系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
11 (2) (1991), 162—167

关于图 G_Δ 的圈秩较小时的边色数分类

赵 诚[1)]
(山东大学经济系，济南 250100)

1. 引 言

设G是简单连通图，由 Vizing 定理知，$\Delta(G)\leqslant x'(G)\leqslant\Delta(G)+1$，其中 $\Delta(G)$ 表示图G的最大顶点次，$x'(G)$是G的边色数．若 $x'(G)=\Delta(G)$，则称G为第一类图，记为 $G\in C^1$；否则称G为第二类图，记为 $G\in C^2$．其它图论术语及记号均与[1]一致．

令 $F=\{u\mid d(u)=\Delta(G),\ u\in V(G)\}$，记 $G_\Delta=G[F]$．一条边e（或顶点v）称为是临界的，如果 $x'(G)>x'(G\backslash e)$（或 $x'(G)>x'(G\backslash v)$）成立．图G称为是临界的，如果 $G\in C^2$，且G的每一边是临界的．对于 $v\in V(G)$，令 $d^*(v)=|\{u\mid(v,u)\in E(G),\text{ 且 } d(u)=\Delta(G)\}|$，则 Vizing 引理[2]可表述为

Vizing 引理[2]．设G是临界图，又$(u,v)\in E(G)$，则

$$d^*(v)\geqslant\begin{cases}\Delta(G)-d(u)+1, & \text{当 } d(u)<\Delta G \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } d(u)=\Delta(G)\text{时}.\end{cases}$$

2. 有关引理与结果

星多重图[3]G是一个多重图，其中有一个顶点v^*关联每一条非简单边，v^*称为星中心．

定理[3]．设G为星多重图，则 $\Delta(G)\leqslant x'(G)\leqslant\Delta(G)+1$．

引理 1[3]．设G为星多重图，且 $x'(G)=\Delta+1$，则G含有临界子图H满足 $\Delta(G)=\Delta(H)$．

引理 2[3]．设G是临界星多重图，具有星中心v^*，且 $d(v^*)=\Delta(G)$，又设 $(u,w)\in E(G)$，$w\neq v^*$，则

$$d^*(w)\geqslant\begin{cases}\Delta(G)-d(u)+1, & \text{若 } d(u)<\Delta(G),\\ 2, & \text{若 } d(u)=\Delta(G).\end{cases}$$

引理 3．设G是星多重图，具有星中心v^*，且 $d(v^*)=\Delta(G)$．

1) 设 $d^*(w)\leqslant 1,w\in V(G)\backslash\{v^*\}$．若 $\Delta(G\backslash w)=\Delta(G)$，则 $x'(G)=x'(G\backslash w)$．

2) 设 $e=(u,v)\in E(G)$，$\{u,v\}\subset V(G)\backslash\{v^*\}$，且 $d(v)\leqslant\Delta(G)-d^*(u)$，$d^*(u)\geqslant 2$．若 $\Delta(G\backslash e)=\Delta(G)$，则 $x'(G\backslash e)=x'(G)$．

证．1) 证明见[2]中定理 2．

---

1) 作者现在通信地址：Zhao Cheng, Dept. of Math. West Virginia University, College of Arts and Sciences, Morgantown, WV 26506, U. S. A.

1987 年 5 月 9 日收到，1989 年 8 月 15 日收到一次修改稿，1990 年 1 月 10 日收到二次修改稿．

2) 若 $x'(G)=\Delta(G)$，则 $\Delta(G)=x'(G)\geqslant x'(G\backslash e)\geqslant\Delta(G\backslash e)=\Delta(G)$. 故 $x'(G)=x'(G\backslash e)$.

若 $x'(G)=\Delta+1$，往证边 e 不是临界边. 用反证法. 设 e 为临界边，则 e 必为 G 的某个临界子图 H 的边. 由于 H 为 G 的子图，则下述关系成立: $d_H^*(u)\leqslant d_G^*(u)$, $d_H(v)\leqslant d_G(v)$. 由引理 2 知，$d^*(u)\geqslant\Delta-d_H(v)+1\geqslant\Delta-(\Delta-d_G^*(u))+1=d^*(u)+1$，矛盾. 故 e 不是临界边，即 $x'(G\backslash e)=\Delta(G)+1$. 证毕.

