和序列 $\underbrace{n+1, n+1, \cdots, n+1}_{n/2个}$ (n 为偶数)都可分拆为 $1, 2, \cdots, n$。

2. 定理 2 的证明

引理 1. 设自然数 $n \geqslant 2$ 和自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $n \leqslant a_i \leqslant 2n-2$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$, 则 $2k-1 \leqslant n \leqslant 4k-3$.

证. 由已知条件得 $kn \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$, $2k \leqslant n+1$, 即

$$n \geqslant 2k-1. \tag{3}$$

由已知条件得

$2k(n-1) \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$, $n^2-(4k-1)n+4k \leqslant 0$,

$$n \leqslant \frac{(4k-1)+\sqrt{(4k-1)^2-16k}}{2} = \frac{(4k-1)+\sqrt{(4k-3)^2-8}}{2}$$
$$< \frac{4k-1+4k-3}{2} = 4k-2,$$

即

$$n \leqslant 4k-3. \tag{4}$$

由(3)和(4),引理 1 获证.

引理 2. 设自然数 $n \geqslant 2$ 和自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $n \leqslant a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2n-2$ $(i=1, 2, \cdots, k-1)$, $a_{l-1} < 2(n-l+2)$, $a_l \geqslant 2(n-l+1)$, $2 \leqslant l \leqslant k-1$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$, 则 $n \geqslant \frac{4k-2l+1+\sqrt{\Delta}}{2}$, 其中 $\Delta = (4k-2l+1)^2-16k(l-1)+16(l-1)^2$.

证. 由已知条件得

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant (l-1)n + 2[k-(l-1)]\cdot[n-(l-1)]$$
$$= 2kn-(l-1)n-2k(l-1)+2(l-1)^2,$$

化简整理得

$$n^2-(4k-2l+1)n+4k(l-1)-4(l-1)^2 \geqslant 0. \tag{5}$$

(5)式左端判别式为

$$\Delta = (4k-2l+1)^2-16k(l-1)+16(l-1)^2,$$

令 Δ 一阶导数 $\Delta'_l = 0$, 得

$$\Delta'_l = 40l-32k-36 = 0, \quad l = \frac{8k-1}{10}.$$

又因为二阶导数 $\Delta''_l = 40 > 0$, 所以, 当 $l = \frac{8k-1}{10}$ 时, Δ 取最小值. 易证, 当 $l=$

$\frac{8k-1}{10}$ 时，$\Delta > 0$. 因此，对任意的 $k \geqslant 3$ 和 $l\ (2 \leqslant l \leqslant k-1)$ 都有 $\Delta > 0$. 所以(5)式有解

$$n \geqslant \frac{4k-2l+1+\sqrt{\Delta}}{2},$$

其中 $\Delta = (4k-2l+1)^2 - 16k(l-1) + 16(l-1)^2$.

引理 3. 设自然数 $n \geqslant 2$ 和自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $n \leqslant a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2n-2$ $(i=1, 2, \cdots, k-1)$, $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$, 则 $a_i < 2n-2\ (i=1, 2)$.

证. 显然，只要证明 $a_2 < 2n-2$.

如果 $a_2 = 2n-2$, 由已知条件得

$$\binom{n+1}{2} \geqslant n + (k-1)(2n-2),$$

化简得

$$n^2 - (4k-3)n + 4(k-1) \geqslant 0. \tag{6}$$

由引理 1 知 $n \geqslant 2k-1$, 从而 $n \geqslant \frac{4k-3}{2}$. 将 $n = \frac{4k-3}{2}$ 时，代入 (6) 式左端得 $\frac{(4k-3)^2}{4} - \frac{(4k-3)(4k-3)}{2} + 4(k-1) = -\frac{(4k-5)^2}{4} < 0$, 此与(6)式矛盾. 故有 $a_2 < 2n-2$.

引理 4. $k \leqslant 4$ 时猜想成立.

证. 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. $k=1, 2$ 时，显然. $k=3$ 时，由引理 3 和定理 1 知引理 4 成立.

当 $k=4$ 时，由引理 3 知，只需考虑以下两种情况:

1) $a_3 < 2n-4$. 此时由定理 1 知，a_1, a_2, a_3, a_4 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

2) $a_3 \geqslant 2n-4$. 首先命 $a_1 = [n, a_1-n]$, $a_2 = [n-1, a_2-n+1]$. 这显然是 a_1, a_2 的组异分解. 不妨设 $\bigcup_{i=1}^{2} Q_{a_i}$ 到达 $n-1$, 在 $\bigcup_{i=1}^{2} Q_{a_i}$ 中则至多有两个数小于 $n-2$. 设 $a_3 = (n-2) + a_3 - (n-2)$. 由引理 2 知 $n \geqslant 10$, 那么 $a_3 - (n-2) \geqslant 8$. 因此 $a_3 - (n-2)$ 有 3-分解，并且分解式中的数都小于 $n-2$. 所以 a_1, a_2, a_3 有组异分解. 再命 $a_4 = \{1, 2, \cdots, n\} \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{3} Q_{a_i}$ 即得到合乎要求的组异分解.

