系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(3) (2005, 6), 378–384

单位圆内 $K-$ 拟亚纯映射的重值*

刘名生 李淑云

(华南师范大学数学系， 广州 510631)

摘要 本文研究了单位圆内的 $K-$ 拟亚纯映射的重值，应用覆盖曲面的几何方法，得到了其重值的充满圆及 Borel 半径.

关键词 拟亚纯映射，重值，充满圆， Borel 半径.

MR(2000) 主题分类号 30C62, 30D35

1 引 言

1997 年文 [1] 首先引进了 $K-$ 拟亚纯映射，建立了一个基本不等式，并应用它得到了平面上有限级拟亚纯映射的亏量关系、充满圆和 Borel 方向. 随后一些作者 [2–4] 研究了它的值分布. 文 [5] 中研究了单位圆内 $K-$ 拟亚纯映射的 Borel 点，本文应用文 [2] 和 [3] 中建立的关于拟亚纯映射的重值的基本不等式，得到了单位圆内的 $K-$ 拟亚纯映射有关重值的充满圆序列，并证明了单位圆内的 $K-$ 拟亚纯映射关于重值存在 Borel 半径，且所用方法与文 [5] 中不同. 为此先说明一些定义和记号，可参看文献 [1,6].

定义 1.1 设 $f(z)$ 是区域 D 到 D' 内的 $K-$ 拟共形映射. 若 D' 是 Riemann 球面上的区域，则称 f 是 D 内的单叶 $K-$ 拟亚纯映射.

定义 1.2 设 $f(z)$ 是区域 D 内的复值连续函数. 如果对于 D 内一点 z_0, 存在 z_0 的邻域 $U(\subset D)$ 与一正整数 n(依赖于 z_0), 使

$$F(z)=\begin{cases}(f(z))^{\frac{1}{n}}, & f(z_0)=\infty,\\ (f(z)-f(z_0))^{\frac{1}{n}}+f(z_0), & f(z_0)\neq\infty.\end{cases}$$

是 U 上的单叶 $K-$ 拟亚纯映射，则称 f 在 z_0 点是 n 叶 $K-$ 拟亚纯映射. 若 $f(z)$ 在 D 内每一点都是 n 叶 $K-$ 拟亚纯映射，则称 $f(z)$ 是 D 内的 $K-$ 拟亚纯映射，其中的幂函数可取任一单值分支.

用 V 表示直径为 1 的 Riemann 球面, 对于任意复数 a, 用 $n(r,a)$ 表示 $f(z)-a$ 在圆 $|z|<r$ 内的零点个数；若不记零点的重数，记为 $\overline{n}(r,a)$. 记圆 $|z|<r$ 在映射 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 下到 V 上的覆盖曲面为 F_r, F_r 对 V 的平均覆盖次数为

$$S(r)=S(r,f)=\frac{|F_r|}{|V|}=\frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{u_xv_y-v_xu_y}{(1+|f(z)|^2)^2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,$$

* 国家自然科学基金资助项目 (10471048).
收稿日期：2002-4-23, 收到修改稿日期：2003-08-29.

其中 $|F_r|$ 与 $|V|$ 分别表示 F_r 与 V 的面积.

定义 1.3　设 $f(z)$ 是单位圆 $\{z:|z|<1\}$ 内的 $K-$ 拟亚纯映射, 则定义 $f(z)$ 的级为

$$\rho=\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln S(r,f)}{\ln\frac{1}{1-r}}\tag{1}$$

引理 1.1[2]　设 $f(z)$ 是 $|z|<R$ 内的 $K-$ 拟亚纯映射, $\{a_v\}_{v=1}^{q}$ 是 V 上 q 个相异的点, 它们两两之间的球面距离不小于 $\delta\in(0,1/2)$, 则对任意 $r\in(0,\frac{2R}{3})$ 有

$$(q-4)S(r,f)\leq\sum_{v=1}^{q}\overline{n}^{1)}(R,a_v)+\frac{2^{17}\pi^8K}{(q-4)\delta^8\log\frac{3}{2}},$$

其中 $q>4,\overline{n}^{1)}(R,a_v)$ 表示 $f(z)-a_v$ 在 $|z|<R$ 内的简单零点的个数.

