系统科学与数学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
3 (4) (1983), 245—262

SUR LA RESOLUTION DES PROBLEMES D'ISAAC-DIRICHLET

Omar Bennouna EtShi Shuzhong (Shih Shu-Chung)*

I. Introduction

Dans ce travail on étudie une classe d'E.D.P. non linéaire du type "minimax" associée à des problèmes de jeux différentiels stochastiques et introduite dans W. H. Fleming [3] et N. V. Krylov [1]. Plus précisément on considère les problèmes suivants:

$$\begin{cases}\inf\limits_{l}\sup\limits_{k}(A^{kl}u(x)-f^{kl}(x))=0 & \text{p. p. dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \Gamma,\end{cases} \tag{1}$$

où

$$A^{kl}u\equiv-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{kl}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{kl}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c^{kl}(x)u, \tag{2}$$

$$(k,\ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{kl}\xi_i\xi_j\geqslant\gamma|\xi|^2;\ \forall x\in\Omega \text{ et } \forall\ \xi\in\mathbf{R}^n;\ \gamma>0 \tag{3}$$

$$a_{ij}^{kl},\ b_i^{kl},\ c^{kl},\ f^{kl}\in C^3(\Omega) \tag{4}$$

$$\phi=a_{ij}^{kl},\ b_i^{kl},\ c^{kl},\ f^{kl},\ \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\leqslant C_1 \tag{5}$$

$$c^{kl}(x)\geqslant C_0>\lambda_0\geqslant 0 \text{ où } \lambda_0 \text{ dépend de } C_1 \text{ et } \gamma \tag{6}$$

$$\Omega \text{ ouvert borné de } \mathbf{R}^n \text{ avec frontière } \Gamma \text{ régulière.} \tag{7}$$

Dans le cas $n=2$, le seul résultat connu est celui de [1] qui obtient par une méthode probabiliste et sous certaines hypothèses sur la famille d'opérateurs

$$\tilde{A}^{kl}v\equiv A^{kl}v-f^{kl},\ v\in W^{2,2}(\Omega)$$

l'existence et l'unicité dans cet espace.

Dans ce travail, on utilise une méthode analytique s'inspirant des travaux faits dans le cas du problème de Bellman-Dirichlet par, entre autres, L. C. Evans et A. Freidman [2], P. L. Lions [4].

On obtient ainsi l'existence et l'unicité de la solution de (1) dans $W^{2,\infty}(\Omega)$ sous la condition supplémentaire (conditions de consistence de la famille d'opérateurs $\tilde{A}^{kl}$ sur $W^{2,\infty}(\Omega)$):

Pour tout l fixé, $v\in W^{2,\infty}(\Omega)$, il existe $\tilde{k}\equiv\tilde{k}(l,v)$ tel que (8)

$$\sup_{k}\tilde{A}^{kl}v(x)=\tilde{A}^{\tilde{k}l}v(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Une condition suffisante pour (8) est donnée dans [7]:

Il existe $\tilde{k}$ tel que $A^{\tilde{k}l}f^{ml}(x)-A^{ml}f^{\tilde{k}l}(x)\geqslant C>0$, $\forall m\neq\tilde{k}$, dans un ρ-voisinage de

Reçu Le 15 Mai 1982.

* BEL (Maroc) et Paris IX; Nankai Université (R. P. de Chine) et Paris IX.

Ω où $\rho > 0$ assez grande.

Nous ne savons pas si l'on peut se débarrasser de la condition (8). Les raisons de son introduction viennent du fait que les termes pénalisants, dans notre méthode, ne peuvent plus être convexes et que l'on doit passer à la limite plusieurs fois, ce qui entraine une perte de régularité des solutions approchées.

Remarquons que dans [1] des hypothèses semblables ont été faites.

Remarque I. 1. L'hypothèse (4) n'est pas obligatoire, on peut toujours approcher $\phi = a_{i,j}^{kl}$, b_i^{kl}, c^{kl}, f^{kl} par des fonctions C^3 (cf [2], [4]).