引理 5. $k=5$ 时猜想成立.

证. 设 $a_i \leqslant a_{i+1}$, $(i=1, 2, 3, 4)$. 由引理 3 知，只需考虑以下三种情况.

1) $a_4 < 2(n-3)$. 此时由定理 1 知，$a_1, a_2, \cdots, a_5$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

2) $\begin{cases} a_3 < 2(n-2); \\ a_4 \geqslant 2(n-3). \end{cases}$

此时由引理 2 知 $n \geqslant 11$. 再分两种情况讨论.

① 如果 $\begin{cases} a_3 < 2(n-2); \\ a_4 = 2(n-3). \end{cases}$ 首先设

$$a_1=[n,\ a_1-n],\ a_2=[n-1,\ a_2-n+1],\ a_4=[n-2,\ n-4].$$

显然，这是 a_1, a_2, a_4 的组异分解.

设 $a_3=(n-3)+(a_3-n+3)$. 如果 $a_3-n+3=n-4$，因为 $n\geqslant 11$，所以 $a_3-n+3\geqslant 7$. 故存在 a_3 的分解 $a_3=[n-3,\ b,\ c]$，使 a_1, a_2, a_4, a_3 的分解是组异分解. 如果 $a_3-n+3\neq n-4$，显然有 $a_1-n<a_2-n+1<a_3-n+3$，故 a_1, a_2, a_4, a_3 的分解是组异分解.

再令 $a_5=\{1,2,\cdots,n\}\Big\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{4}Q_{a_i}$，即使得 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

② 如果 $\begin{cases}a_3<2(n-2);\\ a_4>2(n-3).\end{cases}$ 首先作组异分解

$$a_1=[n,\ a_1-n],\ a_2=[n-1,\ a_2-n+1],\ a_3=[n-2,\ a_3-n+2].$$

设 $\bigcup\limits_{i=1}^{3}Q_{a_i}$ 到达 $n-r-1\ (r\geqslant 3)$，再设 $a_4=(n-r)+(a_4-n+r)$. 因为 $a_4>2n-6$，$n\geqslant 11$，所以 $a_4-n+r>2n-6-n+r\geqslant 5+r$，即 $a_4-n+r\geqslant 9$. 故 a_4-n+r 有 4-分解. 因而存在 a_4 的分解 $a_4=[n-r,\ b,\ c]$，使 a_1, a_2, a_3, a_4 的分解是组异分解. 再令 $a_5=\{1,2,\cdots,n\}\Big\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{4}Q_{a_i}$，即使得 $a_1,\cdots,a_5$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

3) $\begin{cases}a_2<2(n-1);\\ a_3\geqslant 2(n-2).\end{cases}$

与上面情况 2)的讨论类似，则有组异分解

$$a_1=[n,\ a_1-n],\ a_2=[n-1,\ a_2-n+1],\ a_3=[n-r_1,\ b_1,\ c_1],$$

$$a_4=[n-r_2,\ b_2,\ c_2],\ a_5=\{1,2,\cdots,n\}\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{4}Q_{a_i}.$$

其中 $n\geqslant 15$, $r_1\geqslant 2$, $r_2\geqslant 3$, $b_1+c_1=a_3-n+r_1\geqslant 13$, $b_2+c_2=a_4-n+r\geqslant 14$. 使 $a_1,\cdots,a_5$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

由引理 4 和引理 5 知定理 2 成立.

3. 定理 3 的证明

为了证明定理 3，我们证明一个更强的结果

定理 3′. 如果自然数 k, a 和 n 满足 $ka=\binom{n+1}{2}$, $a\geqslant n$，则 $\underbrace{a,\ a,\ \cdots,\ a}_{k个}$ 可分拆为 $1, 2, \cdots, n$.

证. 对 n 作归纳法证明. $n=3$ 时，容易验证命题成立. 假设对小于 n 的一切自然数成立. 对于自然数 n，分甲，乙两种情况讨论.

甲 $a\leqslant 2n$. 首先设

$$k个\begin{cases}a=n+(a-n),\\ a=(n-1)+(a-n+1),\\ \quad\cdots\qquad\qquad\cdots\\ a=(n-k+1)+(a-n+k-1).\end{cases}\tag{7}$$

当 $a=2n$ 时,有 $\binom{n+1}{2}=ka=2nk=n\underbrace{+n+\cdots+}_{2k\text{个}}n$, 对其中的 $(2k-1)$ 个 n, 令 $a'=n$, $(2k-1)a'=\binom{n-1+1}{2}$, 故仍为形式 $\underbrace{a',a',\cdots,a'}_{2k-1}$ 的分解，且 $n-1<n$. 由归纳假设，这 $(2k-1)$ 个 $a'(=n)$ 可分拆为 $1,2,\cdots,n-1$. 所以 $2k$ 个 n (即 k 个 $2n$) 可分拆为 $1,2,\cdots,n$.

