系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(2) (2005, 4), 179–186

多孔介质中非 Fick 流的校正方法*

刘 棠

(天津财经大学数学系， 天津 300222)

摘要 本文首先给出 H^1- 模意义下多孔介质中非 Fick 流的矩形双线性元的渐进误差展开，进而通过插值后处理方法得到一种插值校正格式来提高有限元近似解的精度.

关键词 非 Fick 流，有限元方法，插值校正，插值后处理.

MR(2000) 主题分类号 76S05, 45K05, 65M12

1 引 言

本文的目的是要研究多孔介质中具有 Dirichlet 边界条件的非 Fick 流的高精度有限元方法，即插值校正方法. 该模型问题是由下述积分 - 微分方程所描述，求 $u=u(x,t)$ 使得

$$\begin{aligned} &u_t = \nabla\cdot\sigma - cu + f, && \Omega\times J,\\ &\sigma = A(t)\cdot\nabla u + \int_0^t B(t,s)\cdot\nabla u(s)\mathrm{d}s, && \Omega\times J,\\ &u = 0, && \partial\Omega\times J,\\ &u = u_0(x), && x\in\Omega,\ \ t=0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^d$ $(d=2,3)$ 是一具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的开有界区域，$J=(0,T)(T>0)$, $A(t)=A(x,t)$ 和 $B(t,s)=B(x,t,s)$ 是两个 2×2 或 3×3 矩阵，且 A 是正定的， c, f 和 u_0 是已知光滑函数. 因为这种流问题表征了流的各种混合长度增长的历史效果，因此它是非常复杂的 [1].

关于问题 (1) 的数值方法，现在有大量的文献. 在 [2] 中，后退的 Euler 方法和 Crank-Nicolson 格式被使用来降低计算代价和节省存储空间. 文 [3] 给出了最优的 L^2- 模误差估计. 对于有限元方法与混合有限元方法的进一步研究，读者可参考 [4–7]. 在这些文献中，标准的 Ritz-Volterra 投影，混合的 Ritz-Volterra 投影及插值后处理技术在误差分析中被利用，来得到 L^2- 模收敛与超收敛性.

本文的目的是要研究问题 (1) 的基于渐进展式的有限元插值校正格式. 众所周知，外推方法与校正方法是提高近似解精度的两种有效方法，而这种有效性很大程度上依赖于误差渐进展式的存在性. 我们可以在 Marchuk 和 Shaidurov 的专著 [8] 里发现外推方法在差分近似中的应用. 对于外推方法与校正方法在有限元、混合有限元、边界元及 Petrov-Galerkin 有限元方法中的应用，读者可以参考文献 [5,7,9–13].

* 国家自然科学基金 (10471103) 及天津高等学校科技发展基金 (021306, 031405) 资助课题.
收稿日期：2002-11-18.

就作者所知，目前还没有文献研究问题 (1) 的有限元校正方法. 在本文中，我们将利用深刻的插值积分估计式 (见 [7]), 来建立问题 (1) 的有限元解与其准确解的插值函数之间的渐进误差展开式，并借助于插值后处理方法来获得有限元解的渐进误差展开. 在此基础上，我们给出问题 (1) 的一种具有高精度的有限元校正格式.

2 有限元方法及渐进展式

在本节中, 我们首先给出抛物积分 - 微分方程 (1) 的有限元公式. 为了简化分析, 我们取区域 Ω 是一个矩形域. 在这里我们使用标准的 Sobolev 空间记号，用 $||\cdot||_{k,p}$ 来表示 Sobolev 空间 W_p^k ($k\in\{0,1,\cdots\}$, $p\in[1,\infty]$) 中的模. 特别地，如果 $p=2$, 则我们让 $H^k(\Omega)=W_2^k(\Omega)$ 及 $||\cdot||_k=||\cdot||_{k,2}$. 此外，我们用 $H_0^1(\Omega)$ 来表示空间 $H^1(\Omega)$ 中迹为 0 的函数所构成的空间，符号 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 空间中通常意义下的内积.