Remarque I. 2. Dans (8) on peut remplacer $\bar{\bar{A}}^{kl}$ par $\bar{\bar{A}}$ opérateur vérifiant (2)—(6) et tel que $\bar{\bar{A}} \notin \{\bar{\bar{A}}^{kl}\}$.

Remarque I. 3. On peut supposer que (8) a lieu localement, dans ce cas la solution $u \in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$.

II.-Solutions Approchees et Estimations $W^{1,\infty}(\Omega)$

On considère le système pénalisé suivant:

$$\begin{cases} A^{kl}u^{kl}_{\varepsilon\eta} + \beta_\varepsilon(u^{kl}_{\varepsilon\eta} - u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta}) - \beta_\eta(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta} - u^{kl}_{\varepsilon\eta}) = f^{kl} \text{ p. p. dans } \Omega \\ u^{kl}_{\varepsilon\eta} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ ((k = 1, \cdots, p;\ l = 1, \cdots, q \text{ et } \varepsilon, \eta > 0) \end{cases} \tag{9}$$

où

$$u^{p+1,l}_{\varepsilon\eta} \equiv u^{1l}_{\varepsilon\eta},\ u^{k,q+1}_{\varepsilon\eta} \equiv u^{kl}_{\varepsilon\eta} \qquad (k = 1, \cdots, p;\ l = 1, \cdots, q), \tag{10}$$

où β_ε et β_η vérifient

$$\begin{cases} \beta_\varepsilon(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0,\ \beta_\varepsilon(t) \to \infty \text{ si } t > 0 \text{ et } \varepsilon \to 0, \\ 0 \leqslant \beta'_\varepsilon(t) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon},\ 0 \leqslant \beta''_\varepsilon(t) \leqslant \dfrac{1}{2\varepsilon^2}, \\ |t\beta'_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(t)| < C_2. \end{cases} \tag{11}$$

Dans cette partie on montre qu'il existe une solution unique $(u^{kl}_{\varepsilon\eta})(k = 1, \cdots, p;\ l = 1, \cdots, q)$ de (9), et qu'elle vérifie $\|u^{kl}_{\varepsilon\eta}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant$ Cte (indép. de ε de η de p et de q).

Proposition II. 1. Le système (9) admet une solution unique $(u^{kl}_{\varepsilon\eta})$ $(k = 1, \cdots, p;$ $l = 1, \cdots, q)$ avec

$$u^{kl}_{\varepsilon\eta} \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega) \quad (k = 1, \cdots, p;\ l = 1, \cdots, q). \tag{12}$$

Démonstration. La démonstration est la même que celle du théorème 2.3 de [2], c'est-à-dire, on peut définir:

$$u = \begin{pmatrix} u^{11} & u^{12} & \cdots & u^{1q} \\ u^{21} & u^{22} & \cdots & u^{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^{p1} & u^{p2} & \cdots & u^{pq} \end{pmatrix} \quad Au = \begin{pmatrix} A^{11}\,u^{11} & A^{12}\,u^{12} & \cdots & A^{1q}\,u^{1q} \\ A^{21}\,u^{21} & A^{22}\,u^{22} & \cdots & A^{2q}\,u^{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{p1}\,u^{p1} & A^{p2}\,u^{p2} & \cdots & A^{pq}\,u^{pq} \end{pmatrix}$$

