系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
10(3) (1990), 265—268

关于连通图幂中边不交1-因子[1)]

张 建 勋[2)]
（兰州铁道学院数学系）

§1. 引　言

本文讨论连通图幂 G^n 存在 n 个边不交1-因子的条件. 本文中所指图均为简单图. 除特别强调外,所用术语、记号均与[1]中一致.

定义. 设 G 为简单连通图, n 为自然数,则 G^n 为 $V(G^n)=V(G)$, $E(G^n)=\{uv: d_G(u,v)\leqslant n, u,v\in V(G)\}$.

对 G^n 的因子已有不少结果. 主要有以下几个:

定理 A[2]. 如果 G 为连通图, n 为自然数,且 $n\cdot\nu(G)$ 为偶数, $\nu(G)\geqslant n+1$, 则 G^{n+1} 含有 n-因子.

定理 B[3]. 设 G 为偶阶连通图, 且 $\nu(G)\geqslant n+1$, 则 G^{n+1} 含 n 个边不交1-因子.

定理 C[4]. 偶阶连通无爪图的二次幂含两个边不交1-因子.

在[5]中, Nebeský 给出猜想: 设 G 为偶阶连通图, n 为自然数, 如果 G 不含同构于 $K_{1,n+1}$ 的点导出子图,则 G^n 存在 n 个边不交1-因子. 本文部分证明了该猜想的正确性.

§2. $\Delta(T)\leqslant 3$ 的树及无爪图

定理 2.1. 设 n 为自然数, 树 T 有1-因子, 且 $\Delta(T)\leqslant 3$, $\nu(T)\geqslant n+1>3$, 则 T^n 含 n 个边不交1-因子.

定理 2.2. 设 G 为偶阶连通无爪图, n 为自然数,且 $\nu(G)\geqslant n+1$, 则 G^n 含 n 个边不交1-因子.

为了给出定理的证明,先给出几个引理. 令 P_{2s} 表示含 $2s$ 个点的路.

引理 2.1. 如果 $n+1\leqslant 2s\leqslant 2n+2$, 则 P_{2s}^n 含 n 个边不交1-因子.

结论容易验证,证明略去.

如果 T 为 $K_{1,3}$ 的剖分图, 且 $T-x=P_{2n_1}\cup P_{2n_2}\cup P_{2n_3+1}$, $d_T(x)=3$, 则记 T 为 $T_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$ $(2n_2\leqslant 2n_1)$.

引理 2.2. 如果 $T_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$ 满足: i) $2n_1\leqslant n$, $2n_3\leqslant n$; ii) $2n_1+2n_2>n$, $2n_2+$

---

1) 甘肃省自然科学基金资助项目.
2) 本文是作者在山东大学数学系学习期间所作.
1987年12月4日收到,1988年11月5日收到修改稿,1989年9月1日收到压缩稿.

$2n_3 \geqslant n$，$n > 2$，则 $T^n_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$ 含 n 个边不交 1-因子．

该引理证明较复杂．$T^n_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$ 的 n 个边不交 1-因子可由 $2n_1$，$2n_2$，$2n_3$ 间的关系分几种情况构造而得．证明略去．

如果树 T 满足：$xy \in E(T)$，$d_T(x) = d_T(y) = 3$，且 $T - \{x, y\} = P_{2n_1} \cup P_{2n_2} \cup P_{2n_3} \cup P_{2n_4}$，$x$，$y$ 为 T 中仅有的两个 3 度顶点．x 与 P_{2n_1}，P_{2n_2} 的各一端点相邻，则记 T 为 $T_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ $(2n_1 \leqslant 2n_2,\ 2n_3 \leqslant 2n_4)$．

引理 2.3. 设 n 为自然数 $(n > 2)$，如果 $T_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 满足 $1 < 2n_i \leqslant n$ $(i = 1, 2,3,4)$，$2n_1 + 2n_2$，$2n_3 + 2n_4 > n$，则 $T^n_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 含 n 个边不交 1-因子．

简要证明. 分两种情况讨论．

情况 1．如果 $2n_1, 2n_3 < n$．由 $T_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4} - xy = P_{2n_1+2n_2+1} \cup P_{2n_3+2n_4+1}$．对这两个路分别引用引理 2.1，且调整非饱和点即可．