类似引理 3，下面引理成立.

引理 3′. 对于简单图 G，1) 设 $d^*(w)\leqslant 1$, $w\in V(G)$. 若 $\Delta(G\backslash w)=\Delta(G)$，则 $x'(G\backslash w)=x'(G)$.

2) 设 $e=(u,v)\in E(G)$，且 $d(v)\leqslant\Delta-d^*(u)$, $d^*(u)\geqslant 2$. 若 $\Delta(G\backslash e)=\Delta(G)$，则 $x'(G\backslash e)=x'(G)$.

引理 4[4]**.** 设 G 为简单连通图，且 $G\in C^1$, G 不是回路，G_Δ 是回路，则 1) $N(G_\Delta)=\{v\mid d(v)=\Delta-1,\ v\in V(G)\}$，其中 $N(G_\Delta)$ 表示 $V(G_\Delta)$的所有邻点集合; 2) $\delta(G)\geqslant\Delta-1$; 3) G 为临界图.

定理 A[4]**.** 设 G 为简单连通图，G_Δ 的圈秩 $=1$, $\delta(G_\Delta)\leqslant 1$，则 $G\in C^1$.

定理 B[4]**.** 设 G 是 2-边连通图，连通图 G_Δ 的圈秩$=2$, $\delta(G_\Delta)=1$，则 $G\in C^1$.

引理 5[5]**.** 设简单图 G 满足 $|E(G)|>\Delta\left[\frac{|V(G)|}{2}\right]$，则 $G\in C^2$.

引理 6. 设简单图 G 为连通的，G_Δ 的圈秩为 1，且 $\Delta(G)-2=|V(G)|-r$, $r=|V(G_\Delta)|$, $G\in C^2$. 如果 $|V(G)|\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，则 $|E(G)|>\Delta\left[\frac{|V(G)|}{2}\right]$.

证. 由于 G_Δ 的圈秩为 1，由定理 A 知 $\delta(G_\Delta)=2$，从而 G_Δ 是回路，由引理 4 知

$$
\begin{aligned}
2|E(G)|&=r\cdot\Delta+(|V|-r)(\Delta-1)=(|V|-1)\cdot\Delta+\Delta-|V|+r\\
&=(|V|-1)\cdot\Delta+2.
\end{aligned}
$$

证毕.

引理 7. 设简单图 G 为 2-边连通图，$G\in C^2$，且连通图 G_Δ 的圈秩为 2. 对于 $u\in V(G_\Delta)$, $d_{G_\Delta}(u)=2$，则 $N_G(u)$ 中的顶点次$\geqslant\Delta(G)-1$.

证. 用反证法. 设有边$(u,x)\in E(G)$, $x\in N_G(u)$, $d_G(x)\leqslant\Delta-2$，且 $d_{G_\Delta}(u)=2$. 因为 $G\in C^2$，由引理 3′, $d(x)\leqslant\Delta-2=\Delta-d^*(u)$，故 (u,x) 不是临界边，即 $G\backslash(u,x)\in C^2$，由定理 B 知 $\delta(G_\Delta)=2$，故 $[G\backslash(u,x)]_\Delta$ 的圈秩$\leqslant 1$, $G\backslash(u,x)$ 是连通的，且 $d_{G\backslash(u,x)}(x)\leqslant\Delta-3$，由定理 A 知，因为 $G\backslash(u,x)\in C^1$，故 $[G\backslash(u,x)]_\Delta$ 为回路，且当 $\Delta\geqslant 3$ 时，$G\backslash(u,x)$不是回路，故由引理 4 知 $\delta(G\backslash(u,x))\geqslant\Delta-1$，矛盾. 证毕.

引理 8[6]**.** 对于简单图 G, $|V(G)|=n$，顶点次序列为 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，设 q 为一正整数，且 $0\leqslant q\leqslant n-3$，如果对每一个 k，满足 $q<k<\frac{1}{2}(n+q)$，使得

$$d_{k-q}\leqslant k\Rightarrow d_{n-k}\geqslant n-k+q,$$

则对每一基数为 q 的独立边集 F'，存在 Hamilton 回路含有 F'.