引理 1.2[3]　设 $f(z)$ 为 $|z|<R(0<R<\infty)$ 内的 $K-$ 拟亚纯映射, F 是由 f 生成的球面 V 上的 Riemann 曲面, $\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 V 上相异的三点, 它们两两之间的球面距离不小于 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$. 若 $\overline{n}^{l)}(R,a_v)$ 表示 $f-a_v$ 在 $|z|<R$ 内的零点个数, 且重级 $\leq l(l>2)$ 者仅计算一次. 重级 $>l$ 者不计在内. 则对于任意 $r\in(0,\frac{2R}{3})$, 有

$$\left(1-\frac{2}{l}\right)^2S(r,f)\leq\sum_{v=1}^{3}\overline{n}^{l)}(R,a_v)+\frac{2^{27}\pi^2K}{\delta^6}$$

应用文 [3] 中定理 1 的方法, 类似可以得到如下

引理 1.3　设 $f(z)$ 是 $|z|<R$ 内的 $K-$ 拟亚纯映射, $\{a_v\}_{v=1}^{q}$ 是 V 上 q 个相异的点, 它们两两之间的球面距离不小于 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 则对任意 $r\in(0,\frac{2R}{3})$ 有

$$(q-3)S(r,f)\leq\sum_{v=1}^{q}\overline{n}^{2)}(R,a_v)+\frac{900\cdot 2^{11}K\pi^8}{(q-3)\delta^8\log\frac{3}{2}},$$

其中 $q>3,\overline{n}^{2)}(R,a_v)$ 表示 $f-a_v$ 在 $|z|<R$ 内的零点个数, 且重级 ≤ 2 者仅计算一次. 重级 >2 者不计在内.

2　主要结果

定理 2.1　设 $f(z)$ 为单位圆内级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射, 则存在一列充满圆 $\mathit{\Gamma}_n:|z-z_n|<\sigma_n|z_n|,n=1,2,\cdots$ 使得在每一个 $\mathit{\Gamma}_n$ 内, $f(z)-a(a\in C)$ 取简单零点的个数至少 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{\rho-\varepsilon_n}$ 次 (不计重数), 至多可能除去一些复数可含于 4 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{-\frac{\rho}{8}+\frac{\varepsilon_n}{4}}$ 的球面圆内, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1^-$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0(\varepsilon_n>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

证　任取一列趋于零的正数 $\alpha_n(\alpha_n<\frac{\rho}{4})$, 由 (1) 知, 对每一个 n, 均存在一列正数 $\{r_l(\alpha_n)\}\to 1^-(l\to\infty)$, 使

$$S(r_l,f)>\left(\frac{1}{1-r_l}\right)^{\rho-\alpha_n}\tag{2}$$

对于 α_1, 由于 $r_l(\alpha_1)\to 1^-(l\to+\infty)$, 所以存在正数 $r_{l_1}\in(\frac{1}{2},1)$, 使

$$\frac{2^{17}\pi^8K}{\ln\frac{3}{2}}\leq\left(\frac{1}{1-r_{l_1}}\right)^{2\alpha_1}\tag{3}$$

再取一列正数 $\{T_n\}$, 使 $T_1 > r_{l_1}$, 且 $T_n \uparrow 1$. 令

$$\Omega_{pqn} = \Big\{z = r\mathrm{e}^{i\theta} : {T_n}^{p+1} < r \le {T_n}^{p}, \Big|\theta - \frac{2q\pi}{M}\Big| \le \frac{\pi}{M}\Big\}$$

其中 $M = 3([\frac{2\pi}{1-T_n}]+1)$, $p = 1, 2, \cdots$; $q = 1, 2, \cdots, M$; $n = 1, 2, \cdots$. 当 $n = 1$ 时, 由 (2) 式知, 在 $\{\Omega_{pq1}\}$ 中可以选出一个区域, 记为 $\{\Omega_{l_1}\}$, 使 $\Omega_{l_1} \subset \{z : \frac{1}{10} \le |z| \le r_{l_1}\}$, 且

$$S(\Omega_{l_1}, f) > 6\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1}.$$

