系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
9 (2) (1989), 124—127

二连通的二部图的最长圈

党恺谦
(东北工学院数学系，沈阳)

一、引 言

本文研究的图G为简单的无向的二部图．所用术语和符号除说明外皆同[1]．$c(G)$表示G的最长圈的长．以(A_1, A_2)为二分类的二部图记为$G(A_1, A_2)$．$\delta=\min\{d(v)|v\in V(G)\}$．已有结果:

定理 1[2]．设$G(A_1, A_2)$为二连通的二部图,则$c(G)\geqslant 2\min\{|A_1|,|A_2|, 2\delta-2\}$.

定理 2[3]．设$G(A_1, A_2)$为二连通的二部图，且$\delta_i=\min\{d(v)|v\in A_i\}\,(i=1, 2)$,如果

i) $|A_1|\geqslant|A_2|$，则$c(G)\geqslant 2\min\{|A_2|, \delta_1+\delta_2-1, 2\delta_1-2\}$;

ii) $|A_1|=|A_2|$，$\delta_1=\delta_2$，则$c(G)\geqslant 2\min\{|A_2|, 2\delta_1-1\}$.

本文证明

定理 3．设$G(A_1, A_2)$为二连通的二部图，若对任一对使$d(u, v)=2$的点u，v有$\max\{d(u), d(v)\}\geqslant\delta^*$,则

i) $c(G)\geqslant 2\min\{|A_1|, |A_2|, 2\delta^*-2\}$;

ii) 当$|A_1|=|A_2|$，$\delta^*\geqslant\frac{1}{2}(|A_1|+1)$时$G$是哈密顿的.

二、引 理

记$P=P(v_1, v_l)=v_1v_2\cdots v_l$，$G(P)$为$G$中由$V(P)$导出的子图；$R=G-P$为$G$中由$V(G)\backslash V(P)$导出的子图；$T^-(v)=\{v_{i-1}|v_i\in N_p(v)\}$，$T^+(v)=\{v_{i+1}|v_i\in N_p(v)\}$.

显然有

引理 1．设G为二连通图，$P(v_1, v_l)$为G中最长路.

i) 如果$G(P)$有l长圈,则G是哈密顿的;

ii) 如果$G(P)$有$l-1$长圈,则R不含阶$\geqslant 2$的连通分图.

引理 2([3]中引理5)．设$G(A_1, A_2)$为二连通的二部图，$P(v_1, v_l)$为G中最长

1987 年 11 月 4 日收到，1988 年 4 月 20 日收到修改稿.

路.

i) 若 $v_1\in A_i$, $v_l\in A_j$, $i\neq j$, $i, j=1, 2$,则

$$c(G)\geqslant \min\{|V(P)|, 2\{d(v_1)+d(v_l)-1)\};$$

ii) 若 $\{v_1, v_l\}\subset A_i$, $i=1$ 或 2,则

$$c(G)\geqslant \min\{|V(P)|-1, 2(d(v_1)+d(v_l)-2)\}.$$

引理 3. 设 $G(A_1, A_2)$ 为二连通的二部图, 若对任一对使 $d(u, v)=2$ 的点 u, v 有 $\max\{d(u), d(v)\}\geqslant \delta^*$, 则 G 中有最长路 $P(v_1, v_l)$ 使 $d(v_1)\geqslant\delta^*$, $d(v_l)\geqslant\delta^*$.

证. 令 $M=\{v|v\in V(G)$ 且 $d(v)\geqslant\delta^*\}$. 选取最长路 $P(v_1, v_l)$ 使 $|\mathrm{End}(P)\cap M|$ 尽可能地大,这里 $\mathrm{End}(P)$ 表示 $P(v_1, v_l)$ 的端点集. 此 $P(v_1, v_l)$ 即为所求. 假若不然,不妨设 $d(v_1)<\delta^*$,则由G的二连通性及P的最长性,必存在 $v_i\in V(P)(i>2)$, 使 $v_1v_i\in E(G)$,易见 $d(v_1,v_{i-1})=2$,于是 $d(v_{i-1})\geqslant\delta^*$.令 $P^*=v_{i-1}v_{i-2}\cdots v_1v_iv_{i+1}\cdots v_l$,则 $|\mathrm{End}(P^*)\cap M|>|\mathrm{End}(P)\cap M|$,这与 $P(v_1, v_l)$ 的取法矛盾. 证毕.

