系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
11(3) (1991), 263—266

从停止问题到折扣费用问题

刘 坤 会
(北方交通大学数学系，北京 100044)

本文借助一类停止问题，研究了奇异型折扣费用问题，得出了最佳控制的存在性及结构形式．其模型为

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为某概率空间，w_t，$t\geqslant 0$ 为其上 Wiener 过程，$\mathscr{F}_t=\sigma(w_s,0\leqslant s\leqslant t)$．以 $\mathscr{B}$ 表 $\mathscr{F}_t$ 适应左连续 0 初值有限变差过程的全体．对 $\forall\,\xi=\{\xi_t,\ t\geqslant 0\}\in\mathscr{B}$，$\xi_t=\xi_t^+-\xi_t^-$ 为其正规分解，$\check{\xi}_t=\xi_t^++\xi_t^-$ 为其全变差，设 $\alpha>0$ 为常数，模型为对 $\forall x\in R$，求 $\xi^*\in\mathscr{B}$，使得

$$E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{g(x+w_t+\xi_t^*)d\check{\xi}_t^*+h(x+w_t+\xi_t^*)dt\}$$
$$=\min_{\xi_t\in\mathscr{B}}E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{g(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t+h(x+w_t+\xi_t)dt\}. \tag{1}$$

式中 $h(\cdot),g(\cdot)$ 为 R 上连续偶函数，且

$$g(0)>0 \text{ 且在}(0,\infty)\text{上 } g'(\cdot) \text{ 连续且非负}, \tag{2}$$
$$h(0)\geqslant 0 \text{ 且在}(0,\infty)\text{上 } h'(\cdot) \text{ 非负连续且非降}. \tag{3}$$

显然，本文推广了[1]中的模型，而且所用方法可用来处理状态更为一般的模型．现将结果及主要引理叙述如下：

以 $\mathscr{T}$ 表所有 $\mathscr{F}_t$ 停时的全体，令 $S(x)=\inf\{t\geqslant 0:x+w_t\leqslant 0\}$，定义 R^+ 上的函数

$$U(x)=\inf_{\tau\in\mathscr{T}}E\left[\int_0^{\tau\wedge S(x)}e^{-\alpha t}H(x+w_t)dt+e^{-\alpha\tau}G(x+w_\tau)I_{\{\tau<S(x)\}}\right]. \tag{4}$$

而且规定

$$H(\cdot) \text{ 为 } R^+ \text{ 上的有界非负连续函数}, \tag{5}$$
$$G(\cdot) \text{ 为 } R^+ \text{ 上的有界非负连续函数且 } G'(\cdot) \text{ 在}(0,\infty)\text{上存在且连续}. \tag{6}$$

本文假定 $G(0)>0$．

$U(x)$ 实际上为一类停止问题的最佳费用函数，我们正是利用它来处理本文模型，则利用[2]中定理 0.2 推知 $U(x)$ 在 R^+ 上为非负连续函数，且显然 $U(0)=0$；$0\leqslant U(x)\leqslant G(x)$，$\forall x\in R^+$．再利用[2]中定理 0.1 推知对 $\forall\,\tau\in\mathscr{T}$，有

$$U(x)\leqslant E\int_0^{\tau\wedge S(x)}e^{-\alpha t}H(x+w_t)dt+Ee^{-\alpha(\tau\wedge S(x))}U(x+w_{\tau\wedge S(x)}). \tag{7}$$

再通过[3]中 §2 里相似的方法及一些随机分析可以推知，$U(\cdot)$ 在 $F=\{x>0:$

1988 年 4 月 5 日收到，90 年 10 月 15 收修改压缩稿．

$U(x)<G(x)\}$ 上二次连续可导，且 $\alpha U(x)-\frac{1}{2}U''(x)=H(x)$，$U'(\cdot)$ 在$(0,\infty)$上存在且连续，当 $x\bar{\in}F$ 时 $U'(x)=G'(x)$。

任选非负常数 $K(0)$ 且定义 $K(\cdot)$ 及 $V(\cdot)$ 如下：

$$\alpha V(0)-\frac{1}{2}U'(0_+)=K(0),\ V(x)=V(0)+\int_0^x U(y)dy,\ x\in R^+ \tag{8}$$

且 $x<0$ 时 $V(x)=V(-x)$，

$$K(x)=K(0)+\int_0^x H(y)dy,\ x\in R^+\ \text{且}\ x<0\ \text{时},\ K(x)=K(-x). \tag{9}$$

由以上结果可推知 $V(\cdot)$ 为 R 上二次连续可导非负偶函数，且有

$$\alpha V(x)-\frac{1}{2}V''(x)=K(x),\quad \forall x\in(-d,d). \tag{10}$$

这里 $d=\sup\{c\geqslant 0:\ \text{对}\ \forall x\in[0,c]\ \text{有}\ U(x)<G(x)\}>0$.