(否则

$$S(T_1, f) - S\Big(\frac{1}{10}, f\Big) \le 6M\frac{\ln\frac{1}{10}}{\ln T_1}\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

$$S(T_1, f) \le S\Big(\frac{1}{10}, f\Big) + C\ln 10\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

其中 $C = -\frac{6M}{\ln T_1} > 0$, 所以由 (2) 式可得

$$\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-\alpha_1} < S(r_{l_1}, f) \le S(T_1, f) \le S\Big(\frac{1}{10}, f\Big) + C\ln 10\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

$$\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\alpha_1} \le C\ln 10 + (1-r_{l_1})^{\rho-2\alpha_1}S\Big(\frac{1}{10}, f\Big),$$

当 $r_{l_1} \to 1$ 时, 这显然是不可能的.)

设 $\Omega_{l_1} = \{z = r\mathrm{e}^{i\theta} : {T_1}^{p_1+1} < r \le {T_1}^{p_1}, |\theta - \frac{2q_1\pi}{M}| \le \frac{\pi}{M}\}$. 令 $z_1 = \frac{1}{2}(T_1^{p_1} + T_1^{p_1+1})\mathrm{e}^{i\frac{2q_1\pi}{M}}$, ${\Gamma_1}' = \{z : |z - z_1| < d_1\}$ 表示圆心在 $z_1 \in \Omega_{l_1}$, 半径为 $d_1 = \frac{2}{3}(\frac{1}{T_1} - 1)|z_1|$ 的圆, $\Gamma_1 = \{z : |z - z_1| < \sigma_1|z_1|\}, \sigma_1 = \frac{1}{T_1} - 1$, 则应用 [7] 中定理 5.1 的方法, 通过简单计算可得

$$\Omega_{l_1} \subset {\Gamma_1}' \subset \Gamma_1 \subset \{z : |z| < 1\}.$$

于是 $S({\Gamma_1}', f) \ge S(\Omega_{l_1}, f) > 6(\frac{1}{1-r_{l_1}})^{\rho-2\alpha_1}$, 根据引理 1.1(取 q=5) 可得

$$\sum_{v=1}^{5}\overline{n}^{1)}(\Gamma_1, a_v) + \frac{2^{17}\pi^8 K}{\delta^6\ln\frac{3}{2}} > 6\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1}.$$

取 $\delta = (\frac{1}{1-|z_1|})^{-(\frac{\rho}{8}-\frac{1}{2}\alpha_1)}$, 并由 (3) 式及 $\rho - 4\alpha_1 > 0$, $|z_1| \le r_{l_1}$ 可得,

$$\frac{2^{17}\pi^8 K}{\delta^8\ln\frac{3}{2}} \le \Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{2\alpha_1}\Big(\frac{1}{1-|z_1|}\Big)^{\rho-4\alpha_1} \le \Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

所以

$$\sum_{v=1}^{5}\overline{n}^{1)}(\Gamma_1, a_v) > 5\Big(\frac{1}{1-r_{l_1}}\Big)^{\rho-2\alpha_1} \ge 5\Big(\frac{1}{1-|z_1|}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

这说明对每一个复数 a, 有

$$\overline{n}^{1)}(\Gamma_1, a) \ge \Big(\frac{1}{1-|z_1|}\Big)^{\rho-2\alpha_1},$$

至多除去一些复数可含于 4 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_1|})^{-\frac{\rho}{8}+\frac{1}{2}\alpha_1}$ 的球面圆内.

当 $n=2$ 时，由 (2) 式知，对于 α_2, 存在正数 $r_{l_2}\in(r_{l_1},T_2]$, 使在 $\{\Omega_{pq2}\}$ 中可以选出一个区域，记为 $\{\Omega_{l_2}\}$, 使 $\Omega_{l_2}\subset\{z:r_{l_1}\le|z|\le r_{l_2}\}$, 且

$$S(\Omega_{l_2},f)>6\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2}.$$

(否则

$$S(T_2,f)-S(r_{l_1},f)\le 6M\frac{\ln r_{l_1}}{\ln T_2}\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

$$S(T_2,f)\le S(r_{l_1},f)+C\ln\frac{1}{r_{l_1}}\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