三、定理 3 的证明

定理 3 的证明. 设 $P(v_1, v_l)$ 为G中满足引理 3 的最长路,则 $(N(v_1)\cup N(v_l))\subseteq V(P)$ 且 $|N(v_j)|=d(v_j)\geqslant\delta^*$, $j=1, l$. 记 $d(v_1)+d(v_l)=f$, 则 $f\geqslant 2\delta^*$. 而 $|T^-(v_1)|=d(v_1)$, $|T^+(v_l)|=d(v_l)$.

分以下两种情况讨论.

情况 1. $l=2r$. 不妨令 $v_1\in A_1$, $v_{2r}\in A_2$. 由引理 1 的 i) 不妨设

$$T^-(v_1)\cap N(v_{2r})=\varnothing.$$

由于 $(T^-(v_1)\cup N(v_{2r}))\subseteq A_1$,则

$$|V(P)\cap A_1|\geqslant|T^-(v_1)\cup N(v_{2r})|=|T^-(v_1)|+|N(v_{2r})|=f.$$

故 $|V(P)|\geqslant 2f$,从而由引理 2 的 i) 推出结论 i).

情况 2. $l=2r+1$. 不妨令 $\{v_1, v_{2r+1}\}\subset A_1$.

a) 若 $T^-(v_1)\cap T^+(v_{2r+1})=\varnothing$,则

$$|V(P)\cap A_1|\geqslant|T^-(v_1)|+|T^+(v_{2r+1})|=f.$$

故 $|V(P)|\geqslant 2f-1$,由引理 2 的 ii) 有 $c(G)\geqslant 4\delta^*-4$.

b) 若 $T^-(v_1)\cap T^+(v_{2r+1})\neq\varnothing$,设 $v_{i+1}\in(T^-(v_1)\cap T^+(v_{2r+1}))$,则有圈

$$c^*=v_1v_2\cdots v_iv_{2r+1}v_{2r}\cdots v_{i+2}v_1$$

并有

$$|V(c^*)|=|V(P)\backslash\{v_{i+1}\}|=|V(P)|-1=2r. \tag{1}$$

若 $|V(P)|\geqslant 4\delta^*-1$, 则 $|V(c^*)|\geqslant 4\delta^*-2$.

若 $|V(P)|\leqslant 4\delta^*-3$, 在 $P(v_1, v_{2r+1})$ 上记 $W_1=V(P)\cap A_1$, $W_2=V(P)\cap A_2$, 则

$$|W_2|=r\leqslant 2\delta^*-2,\ |W_1|=|W_2|+1=r+1\leqslant 2\delta^*-1. \tag{2}$$

以下证明 $V(R)\cap A_2=\varnothing$. 为此, 用反证法. 假设 $V(R)\cap A_2\neq\varnothing$. 由于$P$最长

及(1)式，引理1的 ii) 知R中不含阶$\geqslant 2$的连通分图，因此对任意的$v^* \in (V(R)\cap A_2)$，有 $N(v^*)\subset W_1$.

若 $d(v^*)\geqslant \delta^*$，则 $|T^+(v^*)| = d(v^*)\geqslant \delta^*$，再由(2)式有

$$|W_2| - |T^+(v^*)| \leqslant (2\delta^* - 2) - \delta^* = \delta^* - 2 < \delta^* \leqslant |N(v_1)|.$$

于是 $N(v_1)\cap T^+(v^*)\neq \varnothing$，此与$P$的最长性矛盾.

若 $d(v^*) < \delta^*$，令 $v_m \in N(v^*)$，显然 $m\neq 1,\ 2r+1$. 则 $v_{m+1}\in T^+(v^*)$ 且 $d(v^*, v_{m+1}) = 2$，于是 $d(v_{m+1})\geqslant \delta^*$. 又由(1)式及$P$最长，则 $N(v_{m+1})\subset W_1\backslash\{v_1\}$. 令 $X = \{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}\}$，$Y = \{v_{m+3}, v_{m+4}, \cdots, v_{2r+1}\}$，则 $T_X^-(v_1)\cap T_Y^+(v_1) = \varnothing$. 故

$$|T_X^-(v_1)\cup T_Y^+(v_1)| = d(v_1)\geqslant \delta^*,$$

$$|N(v_{m+1})\backslash\{v_m, v_{m+2}\}|\geqslant \delta^* - 2.$$

则

$$|W_1| - |T_X^-(v_1)\cup T_Y^+(v_1)| - |\{v_m, v_{m+2}\}| \leqslant (2\delta^* - 1) - \delta^* - 2 < \delta^* - 2 \leqslant |N(v_{m+1})\backslash\{v_m, v_{m+2}\}|.$$

于是 $(N(v_{m+1})\backslash\{v_m, v_{m+2}\})\cap(T_X^-(v_1)\cup T_Y^+(v_1))\neq\varnothing$，此与$P$的最长性矛盾.