引理 9[3]**.** 设 G 是无环多重图，G 至多有两个最大次点 b（可能是 c）. 设所有的非简单边关联着 b，而且如果 b 和 c 之间有多重边邻接，则设有顶点 w 邻接 c，但 w 不邻接 b. 又设 G 不含三个顶点的导出子图具有 $\Delta(G)+1$ 条边，则 $x'(G)=\Delta(G)$.

3. 定理及证明

定理 1. 设 G 为简单连通图，又设连通图 G_Δ 的圈秩 $\leqslant 2$，且 $\Delta(G)-2=|V(G)|-r$，$(r=|V(G_\Delta)|)$，则 $G\in C^2$ 当且仅当 $|E(G)|\geqslant\Delta\left[\frac{|V(G)|}{2}\right]+1$.

证. **充分性.** 当 $|E(G)|\geqslant\Delta\left[\frac{|V|}{2}\right]+1$ 时，由引理 5 知 $G\in C^2$.

必要性. 设 $G\in C^2$，往证 $|E(G)|>\Delta\left[\frac{|V(G)|}{2}\right]$.

情况 1. G_Δ 的圈秩 $=1$.

情况 1.1. $|V(G)|\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，由引理 6 知 $|E(G)|>\Delta\left[\frac{|V(G)|}{2}\right]$.

情况 1.2. $|V(G)|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，此时可证 $G\in C^1$. 用反证法. 设 $G\in C^2$，往证 $\Delta-2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$. 事实上，若不然设 $\Delta-2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，从引理 6 的证明知，此时 G_Δ 的圈秩 $=1$，必然有 G_Δ 为回路 C，且由引理 4 知 $\delta(G)\geqslant\Delta-1$. 设 $G_{\Delta-1}$ 表示 G 中次为 $\Delta-1$ 的顶点导出的子图，显然 $V(G_\Delta)=V(G)\backslash V(G_{\Delta-1})$，又设 $d_{G_{\Delta-1}}(u)$ 为 u 在 $G_{\Delta-1}$ 中的顶点次，则图 G_Δ 与 $G_{\Delta-1}$ 之间的连边数目为

$$r(\Delta-2)=(|V|-r)(\Delta-1)-\sum_{u\in V(G_{\Delta-1})}d_{G_{\Delta-1}}(u). \tag{1}$$

已知 $\Delta-2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$，故 $\Delta-2=|V|-r\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$；且 $|V|\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$，故 $r\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$. 因此

a) $r(\Delta-2)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

b) $(|V|-r)(\Delta-1)=(|V|-r)(\Delta-2+1)\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ 2)$.

c) $\sum_{u\in V(G_{\Delta-1})}d_{G_{\Delta-1}}(u)\equiv 0\quad(\mathrm{mod}\ 2)$.

故 a) 式 $\neq$ b) 式 $-$ c) 式，这与(1)矛盾. 从而 $\Delta-2$ 为偶数.

由于 $G\in C^2$，$|V|$ 为偶数，且 G_Δ 为回路，设 G_Δ 为回路 $C=a_1a_2\cdots a_ra_1$；从 G 构造一个新的 Δ-正则图 G^*，满足 $V(G^*)=V(G)\cup\{u^*,v^*\}$，$G^*$ 的边为 G 中的边并加上从 u^* 点引出 $\frac{\Delta-2}{2}$ 条边，这些边关联着 $G_{\Delta-1}$ 的 $\frac{|V|-r}{2}$ 个顶点，再加上从 v^* 引出 $\frac{\Delta-2}{2}$ 条边，这些边关联着 $G_{\Delta-1}$ 的另外 $\frac{|V|-r}{2}$ 个顶点，再加上 u^* 与 v^* 之间的 $\frac{\Delta+2}{2}$ 条多重边，显然 G^* 是 Δ-正则图，且为星多重图.

往证 $G^*\in C^1$. 因为 $G^*\backslash a_1$ 的最大次顶点集合为 $\{a_3,a_4,\cdots,a_{r-1},u^*,v^*\}$，且 a_3，a_{r-1} 只邻接一个最大次顶点，应用引理 3 知，$x'(G^*\backslash a_1)=x'(G^*\backslash a_1\backslash a_3\backslash a_{r-1})$，反复应用引理 3 (因 $G_\Delta\backslash a_1$ 是路)知

$$x'(G^*\backslash a_1)=x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash\cdots\backslash a_{r-1}).$$

记 $G_1^*=G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash\cdots\backslash a_{r-1}$，则 G_1^* 满足引理 9 的条件，故 $x'(G_1^*)=\Delta(G)$，从而 $x'(G^*\backslash a_1)=\Delta$.