其中 $C=-\frac{6M}{\ln T_2}>0$. 所以由 (2) 式可得

$$\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-\alpha_2}<S(r_{l_2},f)\le S(T_2,f)\le S(r_{l_1},f)+C\ln r_{l_1}\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

$$\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\alpha_2}\le C\ln\frac{1}{rl_1}+(1-r_{l_2})^{\rho-2\alpha_2}S(r_{l_1},f),$$

当 $r_{l_2}\to 1$ 时，这显然是不可能的.）

设 $\Omega_{l_2}=\{z=r\mathrm{e}^{i\theta}:T_2{}^{p_2+1}<r\le T_2{}^{p_2},|\theta-\frac{2q_2\pi}{M}|\le\frac{\pi}{M}\}$. 令 $z_2=\frac{1}{2}(T_2^{p_2}+T_2^{p_2+1})\mathrm{e}^{i\frac{2q_2\pi}{M}}$, $\Gamma_2{}'=\{z:|z-z_2|<d_2\}$ 表示圆心在 $z_2\in\Omega_{l_2}$, 半径为 $d_2=\frac{2}{3}(\frac{1}{T_2}-1)|z_2|$ 的圆， $\Gamma_2=\{z:|z-z_2|<\sigma_2|z_2|\}$, $\sigma_2=\frac{1}{T_2}-1$, 则 $r_{l_1}<|z_2|<r_{l_2}<1$, 并且通过简单计算可得

$$\Omega_{l_2}\subset\Gamma_2{}'\subset\Gamma_2\subset\{z:|z|<1\}.$$

于是

$$S(\Gamma_2{}',f)>6\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2}.$$

根据引理 1.1(取 q=5) 可得

$$\sum_{v=1}^{5}\overline{n}^{1)}(\Gamma_2,a_v)+\frac{2^{17}\pi^8K}{\delta^8\ln\frac{3}{2}}>6\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2}.$$

取 $\delta=(\frac{1}{1-|z_2|})^{-(\frac{\rho}{8}-\frac{1}{2}\alpha_2)}$, 并由 (3) 式及 $\rho-4\alpha_2>0$, $|z_2|\le r_{l_2}$ 可得

$$\frac{2^{17}\pi^8K}{\delta^8\ln\frac{3}{2}}\le\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{2\alpha_2}\Big(\frac{1}{1-|z_2|}\Big)^{\rho-4\alpha_2}\le\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

所以

$$\sum_{v=1}^{5}\overline{n}^{1)}(\Gamma_2,a_v)>5\Big(\frac{1}{1-r_{l_2}}\Big)^{\rho-2\alpha_2}\ge 5\Big(\frac{1}{1-|z_2|}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

这说明对每一个复数 a, 有

$$\overline{n}^{1)}(\Gamma_2,a)\ge\Big(\frac{1}{1-|z_2|}\Big)^{\rho-2\alpha_2},$$

至多除去一些复数可含于 4 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_2|})^{-\frac{\rho}{8}+\frac{1}{2}\alpha_2}$ 的球面圆内.

这个过程可以无限地进行下去，于是得到单位圆内的一列圆 Γ_n 具有定理 2.1 所述性质，其中 $\varepsilon_n=2\alpha_n$.

根据引理 1.2, 应用定理 2.1 的方法，类似可得

定理 2.2 设 $f(z)$ 为单位圆内级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射，则存在一列充满圆 $\Gamma_n:|z-z_n|<\sigma_n|z_n|, n=1,2,\cdots$使得在每一个 Γ_n 内，$f(z)-a(a\in C)$ 取重级 $\leq l(l>2$ 为正整数) 的零点个数至少 $(1-\frac{2}{l})^2(\frac{1}{1-|z_n|})^{\rho-\varepsilon_n}$ 次 (不计重数), 至多可能除去一些复数可含于 2 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{-\frac{\rho}{6}+\frac{\varepsilon_n}{3}}$ 的球面圆内，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1^-$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0(\varepsilon_n>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