使用 Green 公式与边界条件 $u=0$, 可得问题 (1) 如下弱形式，求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得 $u(x,0)=u_0(x)$ 及

$$(u_t,v)+(A\cdot\nabla u,\nabla v)+\int_0^t(B\cdot\nabla u(s),\nabla v)\mathrm{d}s+(cu,v)=(f,v),\quad v\in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

让 $\mathcal{T}_{h,k}$ 是 $\overline{\Omega}$ 一正规矩形有限元剖分， $V_{h,k}\subset H_0^1(\Omega)$ 表示相应的双线性有限元空间，其中 h 和 k 分别是 x 和 y 方向上的网格尺寸. 因此，问题 (2) 的相应半离散格式为求一函数 $u_{h,k}\in V_{h,k}$ 使得 $u_{h,k}(x,0)=u_{0,h,k}\in V_{h,k}$ 及

$$(u_{h,k,t},v)+(A\cdot\nabla u_{h,k},\nabla v)+\int_0^t(B\cdot\nabla u_{h,k}(s),\nabla v)\mathrm{d}s+(cu_{h,k},v)=(f,v),\quad v\in V_{h,k}. \tag{3}$$

于是，从 (2) 与 (3) 我们得到下列有限元误差方程

$$\begin{aligned}&(u_t-u_{h,k,t},v)+(A\cdot\nabla(u-u_{h,k}),\nabla v)\\&+\int_0^t(B\cdot\nabla(u-u_{h,k})(s),\nabla v)\mathrm{d}s+(c(u-u_{h,k}),v)=0,\quad v\in V_{h,k}.\end{aligned} \tag{4}$$

下面我们回忆双线性插值算子的一些渐进误差展开式. 从 [13] 我们知道下面两个引理成立.

引理 1 设 $u\in H^5(\Omega)$, 则对于充分光滑的函数 $a(x,y)$ 有

$$\int_\Omega a(u-i_{h,k}u)_x v_x\mathrm{d}\Omega=\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{k_e^2}{3}\int_e(au_{xyy})_x v\mathrm{d}e+\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{h_e^2}{3}\int_e a_x u_{xx}v_x\mathrm{d}e+r_1(u,v),$$

其中 $i_{h,k}$ 表示双线性插值算子, $r_1(u,v)$ 是 u 和 v 的双线性泛函,满足 $|r_2(u,v)|\le CH^4||u||_5||v||_1$, $H:=\max\{h,k\}$.

注 1 在一致的网格条件下， [5] 和 [11] 已得到了类似于引理 1 的结果. 然而，这个限制性的条件在这里已被去掉.

引理 2 在引理 1 和网格单方向一致的条件下，下列展式成立

$$\int_\Omega a(u-i_{h,k}u)_y v_x\mathrm{d}\Omega=-\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{h_e^2}{3}\int_e au_{xxy}v_x\mathrm{d}e-\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{k_e^2}{3}\int_e(au_{yy})_x v_y\mathrm{d}e+r_2(u,v),$$

这里 $r_2(u,v)$ 是 u 和 v 的双线性泛函，满足 $|r_2(u,v)| \le CH^4||u||_5||v||_1$.

注 2　如果网格是一致的，那么类似于引理 2 的结果已经在 [5] 和 [11] 中得到. 然而，在这里网格被放松为单方向一致的.

由引理 1 和引理 2, 我们能够立即得到下面的定理.

定理 1　在引理 2 的条件下，有

$$\begin{aligned}(A\cdot\nabla(u-i_{h,k}u),\nabla v) = &\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{h_e^2}{3}\int_e[(a_{11})_x u_{xx}v_x + (a_{22}u_{yxx})_y v]\mathrm{d}e\\ &-\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{h_e^2}{3}\int_e[a_{12}u_{xxy}v_x + (a_{12}u_{xx})_y v_x]\mathrm{d}e\\ &+\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{k_e^2}{3}\int_e[(a_{22})_y u_{yy}v_y + (a_{11}u_{xyy})_x v]\mathrm{d}e\\ &-\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{k_e^2}{3}\int_e[a_{21}u_{yyx}v_y + (a_{12}u_{yy})_x v_y]\mathrm{d}e + r_3(u,v),\end{aligned}$$

其中 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^2$ 及 $r_3(u,v)$ 是 u 和 v 的双线性泛函，满足 $|r_3(u,v)| \le CH^4||u||_5||v||_1$.

由 [13] 我们还有下面的定理.

定理 2　假设 $u\in H^4(\Omega)$ 及 a 是充分光滑的，那么，我们有

$$\int_\Omega a(u-i_{h,k}u)v d\Omega = -\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{h_e^2}{3}\int_e a u_{xx}v\mathrm{d}e - \sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{k_e^2}{3}\int_e a u_{yy}v\mathrm{d}e + r_4(u,v),$$

这里 $r_4(u,v)$ 是 u 和 v 的双线性泛函，满足 $|r_4(u,v)| \le CH^4||u||_4||v||_1$.