et

$$B_{\varepsilon\eta}u=\begin{pmatrix}\beta_\varepsilon(u^{11}-u^{21})\beta_\varepsilon(u^{12}-u^{22})\cdots\beta_\varepsilon(u^{1q}-u^{2q})\\ \beta_\varepsilon(u^{21}-u^{31})\beta_\varepsilon(u^{22}-u^{32})\cdots\beta_\varepsilon(u^{2q}-u^{3q})\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \beta_\varepsilon(u^{p1}-u^{11})\beta_\varepsilon(u^{p2}-u^{12})\cdots\beta_\varepsilon(u^{pq}-u^{1q})\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\beta_\eta(u^{12}-u^{11})\beta_\eta(u^{13}-u^{12})\cdots\beta_\eta(u^{11}-u^{1q})\\ \beta_\eta(u^{22}-u^{21})\beta_\eta(u^{23}-u^{22})\cdots\beta_\eta(u^{21}-u^{2q})\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ \beta_\eta(u^{p2}-u^{p1})\beta_\eta(u^{p3}-u^{p2})\cdots\beta_\eta(u^{p1}-u^{pq})\end{pmatrix}$$

où $u^{kl}\in C(\Omega)$, $A^{kl}u^{kl}\in C(\bar\Omega)(k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q)$ et où

$$D(A^{kl})=\{v\in W_0^{1,2}(\Omega)\cap W^{2,s}(\Omega);\ A^{kl}v\in C(\bar\Omega)\}\ (s>n).$$

Soit $X^{kl}=C(\bar\Omega)$, $X=\underset{k,l}{\otimes}X^{kl}$ et $D(A)=\underset{k,l}{\otimes}D(A^{kl})$. Alors, on peut montrer que l'opérateur $A_{\varepsilon\eta}=A-c_0I+B_{\varepsilon\eta}$ de domaine $D(A)$ est m-accretif. D' après la théorie des opérateurs m-accretifs et des équations elliptiques, on obtient la proposition II. 1.

Proposition II. 2.

$$\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant \mathrm{Cte}\ (k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q). \tag{13}$$

Démonstration. Comme dans [4] on suppose que Ω possède la propriété de sphère extérieure uniforme, à savoir

$$\exists\rho>0,\ \forall y\in\Gamma,\ \exists\hat y\in\mathbf{R}^n\backslash\bar\Omega:\ \ \{z\in\mathbf{R}^n;\ |z-\hat y|\leqslant\rho\}\cap\bar\Omega=\{y\}.$$

On introduit w donnée par:

$$w(x)=e^{-\lambda\rho^2}-e^{-\lambda|x-\hat y|^2}$$

où λ est une constante positive assez grande, et on peut montrer que

$$\begin{cases}A^{kl}(-\mu w)<f^{kl}\ \text{sur}\ \bar\Omega;\ -\mu w|_\Gamma\leqslant 0,\ -\mu w(y)=0,\\ A^{kl}(\mu w)>f^{kl}\ \text{sur}\ \bar\Omega;\ \mu w|_\Gamma\geqslant 0,\ \mu w(y)=0,\\ (k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q)\end{cases} \tag{14}$$

où μ est une constante.

Soient $k_0\in\{1,\cdots,p\}$, $l_0\in\{1,\cdots,q\}$ et $x_0\in\bar\Omega$ avec

$$\min_{k,l,x}(u_{\varepsilon\eta}^{kl}+\mu w)(x)=(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}+\mu w)(x_0). \tag{15}$$

Si $x_0\in\Gamma$, alors $(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}+\mu w)(x_0)\geqslant 0$ et $u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}\geqslant-\mu w$ sur $\bar\Omega$. Si $x_0\in\Omega$, mais $(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}+\mu w)(x_0)<0$, alors le principe du maximum donne

$$\begin{aligned}0\geqslant A^{k_0l_0}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}+\mu w)(x_0)&=f^{k_0l_0}(x_0)-A^{k_0l_0}(-\mu w)(x_0)\\ &-\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}(x_0)-u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}(x_0))+\beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1}(x_0)-u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}(x_0)).\end{aligned}$$

D'après (14) et (15), on a $f^{k_0l_0}(x_0)-A^{k_0l_0}(-\mu w)(x_0)>0$ et $u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}(x_0)\leqslant u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}(x_0)$, donc $\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}(x_0)-u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}(x_0))=0$. Ainsi, on obtient une contradiction qui prouve que

$$(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}+\mu w)(x_0)\geqslant 0;\ u_{\varepsilon\eta}^{kl}\geqslant-\mu w\ \text{sur}\ \bar\Omega.$$

De même on a aussi $u_{\varepsilon\eta}^{kl}\leqslant\mu w$, d'où (13).