根据引理 1.3(取 q=4), 应用定理 2.1 的方法，类似可得

定理 2.3 设 $f(z)$ 为单位圆内级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射，则存在一列充满圆 $\Gamma_n:|z-z_n|<\sigma_n|z_n|, n=1,2,\cdots$使得在每一个 Γ_n 内，$f(z)-a(a\in C)$ 取重级 ≤ 2 的零点个数至少 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{\rho-\varepsilon_n}$ 次 (不计重数), 至多可能除去一些复数可含于 3 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{-\frac{\rho}{8}+\frac{\varepsilon_n}{4}}$ 的球面圆内，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1^-$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0(\varepsilon_n>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

定理 2.4 设 $f(z)$ 为单位圆 $|z|<1$ 内的级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射，则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内至少存在一条 Borel 半径 $L(\theta)=\{z:|z|<1,\arg z=\theta\}$使得

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln\overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon,a)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\rho \qquad \text{a.e.} \qquad a\in V,$$

对于任意复数 a(至多有 2 个例外), 任意正整数 $l(l>2)$ 及任意 $\varepsilon>0$ 成立．其中 $\overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon,a)$ 表示 $f(z)-a$ 在 $(|\arg z-\theta|<\varepsilon)\bigcap(|z|<r)$ 内重级不超过 l 的零点个数，不计重数．

证 由定理 2.2 得，存在 $f(z)$ 的一列充满圆 $\Gamma_n:|z-z_n|<\sigma_n|z_n|, n=1,2,\cdots$ 使得在每一个 Γ_n 内， $f(z)$ 取任意复数至少 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{\rho-\varepsilon_n}(1-\frac{2}{l})^2$ 次，至多除去一些复数可含于 2 个球面半径为 $(\frac{1}{1-|z_n|})^{-\frac{\rho}{6}+\frac{\varepsilon_n}{3}}$ 的球面圆内．记 θ 为 $\{\arg z_n\}$ 的一个聚点，则对于任意复数 a 与任意正数 ε 有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln\overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon,a)}{-\ln(1-r)}\geq\rho \tag{4}$$

成立, 至多可能除去关于 a 的 2 个例外值. 若不然, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 以及三个判别的复数 $a_i(i=1,2,3)$, 使得以原点为角顶以 $L(\theta)$ 为角平分线的某扇形域 $\Omega_0:(|\arg z-\theta|<\varepsilon_0)\bigcap(|z|<1)$ 有

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln\overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon_0,a)}{-\ln(1-r)}<\rho. \tag{5}$$

但是在 Ω_0 内包含了 Γ_n 的一个无穷子列 Γ_{n_k}, 当 k 充分大时，有

$$2\Big(\frac{1}{1-|z_{n_k}|}\Big)^{-\frac{\rho}{6}+\frac{\varepsilon_{n_k}}{3}}<\min_{1\leq u\neq v\leq 3}\{|a_u,a_v|\},$$

这里 $|a_u,a_v|$ 表示 a_u 与 a_v 两点的球面距离．于是 $a_i(i=1,2,3)$ 中至少有一个，例如 a_1 不属于上述的半径为 $(\frac{1}{1-|z_{n_k}|})^{-\frac{\rho}{6}+\frac{\varepsilon_{n_k}}{3}}$ 的球面圆内．即 $f(z)$ 在 Γ_{n_k} 内取 a_1 至少 $(\frac{1}{1-|z_{n_k}|})^{\rho-\varepsilon_{n_k}}$

次.

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln \overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon_0,a_1)}{-\ln(1-r)}\geq \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln \overline{n}^{l)}(\varGamma_{n_k},a_1)}{\ln\frac{2}{1-|z_{n_k}|}}\geq \varlimsup_{k\to\infty}\frac{(\rho-\varepsilon_{n_k})\ln\frac{1}{1-|z_{n_k}|}}{\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{1}{1-|z_{n_k}|}}=\rho,$$

这与 (5) 式矛盾. 所以 $L(\theta)=\{z:|z|<1,\arg z=\theta\}$ 满足 (4) 式.