3　有限元校正格式

在本节中，我们将在定理 1 和定理 2 的基础上，首先建立有限元解和准确解的插值之间在 H^1- 模意义下的渐进展开，进而利用插值后处理的方法给出插值有限元解的渐进展开. 为此，我们回忆下面的引理 [6].

引理 3　假设矩阵 A 是正定的，那么，对 $u\in H_0^1(\Omega)$, 模 $|u| = (\nabla u,\nabla u)$ 与模 $||u||_A = (A\cdot\nabla u,\nabla u)$ 等价.

下面我们将得到本节的主要定理.

定理 3　假设 u 和 $u_{h,k}$ 分别是 (3) 和 (4) 的解，且初始近似取为 $u_{h,k}(0) = i_{h,k}u_0$, 那么，当 u, c, A, B 是充分光滑时，在 H^1- 模意义下，有

$$u_{h,k} - i_{h,k}u = H^2\xi_{h,k} + O(H^4),$$

其中 $\xi_{h,k}\in V_{h,k}$.

证　令

$$\theta_{h,k} = u_{h,k} - i_{h,k}u,$$

则由 (4) 和定理 1 与定理 2, 知

$$
\begin{aligned}
&(\theta_{h,k,t}, v) + (A\cdot\nabla\theta_{h,k}, \nabla v) + \int_0^t (B(t,s)\cdot\nabla\theta_{h,k}(s), \nabla v)\mathrm{d}s + (c\theta_{h,k}, v)\\
=&(u_t - i_{h,k}u_t, v) + (A\cdot\nabla(u - i_{h,k}u), \nabla v) + \int_0^t (B(t,s)\cdot\nabla(u-i_{h,k}u)(s), \nabla v)\mathrm{d}s\\
=&H^2 L_{h,k}(v) + r(u,v), \quad v\in V_{h,k},
\end{aligned}\tag{5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&L_{h,k}(v)\\
=&-\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{H}\right)^2\int_e (u_{xxt}+cu_{xx})v\mathrm{de} - \sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{k_e}{H}\right)^2\int_e (u_{yyt}+cu_{yy})v\mathrm{de}\\
&+\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{H}\right)^2\int_e\{[(a_{11})_x u_{xx}v_x + (a_{22}u_{yxx})_y v] - [a_{12}u_{xxy}v_x + (a_{21}u_{xx})_y v_x]\}\mathrm{de}\\
&+\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{k_e}{H}\right)^2\int_e\{[(a_{22})_y u_{yy}v_y + (a_{11}u_{xyy})_x v] - [a_{21}u_{yyx}v_y + (a_{12}u_{yy})_x v_y]\}\mathrm{de}\\
&+\int_0^t\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{H}\right)^2\int_e\{[(b_{11})_x u_{xx}v_x + (b_{22}u_{yxx})_y v] - [b_{12}u_{xxy}v_x + (b_{21}u_{xx})_y v_x]\}\mathrm{de}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^t\sum_{e\in\mathcal{T}_{h,k}}\frac{1}{3}\left(\frac{k_e}{H}\right)^2\int_e\{[(b_{22})_y u_{yy}v_y + (b_{11}u_{xyy})_x v] - [b_{21}u_{yyx}v_y + (b_{12}u_{yy})_x v_y]\}\mathrm{de}\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

及 $r(u,v) = r_4(u_t,v) + r_4(u,v) + r_3(u,v) + \int_0^t r_3(u(s),v)ds$, 这里 r_3 与 r_4 分别是由定理 1 和定理 2 给出的.

令 $\xi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 与 $\xi_{h,k}\in V_{h,k}$ 分别为下列辅助问题的准确解和有限元解

$$
\begin{aligned}
&(\xi_t, v) + (A\cdot\nabla\xi, \nabla v) + \int_0^t (B(t,s)\cdot\nabla\xi(s), \nabla v)\mathrm{d}s + (c\xi, v) = L_{h,k}(v), \quad v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega),\\
&\xi(0) = 0.
\end{aligned}\tag{6}
$$