这样便证明了 $V(R)\cap A_2 = \varnothing$，$|W_2| = |A_2| = r$. 于是

$$|V(c^*)| = 2r = 2|A_2|.$$

由情况1，2知结论 i) 成立.

以下证结论 ii). 若 $|V(P)|$ 为奇数，则由情况2的证明可知必有 $|V(P)|\geqslant 4\delta^* - 1$ (否则 $|A_1|\neq|A_2|$). 不妨设 $\mathrm{End}(P)\subset A_1$，则

$$|A_1|\geqslant |V(P)\cap A_1|\geqslant 2\delta^*\geqslant |A_1| + 1,$$

矛盾，故 $|V(P)|$ 必为偶数. 则由情况1的证明可知，如果G不是哈密顿的，便有 $|V(P)\cap A_1|\geqslant f\geqslant 2\delta^*\geqslant |A_1| + 1$，矛盾. 于是结论 ii) 成立.

至此定理证毕.

以下说明定理3的 i) 与定理1，2的关系. 由于 $\delta^*\geqslant\delta$，于是定理3的 i) 不比定理1弱；[3]中的例子说明定理2不比定理3的 i) 弱；下面的例子说明定理3的 i) 又不比定理2弱，而且在某种意义下是最好可能的.

例. 设 $n\geqslant 3$，$m\geqslant n+3$. $K_{m-1,n}$ 是以 (A_1, B_1) 为二分类的完全二部图.

$$|A_1| = m - 1,\ |B_1| = n,$$

令 $\{v_1, v_2\}\subset B_1$，$u^*\notin A_1$，$G_1 = K_{m-1,n}\cup\{u^*v_1, u^*v_2\}$，$G_i(A_i, B_i) = K_{m,n}$，$|A_i| = m$，$|B_i| = n$，$i = 2, 3$. $\{v_1^*, v_2^*\}\cap V(G_j) = \varnothing$，$j = 1, 2, 3$，$N(v_l^*) = \bigcup_{j=1}^{3} A_j$，$l = 1, 2$.

这样构成 $G(A, B)$，$A = \left(\bigcup_{i=1}^{3} A_i\right)\cup\{u^*\}$，$B = \left(\bigcup_{j=1}^{3} B_j\right)\cup\{v_1^*, v_2^*\}$. $|A| = 3m$，$|B| = 3n+2$，$\delta_1 = \delta = d(u^*) = 2$，$\delta^* = n+2$. 由定理2的 i) 有 $c(G) = 4\delta_1 - 4 = 4$，由定理3的 i) 有 $c(G) = 4\delta^* - 4 = 4n+4$.

参　考　文　献

[1] J. A 邦迪，U. S. R. 默蒂著，吴望名等译，图论及其应用，科学出版社，北京，1984.

[2] Voss H. J. und C. Zuluaga, Maximale gerade und ungerade Kreise in Graphen 1, *Wiss Z. Tech. Hochsch. Ilmenau*, **23**: 4(1977), 57—70.
[3] Jackson, B., Long cycles in bipartite graphs, *J. Combin. Theory, Ser. B*, **38**, (1985), 118—131.

LONGEST CYCLES IN 2-CONNECTED BIPARTITE GRAPHS

DANG KAI-QIAN
(*Northeast Institute of Technology, Chenyang*)

ABSTRACT

Let G be a 2-connected bipartite graph with bipartition (A_1, A_2). If $d(u, v)=2$ and $\max\{d(u), d(v)\} \geqslant \delta^*$ for any $u, v \in V(G)$, then G contains a cycle of length at least $2\min(|A_1|, |A_2|, 2\delta^*-2)$. Moreover, if $|A_1|=|A_2|$, $\delta^* \geqslant \frac{1}{2}(|A_1|+1)$, then G has a Hamiltonian cycle.