Proposition II. 3.

$$\|\nabla u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leqslant \text{Cte} \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, q). \tag{16}$$

Démonstration. Puisque $|\nabla u_{\varepsilon\eta}^{kl}|(y) = \left|\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial \nu}(y)\right|$ et $|u_{\varepsilon\eta}^{kl}| \leqslant \mu w$, on déduit aisément:

$$\left|\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial \nu}(y)\right| \leqslant \mu \left|\frac{\partial w}{\partial \nu}(y)\right| = \text{Cte}$$

d'où (16) (ν étant la normale extérieure à Ω au point y de Γ).

Proposition II. 4.

$$\|\nabla u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \text{Cte} \quad (k=1, \cdots, p;\ l=1, \cdots, q). \tag{17}$$

Démonstration. Soit C une constante majorant $\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{L^\infty(\Omega)}$. On considère

$$z^{kl} = |\nabla u_{\varepsilon\eta}^{kl}|^2 + \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{kl})^2,$$

où λ est une constante positive qui sera déterminée dans la suite. Montrons que $\max\limits_{k,l,x} z^{kl}(x) \leq$ Cte.

En effet soient $k_0 \in \{1, \cdots, p\}$, $l_0 \in \{1, \cdots, q\}$ et $x_0 \in \Omega$ vérifiant

$$\max_{k,l,x} z^{kl}(x) = z^{k_0l_0}(x_0).$$

Si $x_0 \in \Gamma$, d'après la proposition II. 3, l'estimation (17) est prouvée. Si $x_0 \in \Omega$, on calcule $A^{k_0l_0}z^{k_0l_0}$:

$$\begin{aligned}
A^{k_0l_0}z^{k_0l_0} = & -2 \sum_{i,j,m=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_m} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_j \partial x_m} - 2\lambda \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_j} \\
& + \sum_{m=1}^{n} \left\{ 2A^{k_0l_0}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m}\right) - c^{k_0l_0} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m} \right\} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m} \\
& - 2\lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) A^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} + \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) c^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} \\
\leqslant & -2\gamma \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 - 2\gamma\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{m=1}^{n} \left\{ 2A^{k_0l_0}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m}\right)\right. \\
& \left. - c^{k_0l_0} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m} \right\} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m} - 2\lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) A^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} \\
& + \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) c^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}.
\end{aligned}$$

Mais

$$A^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} = f^{k_0l_0} - \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) + \beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}),$$

$$\begin{aligned}
A^{k_0l_0}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m}\right) = & \frac{\partial f^{k_0l_0}}{\partial x_m} - \beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \frac{\partial}{\partial x_m}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \\
& + \beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \frac{\partial}{\partial x_m}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \\
& + \left\{ A^{k_0l_0}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}(A^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \right\}
\end{aligned}$$

et

$$\left| 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m} \left\{ A^{k_0l_0}\left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial}{\partial x_m}(A^{k_0l_0} u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \right\} \right|$$

$$= \left| 2\left(-\sum_{m,i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial a_{ij}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} + \sum_{i,m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial b_i^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial c^{k_0 l_0}}{\partial x_m} u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}\right)\right| \leqslant \gamma \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2$$

$$+ \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \alpha_2$$

où α_1 et α_2 sont deux constantes. En choisissant λ assez grand, on a donc

$$A^{k_0 l_0} z^{k_0 l_0} \leqslant -\gamma\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \text{Cte}$$

$$- 2\beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})$$

$$- 2\beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})$$

$$+ 2\lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})\{\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) - \beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})\}.$$