则由 (5) 和 (6) 可得,

$$
\begin{aligned}
&((\theta_{h,k} - H^2\xi_{h,k})_t, v) + (A\cdot\nabla(\theta_{h,k} - H^2\xi_{h,k}), \nabla v)\\
&+\int_0^t (B(t,s)\cdot\nabla(\theta_{h,k} - H^2\xi_{h,k}), \nabla v)\mathrm{d}s + (c(\theta_{h,k} - H^2\xi_{h,k}), v)\\
=&r(u,v), \quad v\in V_{h,k}.
\end{aligned}
$$

置

$$\theta_{h,k}^* = \theta_{h,k} - H^2\xi_{h,k},$$

那么,

$$(\theta_{h,k,t}^*, v) + (A\cdot\nabla\theta_{h,k}^*, \nabla v) + \int_0^t (B(t,s)\cdot\nabla\theta_{h,k}^*(s), \nabla v)\mathrm{d}s + (c\theta_{h,k}^*, v) = r(u,v), \quad v\in V_{h,k}. \tag{7}$$

于是，在 (7) 中取 $v=\theta^*_{h,k}$, 则由引理 3, 定理 1 与定理 2 及 ε- 型不等式可得,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||\theta^*_{h,k}||_0^2+||\theta^*_{h,k}||_1^2\le C\left(\int_0^t||\theta^*_{h,k}||_1^2\mathrm{d}s+||\theta^*_{h,k}||_0^2+H^8\right).$$

从 0 到 t 对上式积分并利用 $\theta^*_{h,k}(0)=0$ 和 Gronwall, 可知

$$||\theta^*_{h,k}||_0^2\le C\left(\int_0^t||\theta^*_{h,k}(s)||_1^2\mathrm{d}s+H^8\right). \tag{8}$$

注意

$$uv_t=(uv)_t-u_tv,$$

在 (7) 中取 $v=\theta^*_{h,k,t}$ 来得到 $\theta^*_{h,k}$ 的 H^1- 模估计

$$\begin{aligned}&||\theta^*_{h,k,t}||_0^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A\cdot\nabla\theta^*_{h,k},\nabla\theta^*_{h,k})-\frac{1}{2}(A_t\cdot\nabla\theta^*_{h,k},\nabla\theta^*_{h,k})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t(B\cdot\nabla\theta^*_{h,k}(s),\nabla\theta^*_{h,k}(t))\mathrm{d}s\\&-(B\cdot\nabla\theta^*_{h,k},\nabla\theta^*_{h,k})-\int_0^t(B_t\cdot\nabla\theta^*_{h,k}(s),\nabla\theta^*_{h,k}(t))\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\theta^*_{h,k},\theta^*_{h,k})-\frac{1}{2}(c_t\theta^*_{h,k},\theta^*_{h,k})\\=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(u,\theta^*_{h,k})-r(u_t,\theta^*_{h,k}).\end{aligned}$$

对上式关于 t 积分并利用 $\theta^*_{h,k}=0$, 引理 3 和 ε- 型不等式，可得

$$||\theta^*_{h,k}||_1^2\le C\left(\int_0^t||\theta^*_{h,k}||_1^2\mathrm{d}s+||\theta^*_{h,k}||_0^2+H^8\right).$$

于是，由 (8) 与 Gronwall 引理，知

$$||\theta^*_{h,k}||_1^2\le CH^8,$$

或

$$||\theta^*_{h,k}||_1\le CH^4.$$

于是，定理 3 得证.

按照定理 3 的证明过程，我们也可得到下列结果.

引理 4 若 $\xi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 与 $\xi_{h,k}\in V_{h,k}$ 分别是 (6) 的变分解与有限元解，则有如下超收敛估计

$$||\xi_{h,k}-i_{h,k}\xi||_1\le C(u)H^2.$$

下面我们利用插值后处理技术, 来得到具有高精度的整体校正近似. 为此，与 [7] 类似，我们需要定义一个后处理插值算子 $I^4_{4h,4k}$ 使满足

$$\begin{aligned}&I^4_{4h,4k}i_{h,k}=I^4_{4h,4k},\\&||I^4_{4h,4k}v||_1\le C||v||_1,\quad\forall v\in V_{h,k},\\&||I^4_{4h,4k}u-u||_1\le CH^4||u||_5,\qquad\forall u\in H^5(\Omega).\end{aligned}\tag{9}$$