情况 2．不妨设 $2n_1 = n$，则引用引理 2.2 及在 $2n_3 = n$ 时的特性即可．

引理 2.4. 设 T 为有 1-因子的树． 如果存在 $uv \in E(T)$，使 $T - uv = Tu \cup Tv$，且 $d_{(Tu)} \leqslant n$（n 为自然数），将 $V(Tu)$ 编号为 $V(Tu) = \{u_1, u_2, \cdots, u_{|V(Tu)|}\}$，使

$$d_T(u,u_i) \leqslant d_T(u,u_j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant |V(Tu)|.$$

令 T' 为 $V(T') = V(T)$，$E(T') = E(Tv) \cup \{uv,\ u_iu_{i+1},\ 1 \leqslant i < |V(Tu)|\}$，则 T' 为有 1-因子的树，且 $(T')^n$ 为 T^n 的支撑子图，$\Delta(T') \leqslant \Delta(T)$．

此引理显然．

定理 2.1 的简要证明.

设 T 为满足定理条件的任意树，则可反复应用引理 2.4 得树 T^*，满足

i）如果 $uv \in E(T^*)$，$T^* - uv = T^*u \cup T^*v$，$d(T^*u) \leqslant n$，则 $\forall x \in V(T^*u)$，$d_{T^*}(x) \leqslant 2$;

ii）T^* 有 1-因子 M，$\Delta(T^*) \leqslant 3$，且 $(T^*)^n$ 为 T^n 的支撑子图．

这样只须证对所有满足上述条件的 T^*，$(T^*)^n$ 含 n 个边不交 1-因子．

当 $\nu(T^*) = n + 1$ 或 $n + 2$ 时，由引理 2.1 知命题成立．

假设对所有 $\nu(T^*) < 2k$，$2k > n + 2$ 时命题成立．

当 $\nu(T^*) = 2k$ 时，分两种情况讨论．

情况 1．如果存在 $uv \in E(T^*) \backslash M$，且 $T^* - uv = T^*u \cup T^*v$，$\nu(T^*u)$、$\nu(T^*v) > n$，则由归纳假设可得命题成立．

情况 2．如果情况 1 的条件不成立，易验证 T^* 为 P_{2r}，$T_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$，$T_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 之一，且满足对应引理的条件．

由归纳原理得命题成立．

推论 2.1. 设 G 为简单图，$n(n > 2)$ 为自然数，如果 G 含有 1-因子的支撑树 T，且 $\Delta(T) \leqslant 3$，$\nu(G) \geqslant n + 1$，则 G^n 含 n 个边不交 1-因子．

引理 2.5[5]．连通偶阶无爪图含 1-因子．

引理 2.6. 设 G 为偶阶连通无爪图，则对 G 中任意一点 v，G 存在含 1-因子的支撑树 T，且 $\Delta(T) \leqslant 3$，$d_T(v) < 3$．

此引理可由归纳法直接得到，证明略去．

由推论 2.1、引理 2.5、引理 2.6 及定理 C 可知定理 2.2 成立.

§3. 一般偶阶连通图

定理 3.1. 设 G 为有 1-因子的连通图，且 $\nu(G) \geqslant 2k+2$，则 G^{2k+1} 含 $2k+1$ 个边不交 1-因子.

如果 x, y, w 为 G 中仅有的三个 3 度顶点，且 $G[\{x,y,w\}] = K_3$，$\Delta(G) \leqslant 3$，$G - \{xy, yw, xw\} = P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup P_{n_3}$，则记 G 为 $G_{n_1,n_2,n_3}(n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3)$.

引理 3.1. 设 T 为树，k 为给定自然数，如果 T 中存在边子集 $F = \{v_i u_0: i = 1, 2, 3\}$，使

$$T - u = \bigcup_{i=1}^{3} Tv_i \cup Tu_0,$$

且 $2k \geqslant \nu(Tv_1) \geqslant \nu(Tv_2) \geqslant \nu(Tv_3)$，则

$$T^{2k+1}\left[\bigcup_{i=1}^{3} V(Tv_i)\right]$$

含同构于 $G^{2k}_{n_1,n_2,n_3}$ 的支撑子图，其中 $n_i = \nu(Tv_i)$，$1 \leqslant i \leqslant 3$.

结论容易验证，证明略去.

引理 3.2. 设 k 为自然数，如果 $2k \geqslant 2n_1$，$2n_2 + 2n_3 > 2k$，则 $G^{2k}_{2n_1,2n_2,2n_3}$ 有 $(2k+1)$ 个边不交 1-因子 $(n_3 \geqslant 1)$.

此引理证明与引理 2.2 的证明类似，证明略去.