D'autre part, d'après (11), on a:

$$\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) \leqslant (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})\beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) + C_2$$
$$\beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1}) - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) \geqslant (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l+1})\beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) - C_2$$

et on en déduit

$$A^{k_0 l_0} z^{k_0 l_0} \leqslant -\gamma\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \text{Cte} - 2\beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})$$

$$\cdot \left\{\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) + \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})^2\right.$$

$$\left. - \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})\right\}$$

$$- 2\beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) \left\{\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})\right.$$

$$\left. + \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})^2 - \lambda(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})(C - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})\right\}.$$

En notant que $2u\ (u - v) \geqslant u^2 - v^2$, on obtient:

$$A^{k_0 l_0} z^{k_0 l_0} \leqslant -\gamma\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \text{Cte} - \beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})(z^{k_0 l_0} - z^{k_0+1, l_0})$$

$$- \beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0})(z^{k_0 l_0} - z^{k_0, l_0+1})$$

$$\leqslant -\gamma\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_i}\right)^2 + \text{Cte}.$$

D'après le principe du maximum, on a $A^{k_0 l_0} z^{k_0 l_0}(x_0) \geqslant 0$ d'où

$$|\nabla u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}|^2(x_0) \leqslant \mathrm{Cte}$$

et

$$z^{k_0l_0}(x_0) \leqslant |\nabla u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}|^2(x_0) + \mathrm{Cte} \leqslant \mathrm{Cte}$$

d'où (16).

Des propositions II. 2, II. 3 et II. 4, il résulte:

Proposition II. 5.

$$\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leqslant \mathrm{Cte} \ (\text{indép. de } \varepsilon, \text{ de } \eta, \text{ de } p \text{ et de } q) \tag{18}$$
$$(k=1, \cdots, p, \ l=1, \cdots, q; \ \varepsilon>0, \ \eta>0).$$

III. Estimations $W^{2,\infty}(\Omega)$

Dans cette partie on s'intéresse à des estimations $W^{2,\infty}(\Omega)$. Mais, puisque l'on a deux termes pénalisants, on n'a plus des estimations uniformes en ε et η. On montre seulement que pour $\eta>0$ fixé,

$$\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C(\eta) \ (\text{indép. de } \varepsilon, \text{ de } p \text{ et de } q).$$

Pour simplifier la présentation, dans ce qui suit on suppose $b_i^{kl}(x) \equiv 0$ et $c^{kl}(x) \equiv C_0 > 0$.

Proposition III. 1. Soit $M = \sup_{i,j,k,l} \left\| \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$. Alors, on a:

$$\sup_{i,j,k,l} \left| \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant \alpha_1 + \alpha_2 M^{1/2} \ \forall \ x \in \Gamma, \tag{19}$$

où α_1 et α_2 sont deux constantes.

La démonstration est la même que celle de [4].

Corollaire. Si $x_0 \in \Gamma$ vérifie

$$\sup_{i,j,k,l} \left| \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right| = M, \tag{20}$$

alors on a

$$\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant \mathrm{Cte} \ (\text{indép. de } \varepsilon, \text{ de } \eta, \text{ de } p \text{ et de } q).$$

En suivant [4], on suppose donc que $x_0 \in \Omega$ et que $u \in \{u_{\varepsilon\eta}^{kl}\}$ avec

$$\sup_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right| = M. \tag{21}$$

Alors, en diagonalisant la matrice Hessienne de u au point x_0, il existe $(\chi_1, \cdots, \chi_n)$ base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_i} \partial x_{\chi_j}} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \tag{22}$$

donc

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = -\sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_i}^2}$$

où a_{ij} sont les a_{ij}^{kl} correspondantes à u et où

$$\gamma \leqslant \mu_i \leqslant n \sup_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} = \mu, \quad (i = 1, \cdots, n).$$