因为 G^* 是 $|V(G)|+2$ 个点的 Δ-正则图，现给 $G^*\backslash a_1$ 进行 Δ-正常边着色，星多重图 $G^*\backslash a_1$ 有 Δ 个次为 $\Delta-1$ 的顶点，而且 $|V(G^*\backslash a_1)|$ 为奇数，故每一种颜色恰好只在一个顶点上不出现，且每一个次为 $\Delta-1$ 的顶点，恰好只有一种颜色不出现．因此，在 $G^*\backslash a_1$ 的 Δ-正常边着色中，a_1 点可以增加上去，从而 G^* 具有 Δ-正常边着色．

因此，$x'(G)\leqslant x'(G^*\backslash u^*\backslash v^*)\leqslant x'(G^*)=\Delta$，矛盾．

情况 2. G_Δ 的圈秩＝2．

情况 2.1. $|V(G)|\equiv 1\pmod 2$．由条件 $\Delta-2=|V|-r$，及引理 7 知，

$2|E(G)|=r\Delta+(|V|-r)(\Delta-1)=(|V|-1)\Delta+2$．即 $|E|>\Delta\left[\dfrac{|V|}{2}\right]$．

情况 2.2. $|V(G)|\equiv 0\pmod 2$．因为 $G\in C^2$，由引理 7，$\delta(G)\geqslant\Delta-1$．又因 G_Δ 是连通的，从定理 B 知 G_Δ 的次序列有两种可能：一是 $(2,\cdots,2,3,3)$；另一是 $(2,\cdots,2,4)$．往证 $\Delta-2\equiv 0\pmod 2$．用反证法．设 $\Delta-2\equiv 1\pmod 2$，因此，$\Delta-2=|V|-r\equiv 1\pmod 2$，故 $r\equiv 1\pmod 2$．则在 G 中，G_Δ 与 $G_{\Delta-1}$ 之间的连边数目为

$$r(\Delta-2)-2=(|V|-r)(\Delta-1)-\sum_{u\in V(G_{\Delta-1})}d_{G_{\Delta-1}}(u).$$

由于左式$\equiv 1\pmod 2$，右式$\equiv 0\pmod 2$，矛盾．从而 $\Delta-2\equiv 0\pmod 2$ 成立．现可模仿情况 1，构造 $|V(G)|+2$ 个点的新图 G^*，类似于情况 1，设 $V(G_\Delta)=\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$，且 $d_{G_\Delta}(a_1)=2$．

考虑图 $G^*\backslash a_1$，则 $G^*\backslash a_1$ 的最大次顶点集合含在 $\{a_2,a_3,\cdots,a_r,u^*,v^*\}$ 之中．利用图 G_Δ 的性质，及反复利用引理 3 知 $x'(G^*\backslash a_1)=x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash\cdots\backslash a_r)$，以下可以完全模仿情况 1 知，$G^*\in C^1$，从而 $G\in C^1$，矛盾．故必要性成立．证毕．

定理 2. 设 G 为 2 边连通简单图，又设连通图 G_Δ 的圈秩为 2，且 $\Delta(G)-2=|V(G)|-r-k$，$r=|V(G_\Delta)|$，$\delta(G)\geqslant\Delta-2$，$|E(G)|\leqslant\Delta\left[\dfrac{|V(G)|}{2}\right]+(1-k)$（$k$ 为正整数），又设 $|V(G)|$ 为奇数，则 $G\in C^1$．

证．我们将用反证法证明定理 2，为此在 $G\in C^2$ 的条件下，证明几个有关性质：

性质 1. G 恰好有 k 个 $\Delta-2$ 次顶点．

证．设 G 有 m_1 个 $\Delta-1$ 次顶点，m_2 个 $\Delta-2$ 次顶点，则 $m_1+m_2=|V|-r$．由引理 7 知 G 至少有 $|V|-r-k$ 个次为 $\Delta-1$ 的顶点，故 $m_1\geqslant|V|-r-k$．于是 $m_2\leqslant k$．因为

$$\begin{aligned}2|E(G)|&=r\cdot\Delta+(|V|-r)(\Delta-1)-m_2\\&=(|V|-1)\cdot\Delta+2-k-m_2\\&\leqslant(|V|-1)\cdot\Delta+2-2k,\end{aligned}$$