当 $a=2n-1$ 时,在(7)式中，第一个 a 为 $a=[n,n-1]$. 由归纳假设，其余的 $(k-1)$ 个 $(2n-1)$ 可分拆为 $1,2,\cdots,n-2$. 故 k 个 $(2n-1)$ 可分拆为 $1,2,\cdots,n$.

当 $a\leqslant 2n-2$ 时,在(7)式中,如果 $a-n+k-1<n-k+1$, 即 $a<2(n-k+1)$, 又 $ka=\binom{n+1}{2}$,所以 k 个 a 满足定理 1 条件,可分拆为 $1,2,\cdots,n$;如果 $a-n+k-1=n-k+1$, 则 $n-k+1$ 与 $a-n+k-2$ 相继. 这时，(7)式中的 $a-n$, $a-n+1,\cdots,a-n+k-2,n-k+1,\cdots,n-1,n$ 相继递增. 余下的 $a-n+k-1$ 必可分拆为 $1,2,\cdots,a-n-1$. 即 k 个 a 可分拆为 $1,2,\cdots,n$;如果 $n-k+1<a-n+k-1$,则在(7)式等号右边第一列中必存在某 $n-j$ $(1\leqslant j\leqslant k-2)$, 它与第二列中的 $a-n+j$ 或者相等,或者相继. 若相等，则 $n-j=(a-n+j-1)+1$, 即 $n-j$ 与 $a-n+j-1$ 相继. 所以，$a-n,a-n+1,\cdots,a-n+j-1,n-j,n-j+1,\cdots,n-1,n$ 相继递增,这个序列之和等于(7)式中前 $(n-j+1)$ 个 a 的和减去 $a-n+j$. 这时，$a=2(n-j)$, (7)式中余下的 $(k-j-1)$ 个 a 可分出 $2(k-j-1)$ 个 $(n-j)$,而 $n-j=a-n+j$, 这样共余下 $2(k-j-1)+1$ 个 $(n-j)$, 且 $n-j\geqslant a-n-1$.由归纳假设,这些 $n-j$ 可分拆为 $1,2,\cdots,a-n-1$. 从而 k 个 a 可分拆为 $1,2,\cdots,n$. 若 $n-j$ 与 $a-n+j$ 相继,即 $n-j=a-n+j+1$. 这时，$a-n,a-n+1,\cdots,a-n+j,n-j,\cdots,n-1,n$ 相继递增,这个序列之和等于(7)式中前 $(n-j+1)$ 个 a 的和. 余下的 $k-j-1$ 个 a 满足题设条件，由归纳假设可分拆为 $1,2,\cdots,a-n-1$. 从而,k 个 a 可分拆为 $1,2,\cdots,n$.

乙　$a>2n$. 设

$$k\text{个}\begin{cases} a=n & +n-2k+1+a-2n+2k-1,\\ a=n-1 & +n-2k+2+a-2n+2k-1,\\ \cdots & \cdots\qquad\qquad\cdots\\ a=n-k+1+n-k & +a-2n+2k-1.\end{cases}\tag{8}$$

显然,(8)式等号右边第一列和第二列的数 $n,n-1,\cdots,n-k+1,n-k,\cdots,n-2k+1$ 相继递减. 对(8)式等号右边的 k 个 $a-2n+2k-1$,满足 $a-2n+2k-1\geqslant n-2k$. 事实上,由 $a>2n\Longrightarrow(a-2n)[a-(n+1)]\geqslant 0\Longrightarrow a^2-(3n+1)a+2n(n+1)\geqslant 0\Longrightarrow a-3n-1+\frac{2n(n+1)}{a}\geqslant 0\Longrightarrow a-3n-1+4k\geqslant 0\Longrightarrow a-2n+2k-1\geqslant n-2k$. 所以这 k 个 $a-2n+2k-1$ 满足题设条件，由归纳假设可分拆为 $1,2,\cdots,n-2k$. 故 k 个 a 可分拆为 $1,2,\cdots n$. 由归纳法原理,定理 3 得证.

参 考 文 献

[1] Yousef Alavi, A. J. Boals, Gary Chartrand, Paul Erdös and O. R. Oellermann, The ascending subgraph decomposition problem, *Congressus Numerautium*, 58 (1987)1—7.

ON THE ASCENDING SUBGRAPH DECOMPOSITION PROBLEM

Ma Ke-Jie

(Institute of Operations Research, Qufu Teachers University)

ABSTRACT

In this paper, some results on the following conjecture posed by Yousef Alvi et al. [1] in 1987 are derived: Let G be a union of stars $S_1, S_2, \cdots, S_k$ and $n \geqslant 2$ and k be natural unmbers such that S_i has the size a_i $(n \leqslant a_i \leqslant 2n-2)$ and G has the size $\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n+1}{2}$. Then G has an ascending star decomposition. The main result is that the conjecture is true under one of the following conditions:

1. $n \leqslant a_i \leqslant a_{i+1}, (i=1, 2, \cdots, k-2)$, and $a_{k-1} < 2(n-k+2), n \leqslant a_k \leqslant 2n-2$;
2. $k \leqslant 5$;
3. $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a$, $n \leqslant a \leqslant 2n-2$.