On note

$$I = \{\alpha = (k, i, j);\ 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant i < j \leqslant n; i = j = 1 \text{ et } 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

et on pose

$$\chi_\alpha = \begin{cases} \chi_k \text{ si } \alpha = (k, 1, 1) \text{ et } k = 1, \cdots, n, \\ \chi_k \text{ si } i < j \text{ et si } k \neq i, j, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\chi_i + \chi_j) \text{ si } i < j \text{ et } k = i, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} (\chi_i - \chi_j) \text{ si } i < j \text{ et } k = j. \end{cases}$$

d'où

$$\{\chi_\alpha; \alpha = (k, i, j)\}_{k = 1, \cdots, n} = \begin{cases} (\chi_1, \cdots, \chi_n) \text{ si } i = j = 1, \\ \Big(\chi_1, \cdots, \chi_{i-1}, \dfrac{\chi_i + \chi_j}{\sqrt{2}}, \chi_{i+1}, \cdots, \chi_{j-1}, \\ \qquad \dfrac{\chi_i - \chi_j}{\sqrt{2}}, \chi_{j+1}, \cdots, \chi_n\Big) \text{ si } i < j. \end{cases}$$

Ainsi $\{\chi_\alpha;\ \alpha \in I\}$ est la réunion des $1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$ bases orthonormales $\{\chi_\alpha, \alpha = (k, i, j), 1 \leqslant k \leqslant n,\}$.

On introduit enfin:

$$\mu_\alpha = \begin{cases} \mu_k & \text{si } i < j \text{ et } k \neq i, j \\ \inf\limits_l \mu_l & \text{si } i < j \text{ et } k = i \text{ ou } j, \\ n\mu_k - (n-1)\inf\limits_l \mu_l \text{ si } i = j = 1. \end{cases}$$

Alors, on a les deux relations suivantes (cf. [4]):

$$0 < \gamma \leqslant \mu_\alpha \leqslant n\mu - (n-1)\gamma \tag{23}$$

$$\sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} = \left\{\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_i}^2}\right\}. \tag{24}$$

Proposition III. 2. Il existe:

$$b_i^{kl,\alpha,\delta},\ c^{kl,\alpha,\delta} \in C(\bar{\Omega}) \ (i = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, p;\ l = 1, \cdots, q;\ \alpha, \delta \in I),$$

dont les normes $L^\infty(\Omega)$ ne dépendent que des normes $L^\infty(\Omega)$ des dérivées premières et secondes des a_{ij}^{kl}, de γ, de μ et de n, et telles que le système suivant d'inégalités soit vérifié:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{\mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right\} + \sum_{\delta \in I} \sum_{i=1}^{n} b_i^{kl,\alpha,\delta} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu_\delta \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)$$
$$+ \sum_{\delta \in I} c^{kl,\alpha,\delta}\left(\mu_\delta \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial x_{\chi_\delta}^2}\right) + C_0 \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}$$

$$+\beta'_\varepsilon(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\left(\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}-\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{x^2_{\chi_\alpha}}\right)$$

$$+\beta'_\eta(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\left(\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}-\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}\right)\leqslant\mu_\alpha\frac{\partial^2 f^{kl}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}+C_1(\eta)\quad(25)$$

$$(k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q;\ \alpha\in I)$$

où $C_1(\eta)$ est une fonction positive de η.