$$\alpha V(x)-\frac{1}{2}V''(x)\leqslant K(x),\ \forall x\in R. \tag{11}$$

$$V''(x)\geqslant 0,\ \forall x\in R. \tag{12}$$

下面仍以 $G(\cdot)$ 表 $G(x)$ 在 R 上偶延拓后的函数，则有

$$-G(x)\leqslant V'(x)\leqslant G(x),\ \forall x\in R. \tag{13}$$

往证

定理 1. 在本文假定下，对 $\forall x\in R$，有

$$V(x)\leqslant \inf_{\xi\in\mathscr{B}}E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{G(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t+K(x+w_t+\xi_t)dt\}. \tag{14}$$

证. 对 $\forall\xi\in R$ 及 $T>0$，由 Ito 公式有

$$\begin{aligned}
V(x)-e^{-\alpha T}V(x+w_T+\xi_T)&\overset{a\cdot s}{=\!=}\int_0^T e^{-\alpha t}U(x+w_t+\xi_t)dw_t\\
&\quad+\int_0^T e^{-\alpha t}\{\alpha V(x+w_t+\xi_t)-\frac{1}{2}V''(x+w_t+\xi_t)\}dt\\
&\quad-\int_0^T e^{-\alpha t}U(x+w_t+\xi_t)d\xi_t-\sum_{0\leqslant t\leqslant T}e^{-\alpha t}\{\Delta V(x+w_t+\xi_t)\\
&\quad-U(x+w_t+\xi_t)\Delta\xi_t\}\\
&\leqslant\int_0^T e^{-\alpha t}U(x+w_t+\xi_t)dw_t+\int_0^T e^{-\alpha t}\{\alpha V(x+w_t+\xi_t)\\
&\quad-\frac{1}{2}V''(x+w_t+\xi_t)\}dt+\int_0^T e^{-\alpha t}G(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t\\
&\leqslant\int_0^T e^{-\alpha t}U(x+w_t+\xi_t)dw_t+\int_0^T e^{-\alpha t}K(x+w_t+\xi_t)dt\\
&\quad+\int_0^T e^{-\alpha t}G(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t.
\end{aligned} \tag{15}$$

在以上的推证中用到了(11)—(13)式. 对上式两端取期望且注意 $U(\cdot)$ 有界，便得

$$V(x)-Ee^{-\alpha T}V(x+w_T+\xi_T)\leqslant E\int_0^T e^{-\alpha t}G(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t$$

$$+E\int_0^T K(x+w_t+\xi_t)e^{-\alpha t}dt. \tag{16}$$

令 $T\to\infty$，由上式推知

$$V(x)\leqslant E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{G(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t+K(x+w_t+\xi_t)dt\}. \tag{17}$$

定理得证.

为了利用上面的结果，注意到 $H(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 有界性的限制，定义两列函数作为 $g(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的过渡：

$$g_n(x)=\begin{cases} g(x), & |x|\leqslant n, \\ g(n)+\int_n^{|x|}\{g'(u)\wedge[(n+1)-u]g'(u)\}du, & |x|>n, \end{cases} \tag{18}$$

$$h_n(x)=\begin{cases} h(x), & |x|\leqslant n, \\ h(n)+\int_n^{|x|}h'(u)du, & |x|>n. \end{cases} \tag{19}$$

不难看出 $n\to\infty$ 时对 $\forall x\in R$ 有

$$g_n(x)\uparrow g(x),\quad h_n(x)\uparrow h(x). \tag{20}$$

再令 $u_n(x)=\inf_{\tau\in\mathscr{T}}E\left[\int_0^{\tau\wedge s(x)}e^{-\alpha t}h_n'(x+w_t)dt+e^{-\alpha\tau}g_n(x+w_\tau)I_{[\tau<s(x)]}\right]$，$\forall x\in R^+$. 则 $u_n(\cdot)$ 为 R^+ 上单调上升的函数列，再令 $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$. 可证 $u(x)$ 为 R^+ 上非降连续函数，且 $u(x)\leqslant g(x)$，$u(0)=0$. 又在 $G=\{x>0:u(x)<g(x)\}$ 上有

$$\alpha u(x)-\frac{1}{2}u''(x)=h'(x). \tag{21}$$

实际 $u(x)$ 而是一个最佳费用函数，即

$$u(x)=\inf_{\tau\in\mathscr{T}}E\left[\int_0^{\tau\wedge S(x)}e^{-\alpha t}h'(x+w_t)dt\right.$$
$$\left.+e^{-\alpha\tau}g(x+w_\tau)I_{[\tau<S(x)]}\right],\quad \forall x\in R^+. \tag{22}$$

再令 $v(0)=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{2}u'(0)+h(0)\right\}$，$v(x)=v(0)+\int_0^x u(y)dy$，$x\in R^+$；$x<0$ 时令 $v(x)=v(-x)$. 令 $c=\sup\{c'\geqslant 0$，对 $\forall x\in[0,c']$ 有 $u(x)<g(x)\}>0$.