因此，假定 $\mathcal{T}_{h,k}$ 是通过剖分网格尺寸为 $4H$ 的 $\mathcal{T}_{4h,4k}$ 中的每一大单元成 16 个小矩形单元而得到的剖分．令 $\tau=\bigcup\limits_{i=1}^{16} e_i$, 其中 $e_i\in\mathcal{T}_{h,k}$, 则根据下列条件定义 τ 上对应 $\mathcal{T}_{4h,4k}$ 的双 4 次插值算子 $I^4_{4h,4k}$ 如下

$$\begin{aligned}&I^4_{4h,4k}u\in Q_{4,4}(\tau),\\&I^4_{4h,4k}u(p_i)=u(p_i),\quad i=1,2,\cdots,25,\end{aligned}\tag{10}$$

这里 p_i $(i=1,2,\cdots,25)$ 为 16 个小单元 e_i $(i=1,2,\cdots,16)$ 的顶点， $Q_{4,4}(\tau)$ 为 τ 上双 4 次多项式集合．容易验证，由 (10) 定义的双 4 次插值算子 $I^4_{4h,4k}$ 满足 (9) 中的所有性质．

定理 4 在定理 3 的条件下，我们有

$$I^4_{4h,4k}u_{h,k}-u=H^2\xi+O(H^4),\tag{11}$$

其中 $\xi\in H^1_0(\Omega)$ 为 (6) 的变分解．

证 令

$$r_{h,k}=u_{h,k}-i_{h,k}u-H^2i_{h,k}\xi,$$

则由定理 3 和引理 4, 知

$$||r_{h,k}||_0\le CH^4.$$

这样，从 (9) 得，

$$\begin{aligned}I^4_{4h,4k}u_{h,k}-u&=I^4_{4h,4k}(u_{h,k}-i_{h,k}u)+(I^4_{4h,4k}u-u)\\&=I^4_{4h,4k}(H^2i_{h,k}\xi+r_{h,k})+(I^4_{4h,4k}u-u)\\&=H^2I^4_{4h,4k}\xi+I^4_{4h,4k}r_{h,k}+(I^4_{4h,4k}u-u)\\&=H^2\xi+H^2(I^4_{4h,4k}\xi-\xi)+I^4_{4h,4k}r_{h,k}+(I^4_{4h,4k}u-u)\\&=H^2\xi+q_{h,k},\end{aligned}$$

这里

$$q_{h,k}=H^2(I^4_{4h,4k}\xi-\xi)+I^4_{4h,4k}r_{h,k}+(I^4_{4h,4k}u-u),$$

满足 $||q_{h,k}||_1\le CH^4$. 因此，

$$I^4_{4h,4k}u_{h,k}=u+H^2\xi+O(H^4).$$

故定理得证．证毕．

在定理 4 的基础上，我们可得到具有高精度的有限元校正近似解．为次，我们需要定义一个对应于剖分 $\mathcal{T}_{2h,2k}$ 的双二次插值算子 $I^2_{2h,2k}$ 如下

$$I^2_{2h,2k}u(p_i)=u(p_i),\quad i=1,2,\cdots,9,$$

其中 p_i $(i=1,2,\cdots,9)$ 为四个小单元的 9 个顶点．显然， $I^2_{2h,2k}$ 满足

$$\begin{aligned}&I^2_{2h,2k}i_{h,k}=I^2_{2h,2k},\\&||I^2_{2h,2k}v||_1\le C||v||_1,\quad\forall v\in V_{h,k},\\&||I^2_{2h,2k}u-u||_1\le CH^2||u||_3,\qquad\forall u\in H^3(\Omega).\end{aligned}\tag{12}$$

为了以后的用途，我们还需要引进有限元投影算子 $R_{h,k}: H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)\to V_{h,k}$ 如下

$$\begin{aligned}&((R_{h,k}u)_t-u_t,v)+(A\cdot\nabla(R_{h,k}u-u),\nabla v)\\&\quad+\int_0^t(B\cdot\nabla(R_{h,k}u-u),\nabla v)ds+(c(R_{h,k}u-u),v)=0,\quad v\in V_{h,k},\\&R_{h,k}u(0)=i_{h,k}u(0).\end{aligned}$$

定理 5 在定理 3 的条件下，有

$$||u_{h,k}^*-u||_1\le CH^4,$$

其中

$$u_{h,k}^*=I_{4h,4k}^4u_{h,k}+I_{2h,2k}^2u_{h,k}-I_{2h,2k}^2R_{h,k}I_{4h,4k}^4u_{h,k}.$$