Démonstration. Il suffit de montrer (25) pour $\mu_\alpha=1$. Pour cela on dérive deux fois par rapport à χ_α le système (9) et on obtient

$$-\sum_{i,j=1}^{n}a^{kl}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}\right)+C_0\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}$$

$$+\beta'_\varepsilon(u^{kl}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\frac{\partial^2}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})+\beta'_\eta(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\frac{\partial^2}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta})$$

$$+\beta''_\varepsilon(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\left\{\frac{\partial}{\partial x_{\chi_\alpha}}(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\right\}^2$$

$$-\beta''_\eta(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\left\{\frac{\partial}{\partial x_{\chi_\alpha}}(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\right\}^2$$

$$=\frac{\partial^2 f^{kl}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 a^{kl}_{ij}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x_i\partial x_j}+2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a^{kl}_{ij}}{\partial x_{\chi_\alpha}}\frac{\partial^3 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x_{\chi_\alpha}\partial x_i x_j}.$$

Mais

$$\beta''_\varepsilon(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\ \left\{\frac{\partial}{\partial x_{\chi_\alpha}}(u^{kl}_{\varepsilon\eta}-u^{k+1,l}_{\varepsilon\eta})\right\}^2\geqslant 0$$

$$\beta''_\eta(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\ \left\{\frac{\partial}{\partial x_{\chi_\alpha}}(u^{k,l+1}_{\varepsilon\eta}-u^{kl}_{\varepsilon\eta})\right\}^2\leqslant C_1(\eta),$$

et $\dfrac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x_i\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 u^{kl}}{\partial x_{\chi_\alpha}\partial x_i\partial x_j}$ peuvent s'exprimer en fonction des $\dfrac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}$ $(\alpha\in I)$. On conclut alors aisément.

Proposition III. 3.

$$\|u^{kl}_{\varepsilon\eta}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\leqslant C(\eta)\ \text{(indép. de } \varepsilon\text{, de } p \text{ et de } q) \quad (26)$$

$$(k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q,\ \varepsilon>0 \text{ et } \eta>0)$$

où $C(\eta)$ est une fonction positive de η.

Démonstration. On pose

$$K=\max_{k,l}\left\{\sup_{x\in\bar\Omega}\left[\sum_{\alpha\in I}\left(\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

et

$$W^{kl}(x)=\sum_{\alpha\in I}\left(K+\mu_\alpha\frac{\partial^2 u^{kl}_{\varepsilon\eta}}{\partial x^2_{\chi_\alpha}}\right)^2.$$

On montre que

$$W^{kl}(x)\leqslant\sum_{\alpha\in I}(K+\tau K+C_1K^{1/2}+C_2(\eta))^2\ (k=1,\cdots,p;\ l=1,\cdots,q;x\in\bar\Omega)$$

où ε est arbitrairement petit si C_0 est arbitrairement grand.

Soient k_0, l_0 et x_1 tels que

$$W^{k_0l_0}(x_1) = \max_{k,l,x} W^{kl}(x).$$

On calcule $-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial^2 W^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_j}$:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial^2 W^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_j} = -2 \sum_{\alpha \in I} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \mu_\alpha^2 \frac{\partial^3 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_{\chi_\alpha}^2} \frac{\partial^3 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_j \partial x_{\chi_\alpha}^2}$$

$$+ 2 \sum_{\alpha \in I} \sum_{i,j=1}^{n} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \left(-a_{ij}^{k_0l_0} \mu_\alpha \frac{\partial^4 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_{\chi_\alpha}^2} \right).$$

Mais $K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \geqslant 0$, donc de (25) on déduit:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial^2 W^{k_0l_0}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\leqslant -2 \sum_{\alpha \in I} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)$$

$$+ 2 \sum_{\alpha \in I} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \Bigg\{ \mu_\alpha \frac{\partial^2 f^{kl}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} - C_0 \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}$$

$$- \sum_{\delta \in I} c^{k_0l_0,\alpha,\delta} \mu_\delta \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} - \sum_{\delta \in I} \sum_{i=1}^{n} b_i^{k_0l_0,\alpha,\delta} \mu_\delta \frac{\partial^3 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\delta}^2 \partial x_i}$$

$$- \beta'_\varepsilon (u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \right)$$

$$+ \beta'_\eta (u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \right) \Bigg\}.$$