故 $k\leqslant m_2$，即 $m_2=k$，$m_1=|V|-r-k$．

性质 2. $V(G)\backslash(V(G_\Delta)\cup N(G_\Delta))=\varnothing$．

证．用反证法．设 $V(G)\backslash(V(G_\Delta)\cup N(G_\Delta))\neq\varnothing$，则必有点 $u\in V(G)\backslash(V(G_\Delta)\cup N(G_\Delta))$，由于 G 是连通的，故存在边 $e=(x,y)$，其中 $x\in N(G_\Delta)$，$y\in V(G)\backslash(V(G_\Delta)\cup N(G_\Delta))$．

由引理 3′ 知 $x'(G)=x'(G\backslash e)$.

1) 当 $d_G(x)=\Delta-1$ 时，设 $V(G_\Delta)=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，且 $d_{G_\Delta}(a_1)=2$，则 $(a_1,x)\in E(G)$，对于图 $G\backslash e$，因 $d_{G\backslash e}(x)=\Delta-2$，应用引理 3′ 知 (a_1, x) 不是临界边，即
$$x'(G)=x'(G\backslash e)=x'(G\backslash e\backslash(a_1, x))=x'(G\backslash(a_1, x)),$$
但是 $[G\backslash(a_1, x)]_\Delta$ 的圈秩$\leqslant 1$，且 $G\backslash(a_1, x)$ 为连通的，故由引理 4 及定理 A 知 $G\backslash(a_1, x)\in C^1$，因为 $d_{G\backslash(a_1,x)}(x)=\Delta-2$，矛盾.

2) 当 $d_G(x)=\Delta-2$ 时，仍用上述记号. 由引理 7 知，$x\bar{\in} N(a_i)$，$a_i\in V(G_\Delta)$，其中 $d_{G_\Delta}(a_i)=2$. 由定理 B 及引理 7 知 G_Δ 的次序列只能为 $(2, \cdots, 2, 3, 3)$. 设
$$d_{G_\Delta}(a_i)=2\ (1\leqslant i\leqslant r-2),\ d_{G_\Delta}(a_{r-1})=d_{G_\Delta}(a_r)=3;$$
若 $x\in N(a_j)$，$r-1\leqslant j\leqslant r$，因为 $d_{G\backslash e}(x)=\Delta-3$，此时 x 必须与 a_{r-1} 和 a_r 皆相邻接. 由引理 3′，知边 (x, a_r) 不是临界边，即 $x'(G)=x'(G\backslash e)=x'(G\backslash e\backslash(x,a_r))\leqslant x'(G\backslash(x, a_r))\leqslant x'(G)$，也即 $x'(G)=x'(G\backslash(x, a_r))$. 然而 $[G\backslash(x, a_r)]_\Delta$ 的圈秩$\leqslant 1$，且 $G\backslash(x, a_r)$ 为连通的，$d_{G\backslash(x,a_r)}(x)=\Delta-3$，故由定理 A 及引理 4 知 $G\backslash(x, a_r)\in C^1$，从而 $G\in C^1$. 矛盾. 性质 2 成立.

性质 3. 设 $V(G_\Delta)=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，且 $d_{G_\Delta}(a_i)=2$，$1\leqslant i\leqslant r-2$，$d_{G_\Delta}(a_{r-1})=d_{G_\Delta}(a_r)=3$. 又设 G 中 $\Delta-2$ 次点的集合为 $\{u_1, \cdots u_k\}$，则 G 中所有 $\Delta-2$ 次点均与 a_{r-1}, a_r 邻接，且 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ 为独立点集.