然后证明使 (4) 式中不等号成立的复数 a 是一零测集. 为此令 $r_n=1-(\frac{1}{2})^n$ 与 $\sigma>0$, 记

$$E=\{a\in V,a\text{ 满足 (4) 中不等式 }\},$$

$$E_n^{l)}=\left\{a\in V,\overline{n}^{l)}(r_n,\theta,\varepsilon,a)>\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\rho+2\sigma}\right\}. \tag{6}$$

$$E_n=\left\{a\in V,\overline{n}(r_n,\theta,\varepsilon,a)>\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\rho+2\sigma}\right\}. \tag{7}$$

由于当 $n\to\infty$ 时， $r_n\to 1$, 所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln \pi S(r_n,f)}{-\ln(1-r_n)}=\rho,$$

因此当 n 充分大时，有

$$\pi S(r_n,f)<\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\rho+\sigma},$$

结合 (7) 式

$$(mesE_n)\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\rho+2\sigma}<\pi S(r_n,f)<\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\rho+\sigma}.$$

又由 (6)式

$$mesE_n^{l)}\leq mesE_n<\left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{-\sigma}=2^{-\sigma n}. \tag{8}$$

对任意大的正整数 N 有,

$$E\subset\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n^{l)}\subset\bigcup_{n=N}^{\infty}E_n,$$

所以由 (8) 式便得

$$mesE\leq\sum_{n=N}^{\infty}mesE_n\leq\sum_{n=N}^{\infty}2^{-\sigma n}=C_\sigma 2^{-\sigma N}, \tag{9}$$

其中 C_σ 为仅依赖于 σ 的常数，在 (9) 式中令 $N\to\infty$, 即得 $mesE=0$. 因此

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln \overline{n}^{l)}(r,\theta,\varepsilon,a)}{-\ln(1-r)}=\rho,\ \text{a.e. } a\in V,$$

故定理得证.

根据定理 2.3, 应用定理 2.4 的方法，类似可得

定理 2.5 设 $f(z)$ 为单位圆 $|z|<1$ 内的级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射，则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内至少存在一条 Borel 半径 $L(\theta)=\{z:|z|<1,\arg z=\theta\}$ 使得

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln \overline{n}^{2)}(r,\theta,\varepsilon,a)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\rho \qquad \text{a.e.} \qquad a\in V,$$

对于任意复数 a(至多有 3 个例外) 及任意 $\varepsilon>0$ 成立.

根据定理 2.1, 应用定理 2.4 的方法，类似可得

定理 2.6 设 $f(z)$ 为单位圆 $|z|<1$ 内的级为 $\rho(0<\rho<+\infty)$ 的 $K-$ 拟亚纯映射，则 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内至少存在一条 Borel 半径 $L(\theta)=\{z:|z|<1,\arg z=\theta\}$ 使得

$$\varlimsup_{r\to 1}\frac{\ln \overline{n}^{1)}(r,\theta,\varepsilon,a)}{\ln\frac{1}{1-r}}=\rho \qquad \text{a.e.} \qquad a\in V,$$

对于任意复数 a(至多有 4 个例外) 及任意 $\varepsilon>0$ 成立.

参 考 文 献

[1] 孙道椿，杨乐．拟共形映射的值分布．中国科学 (A 辑), 1997, **27**(2): 132–139.
[2] 孙道椿．拟亚纯映射．武汉大学学报 (自然科学版), 1998, **44**(1): 1–4.
[3] 高宗升．拟共形映射的重值．数学杂志， 1999, **19**(2): 121–126.
[4] 刘名生，孙道椿．拟亚纯映射的 Julia 方向．数学研究， 2001, **34**(3): 264–267.
[5] 邓方文．单位圆内拟亚纯映射的 Borel 点．数学物理学报， 2000, **20**(4): 562–567.
[6] 李忠．拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用．北京：科学出版社， 1988.
[7] 庄圻泰．亚纯函数的奇异方向．北京：科学出版社， 1982.

THE MULTIPLE VALUES OF K-QUASIMEROMORPHIC MAPPINGS IN THE UNIT DISK

Liu Mingsheng Li Shuyun

(*Department of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou* 510631)

Abstract In this paper, we study the multiple values of quasimeromorphic mappings in the unit disk, and obtained the filling disks and the existence theorems of Borel radius on their multiple values by using the geometric method of covering surface.

Key words Quasimeromorphic mapping, multiple value, filling disks, Borel radius.