如果 x 为 G 中唯一一个度大于 2 的顶点，且 $G - x = P_{2n_1} \cup P_{2n_2} \cup P_{2n_3} \cup P_{2n_4-1}$，$2n_1 > 2n_2 \geqslant 2n_3 \geqslant 2$，则记 G 为 $G_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$.

引理 3.3. 设 k 为自然数，如果 $G_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 满足 $2n_2 + 2n_3 > 2k$，$2n_3 + 2n_4 > 2k + 2$，$2n_1, 2n_4 \leqslant 2k$，则 $G^{2k+1}_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 含 $2k+1$ 个边不交 1-因子.

简要证明. 令 $V_i = V(P_{2n_i})$，$1 \leqslant i \leqslant 4$. 由 $G^{2k+1}_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}[V_1 \cup V_2] \cong P^{2k}_{2n_1+2n_2}$,

$$G^{2k+1}_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}[V_3 \cup V_4] = P^{2k+1}_{2n_3+2n_4}.$$

由引理 2.1 及 P^n_{2l} 中 n 个边不交 1-因子的选取可得 $G^{2k+1}_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 的 $2k+1$ 个边不交 1-因子.

引理 3.4. 如果树 T 含 1-因子，k 为自然数，且存在 u_0u，$u_0v \in E(T)$ 使 $T - \{u_0u, u_0v\} = Tu \cup Tv \cup Tu_0$，$\nu(Tu) + \nu(Tv) \leqslant 2k+1$. 则令 $V(Tu) \cup V(Tv) = \{w_i: i = 1, 2, \cdots, \nu(Tu) + \nu(Tv)\}$. 其中 $d_T(u_0, w_i) \leqslant d_T(u_0, w_j)$，$1 \leqslant i < j \leqslant \nu(Tu) + \nu(Tv) = m$. 令 T' 满足 $V(T') = V(T)$，$E(T') = E(Tu_0) \cup \{w_i w_{i+1}: 1 \leqslant i < m\}$，则 T' 有 1-因子，且 $(T')^{2k+1}$ 为 T^{2k+1} 的支撑子图.

结论显然，证明略去.

定理 3.1 的简要证明. 设 G 为含 1-因子的连通图，则 G 中存在含 1-因子的支撑树 T，且 T^{2k+1} 为 G^{2k+1} 的支撑子图. 从而只须对所有满足定理条件的树证明即可.

对 T 反复应用引理 2.4、引理 3.4 可得 T^*，且 T^* 不满足引理 2.4、引理 3.4 的条件.

与定理 2.1 证明类似. 注意在情况 1 中应用引理 3.1、引理 3.2. 在情况 2 中，T^* 必

为 P_{2t}, $T_{2n_1,2n_2,2n_3+1}$, $T_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$, $G_{2n_1,2n_2,2n_3,2n_4}$ 之一即可。

需要指出的是,如果G连通且有 1-因子, k为自然数 ($k>1$), 则 G^{2k} 一般不含 $2k$ 个边不交 1-因子。

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. and M. S. R. Murty, Graph Theory with Application. Macmillan, London, 1977.

[2] Nebeský, L. and E. Wisztová. Regular factors in powers of connected graphs, *Vasopis Pest Math.* **106** (1981), 52—59.

[3] Nebesky, L., Edge-Disjoint 1-factors in powers of connected gaphs, *Czechoslovak Math. J.* **34**(109): 4(1984), 499—505.

[4] Matthews, M. M. and D. P. Samner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graph, *J. Graph Theory*, **8**: 1(1984), 139—146.

[5] Summer, D. P., Graph with 1-factors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42**(1974), 8—12.

ON THE EDGE-DISJOINT 1-FACTORS IN THE POWERS OF THE CONNECTED GRAPHS

Zhang Jian-Xun

(*Department of Mathematics, Lanzhou Railway College*)

ABSTRACT

In this paper, the conditions for the power of the connected graph to have n edge-disjoint 1-factors are discussed, and the following results are obtained:

Theorem 2.1. If tree T has a 1-factor and $\Delta(T)\leqslant 3$, $\nu(T)\geqslant n+1$ $(n>2)$, then there exist n edge-disjoint 1-factors of T^n.

Theorem 2.2. The nth power of the connected $k_{1,3}$-free graph $G(\nu(G)\geqslant n+1)$ with even order has n edge-disjoint 1-factors.

Theorem 3.1. If a connected graph G has a 1-factor and $\nu(G)\geqslant 2k+2(k\geqslant 1)$, then G^{2k+1} has $2k+1$ edge-disjoint 1-factors.