证 让 I 表示恒等算子，并用 $(I-I_{2h,2k}^2R_{h,k})$ 乘 (11) 式的两端，得

$$\begin{aligned}(I-I_{2h,2k}^2R_{h,k})(I_{4h,4k}^4u_{h,k}-u)&=H^2(I-I_{2h,2k}^2R_{h,k})\xi+O(H^4)\\&=H^2(\xi-I_{2h,2k}^2\xi)+H^2(I_{2h,2k}^2\xi-I_{2h,2k}^2\xi_{h,k})+O(H^4)\\&=H^2I_{2h,2k}^2(i_{h,k}\xi-\xi_{h,k})+O(H^4),\end{aligned}$$

这里

$$||\xi-I_{2h,2k}^2\xi||_1\le CH^2||\xi||_3\quad 与\quad I_{2h,2k}^2i_{h,k}=I_{2h,2k}^2$$

已经被使用．进一步地，由引理 4 与不等式

$$||I_{2h,2k}^2(i_{h,k}\xi-\xi_{h,k})||_1\le C||i_{h,k}\xi-\xi_{h,k}||_1,$$

得

$$(I-I_{2h,2k}^2R_{h,k})(I_{4h,4k}^4u_{h,k}-u)=O(H^4),$$

而上式左端恰为

$$(I-I_{2h,2k}^2R_{h,k})(I_{4h,4k}^4u_{h,k}-u)=u_{h,k}^*-u.$$

于是，定理 5 得证．

参 考 文 献

[1] Ewing R E. Mathematical modeling and simulation for applications of fluid flow in porous media. Current and Future Directions in Applied Mathematics (M. Alber, B. Hu, J. Rosenthal, eds.), Birkhauser, Berlin, Germany, 1997, 161–182.

[2] Sloan I H and Thomée V. Time discretization of an integro-differential equation of parabolic type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1986, **23**: 1052–1061.

[3] Thomée V and Zhang N. Error estimates for semidiscrete finite element methods for parabolic integro-differential equations. *Math. Comp.*, 1989, **53**(187): 121–139.

[4] Cannon J R and Lin Y. A priori L^2 error estimates for finite element methods for nonlinear diffusion equations with memory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1990, **27**(3): 595–607.

[5] Chen C and Huang Y. Higher Accuracy Theory of FEM. Hunan Science Press, Changsha, 1995.

[6] Ewing R E, Lin Y, Sun T, Wang J and Zhang S. Sharp L^2 error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for non-Fickian flows in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.,* 2002, **40**(4): 1538–1560.
[7] Lin Q and Yan N. The Construction and Analysis of High Efficiency Finite Element Methods. Hebei University Publishers, 1996.
[8] Marchuk G and Shaidurov V. Difference Methods and Their Extrapolation. Springer, New York, 1983.
[9] Blum H. Asymptotic error expansion and defect in the finite element method. Universität Heidelberg, Institut für Angewandte Mathematik, D-6900, Heidelberg.
[10] Blum H Lin Q and Rannacher R. Asymptotic error expansion and Richardson extrapolation for linear finite elements. *Numer. Math.*, 1986, **49**: 11–38.
[11] Lin Q and Zhu Q. The Preprocessing and Postprocessing for the Finite Element Method. Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1994.
[12] Lin T, Lin Y, Rao M and Zhang S. Petrov-Galerkin methods for linear Volterra integro-differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, **38**(3): 937–963.
[13] Lin T, Lin Y, Rao M and Zhang S. Asymptotic expansions and Richardson extrapolation for elliptic equations. *Dyna. Contin. Discrete Impul. Syst.*, 2004, **11**: 23–34.
[14] Wang J. Superconvergence and extrapolation for mixed finite element methods on rectangular domains. *Math. Comp.*, 1991, **56**: 477–503.
[15] Yan N and Li K. An extrapolation method for BEM. *J. Comp. Math.,* 1989, **2**: 217–224.
[16] Zhou A, Liem C B, Shih T M and Lü T. A multi-parameter splitting extrapolation and a parallel algorithm. *Syst. Sci. Math. Sci.,* 1997, **10**: 253–260.

DEFECT CORRECTION FOR NON-FICKIAN FLOWS IN POROUS MEDIA

Liu Tang

(*Department of Mathematics, Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin* 300222)

Abstract In the sense of H^1-norm, asymptotic error expansions of bilinear finite elements for non-Fickian flows in porous media are presented, and then by means of an interpolation post-processing technique a defect correction method is proposed to improve the accuracy of finite element approximations.

Key words Non-Fickian flow, finite element method, interpolation defect correction, interpolation post-processing.