证. 因为 $u_i\bar{\in} N(a_j)$，$1\leqslant j\leqslant r-2$，$1\leqslant i\leqslant k$. 若 $d^*(u_i)\leqslant 1$，由性质 2 知 $u_i\in N(G_\Delta)$. 则存在边 $(u_i, a)\in E(G)$，$a\in V(G_\Delta)$，且 $a\in\{a_{r-1}, a_r\}$. 由引理 3′，(u_i, a) 不是临界边，但是 $[G\backslash(u_i, a)]_\Delta$ 的圈秩$\leqslant 1$，且 $G\backslash(u_i, a)$ 为连通的图，从而 $G\backslash(u_i, a)\in C^1$，矛盾. 因此，$d^*(u_i)=2\ (1\leqslant i\leqslant k)$ 且 u_i 与 a_{r-1}, a_r 都邻接.

若 $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ 不是独立集，设 $e=(u_i, u_j)\in E(G)$，由引理 3′ 知 $x'(G\backslash e)=x'(G)$，但 $G\backslash e$ 中有 $\Delta-3$ 次点与 a_{r-1}, a_r 相邻接，由性质 2 的证明可知 $G\backslash e\in C^1$，矛盾. 故 $\{u_1, \cdots, u_k\}$ 为独立点集.

定理 2 的证明

情况 1. $k=1$. G 只有一个 $\Delta-2$ 次点且 $|V(G)|$ 为奇数. 令 $\beta(u)=\Delta-d_G(u)$，其中 $u\in V(G)$. 构造图 G^*，其中 $V(G^*)=V(G)\cup\{v^*\}$，而且 v^* 向 G 的每一点 u 关联 $\beta(u)$ 条边，并且 $E(G)$ 仍为 G^* 的边. 易见 G^* 为 Δ-正则图且 $|V(G^*)|$ 为偶数. G^* 中只有 v^* 与 u_1 之间有 2 重边，往证 $G^*\backslash a_1\in C^1$，其中 $d_{G_\Delta}(a_1)=2$. 由定理 B 及引理 7 知 G_Δ 的次序列为 $(2, \cdots, 2, 3, 3)$.

情况 1.1. G_Δ 为 2-连通图. 设 $V(G_\Delta)=\{a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}, a_r\}$，$d_{G_\Delta}(a_i)=2$，$1\leqslant i\leqslant r-2$，$d_{G_\Delta}(a_{r-1})=d_{G_\Delta}(a_r)=3$. 因为 $G^*\backslash a_1$ 的最大次顶点集合含在集合 $\{v^*, u_1, \cdots, u_k, a_2, a_3, \cdots, a_r\}$ 之中，且 $\delta([G^*\backslash a_1]_\Delta)\leqslant 1$，反复引用引理 3 知 $x'(G^*\backslash a_1)=x'(G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta))$. 但 $G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta)$ 中只有两个最大次顶点 v^*, u_1，且满足引理 9，从而 $G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta)\in C^1$，即 $G^*\backslash a_1\in C^1$.

情况 1.2. G_Δ 有割边. 则 G_Δ 的两个基圈一定不相交，设 $a_1\in A_1$，其中 A_1 为 G_Δ 的一个基圈，$a_2\in A_1$ 且 $(a_1, a_2)\in E(A_1)$，$d_{G_\Delta}(a_2)=2$，由引理 3，$x'(G^*\backslash a_1)=x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2)$. 又设 A_2 为 G_Δ 的另一基圈，$a\in A_2$，$d_{G_\Delta}(a)=2$. 设 $b_j\in V(G)\backslash\{u_1, \cdots, u_k\}\backslash V(G_\Delta)$，

则 $(a, b_j) \in E(G^*)$. 令 $G_1 = G^*\backslash a_1\backslash a_2$, 则 $d_{G_1}(b_j) \leqslant \Delta - 2$. 利用引理 3 知$x'(G^*\backslash a_1) = x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2) = x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash (a, b_j))$. 继尔反复用引理 3 知, $x'(G^*\backslash a_1) = x'(G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash (a, b_j)\backslash E(G_\Delta))$. 由引理 9 知 $G^*\backslash a_1\backslash a_2\backslash (a, b_j)\backslash E(G_\Delta) \in C^1$, 故 $G^*\backslash a_1 \in C^1$.

由于 G^* 为 Δ-正则图, $|V(G^*\backslash a_1)|$ 为奇数, 则从 $G^*\backslash a_1 \in C^1$ 可推知 $G^* \in C^1$. 其证明与定理 1 一样, 从而 $G \in C^1$, 矛盾.