再叙述

引理. 对任何常数 $c>0$ 及 $x\in R$，使方程组存在唯一解 $\theta^+=\{\theta_t^+,\ t\geqslant 0\}$ 及 $\theta^-=\{\theta_t^-,t\geqslant 0\}$，且 $t>0$ 时 $\theta_t^\pm$ 皆连续：

$$\theta_t^+=\max[0,\max_{0\leqslant u\leqslant t}\{-x-w_u+\theta_u^--c\}],$$
$$\theta_t^-=\max[0,\max_{0\leqslant u\leqslant t}\{x+w_u+\theta_u^+-c\}].$$

而且 $\theta^\pm$ 为适合下列条件的唯一的单调非降过程：

i) $-c\leqslant x_t=x+w_t+\theta_t^+-\theta_t^-\leqslant c$，$\forall t>0$，

ii) θ_t^+ 在 $\{t:x_t\leqslant -c\}$ 之外是平的(即 $x_t>-c$ 时 θ_t^+ 不变化)，

iii) θ_t^- 在 $\{t:x_t\geqslant c\}$ 之外是平的.

最后叙述本文主要的

定理 2. 设(2),(3)式成立,则对 $\forall x\in R$ 有

$$v(x)=\inf_{\xi\in\mathscr{B}}E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{g(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t+h(x+w_t+\xi_t)dt\}. \tag{23}$$

若 $c<\infty$,则令 $\xi^*=\theta^+-\theta^-$ ($\theta^\pm$ 为引理所确定的过程),则当 $x\in[-c,c]$ 时,有

$$v(x)=E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{g(x+w_t+\xi_t^*)d\check{\xi}_t^*+h(x+w_t+\xi_t^*)dt\}. \tag{24}$$

而当 $c=\infty$时,令 $\xi^*=0$, 对 $\forall x\in R$, 上式仍然成立. 即此时的 ξ^* 为最佳控制.

证. 令 $v_n(0)=\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{2}u_n'(0)+h_n(0)\right\}$, $v_n(x)=v_n(0)+\int_0^x u_n(y)dy$. 则由定理 1 知,有

$$v_n(x)\leqslant \inf_{\xi\in\mathscr{B}}E\int_0^\infty e^{-\alpha t}\{g_n(x+w_t+\xi_t)d\check{\xi}_t+h_n(x+w_t+\xi_t)dt\},\ \forall x\in R. \tag{25}$$

另一方面,可以证明 $v_n(0)\uparrow v(0)$, 利用单调收敛定理即由(25)推知(23)式.

当 $c<\infty$时, 注意 $v'(-c)=-g(-c)$, $v'(c)=g(c)$, $-c\leqslant x+w_t+\xi_t^*\leqslant c$, 并利用(21)及 ξ^* 的结构性质, 可证(24)成立. 若 $c=\infty$, 令 $\tau_n=\inf\{t\geqslant 0: x+w_t\bar{\in}(-n,n)\}$, 则由(21)及 Ito 公式不难推知

$$v(x)=E\int_0^{\tau_n} e^{-\alpha t}h(x+w_t)dt+Ee^{-\alpha\tau_n}v(x+w_{\tau_n}). \tag{26}$$

令 $n\to\infty$即推知 $v(x)\geqslant E\int_0^\infty e^{-\alpha t}h(x+w_t)dt$, 再由(23)式推知(24)此时亦成立.

这样在区域 $[-c,c]$ 上将最佳控制构造出来, 将这个区域称为"主要控制区域",因为一般说来在$[-c,c]$之外,模型的最佳控制已不存在(参看[4]),

参 考 文 献

[1] Karatzas. I., A class of singular stochastic control problem, *Adv. Appl. Prob.*, **15** (1983), 225—254.

[2] Menaldi, J. L., On the optimal stopping time problem for degenerate diffusions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **18**: 6 (1980), 697—721.

[3] 刘坤会, Richard 模型最佳控制的存在性及其费用的函数结构,应用数学学报, **9**: 4(1986), 385—408.

[4] 刘坤会,一类奇异型折扣费用模型之推广,系统科学与数学, **9**: 2(1989),113—123.

FROM STOPPING PROBLEMS TO DISCOUNTED PROBLEMS

Liu Kun-Hui

(Department of Mathematics, Northern Jiaotong University, Beijing 100044)

ABSTRACT

Using a class of stopping problems, this paper studies the discounted problem and gives the existence and structure of its optimal control.