情况 2. $k > 1$. 构造 Δ-正则图 G^*, G^* 仍为从 G 添加一个点 v^* 和若干边所得. 先作图 G', 其中 $V(G') = V(G)$. 因 G 的 $\Delta - 2$ 次顶点集为 $\{u_1, \cdots, u_k\}$, 令 $P_k = u_1u_2\cdots u_k$ 为一路. 则 $E(G') = E(G) \cup E(P_k)$, 由性质 3 知 G' 为简单图, 且 $d_{G'}(u_1) = d_{G'}(u_k) = \Delta - 1$, $d_{G'}(u_i) = \Delta$, $2 \leqslant i \leqslant k - 1$. 由 G' 作 G^*, 其中 $V(G^*) = V(G') \cup \{v^*\}$, 且 v^* 向 G' 的点连接 $\beta(u) = \Delta - d_{G'}(u)$ 条边, $u \in V(G')$. 则 G^* 为 Δ-正则简单图. 由定理 B 及引理 7 知 G_Δ 的次序列为 $(2, 2, \cdots, 2, 3, 3)$, 设 $V(G_\Delta) = \{a_1, \cdots, a_r\}$, $d_{G_\Delta}(a_i) = 2$, $1 \leqslant i \leqslant r - 2$, $d_{G_\Delta}(a_{r-1}) = d_{G_\Delta}(a_r) = 3$, 往证 $G^*\backslash a_1 \in C^1$.

情况 2.1. G_Δ 为 2-连通. 类似于情况 1, 反复利用引理 3′ 知 $x'(G^*\backslash a_1) = x'(G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta))$. 但$[G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta)]_\Delta$ 为回路 $u_1u_2\cdots u_kv^*u_1$, 且 u_j 与 a_{r-1}, a_r 邻接, $1 \leqslant j \leqslant k$, $d_{G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta)}(a_r) \leqslant \Delta - 2$. 在最大次点所在的连通分支中利用引理 4 知$G^*\backslash a_1\backslash E(G_\Delta) \in C^1$, 从而 $G^*\backslash a_1 \in C^1$.

情况 2.2. G_Δ 有割边. 证明与情况 1 相同, 只是将引理 3 换成引理 3′.

现从 $G^*\backslash a_1 \in C^1$, 推知 $G^* \in C^1$. 因为 $G^*\backslash a_1$ 具有 Δ-正常边着色, 图 $G^*\backslash a_1$ 有 Δ 个次为 $\Delta - 1$ 的顶点, 且 $|V(G^*\backslash a_1)|$ 为奇数. 故每一颜色恰好只在一个顶点上不出现, 而且每一次为 $\Delta - 1$ 的顶点恰好失去一种颜色, 因此 $G^* \in C^1$, 从而 $G^*\backslash v^*\backslash E(P_k) = G \in C^1$. 矛盾. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory With Application, MacMillan, New York 1976.

[2] Chetwynd, A. G. and Hilton, A. J. W., Regular Graphs of High Degree Are 1-factorizable, *Proc. London Math. Soc.*, 50: 3(1985), 193—206.

[3] Chetwynd, A. G. and Hilton, A. J. W., Critical star multigraphs, *Graphs and Combin.*, 2(1986), 209—221.

[4] 赵 诚, 边色数分类问题及其有关性质, 科学通报, 2(1987), 154.

[5] Hilton, A. J. W., Recent Progress on Edge-Coloring Graphs, *Dis. Math.*, 64(1987), 303—307.

[6] Chvatal, V., On Hamilton's Ideas, *J. Combin. Theory* (B), 12(1972), 163—168.

[7] 赵 诚, 边色数分类的两个充要条件, 应用数学学报(即将发表).

[8] 张忠辅、张建勋、王建方, 一个边着色定理, 科学通报, 3(1984), 139—140.

ON THE CHROMATIC INDEX OF GRAPHS WHEN THE CYCLE RANK OF G_Δ IS SMALL

ZHAO CHENG

(*Shandong University*, 250100)

ABSTRACT

The chromatic index of graphs is studied, when the cycle rank of G_Δ is not greater than 2, and necessary and sufficient conditions for graphs to be C^2 graphs are obtained under certain conditions.