Si $x_1 \in \Omega$, comme $W^{k_0l_0} \in C^2(\Omega)$, on a $-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial^2 W^{k_0l_0}(x_1)}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0$. Donc au point x_1 on a

$$\sum_{\alpha \in I} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{k_0l_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)$$

$$+ \sum_{\alpha,\delta} \sum_{\in I\, i=1}^{n} b_i^{k_0l_0,\alpha,\delta} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\delta}^2} \right)$$

$$+ \sum_{\alpha,\delta \in I} c^{k_0l_0,\alpha,\delta} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right) \left(K + \mu_\delta \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)$$

$$+ C_0 \sum_{\alpha \in I} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)^2 + \beta'_\varepsilon (u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \sum_{\alpha \in I} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)$$

$$\cdot \left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} (u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1,l_0}) \right) + \beta'_\eta (u_{\varepsilon\eta}^{k_0,l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}) \sum_{\alpha \in I} \left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right)$$

$$\cdot\left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})\right) \leqslant \sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha \left(\frac{\partial^2 f^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} + C_1(\eta)\right)$$
$$\cdot\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right) + \sum_{\alpha,\delta \in I} c^{k_0 l_0,\alpha,\delta} K\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)$$
$$+ C_0 \sum_{\alpha \in I} K\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right).$$

Or en x_1, on a aussi

$$\sum_{\alpha \in I}\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)\left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2} W^{k_0 l_0}(x_1) - \frac{1}{2} W^{k_0+1, l_0}(x_0) \geqslant 0,$$

$$\sum_{\alpha \in I}\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)\left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2} W^{k_0 l_0}(x_1) - \frac{1}{2} W^{k_0, l_0+1}(x_0) \geqslant 0$$

et

$$\beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}),\ \beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) \geqslant 0, \text{ donc}$$

$$\beta_\varepsilon'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0}) \sum_{\alpha \in I}\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)\left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0+1, l_0})\right)$$
$$+ \beta_\eta'(u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}) \sum_{\alpha \in I}\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)\left(\mu_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}(u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0} - u_{\varepsilon\eta}^{k_0, l_0+1})\right)$$
$$\geqslant 0.$$

D'autre part, de part l'elliplicité de $a_{ij}^{k_0 l_0}$, il existe $\lambda_1 > 0$ dépendant de γ et des normes L^∞ des $b_i^{k_0 l_0,\alpha,\delta}$, $c^{k_0 l_0,\alpha,\delta}$ tel que pour tout $(\xi_0^\alpha, \xi^\alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ et pour tout $\alpha \in I$ on ait:

$$\sum_{\alpha \in I} \sum_{i,j=1} a_{ij}^{k_0 l_0} \xi_i^\alpha \xi_j^\alpha + \sum_{\alpha,\delta \in I} \sum_{i=1} b_i^{k_0 l_0,\alpha,\delta} \xi_0^\alpha \xi_i^\alpha + \sum_{\alpha,\delta \in I} c^{k_0 l_0,\alpha,\delta} \xi_0^\alpha \xi_0^\alpha$$
$$+ \lambda_1 \sum_{\alpha \in I} \xi_0^\alpha \xi_0^\alpha \geqslant 0.$$

Donc si $C_0 > \lambda_1$, on a

$$(C_0 - \lambda_1) W^{k_0 l_0}(x_1) \leqslant \sum_{\alpha \in I}\left(K + \mu_\alpha \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{k_0 l_0}(x_1)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2}\right)(C_0 K + C_4 K + C_3(\eta)),$$

où C_4 ne dépend que de $\|c^{k_0 l_0,\alpha,\delta}\|_{L^\infty(\Omega)}$ et où $C_3(\eta)$ ne dépend que de $C_1(\eta)$ et de $\|f^{k_0 l_0}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}$. On en déduit

$$W^{k_0 l_0}(x_1) \leqslant \sum_{\alpha \in I} (K + \tau K + C_4(\eta))^2$$

où $\tau = \dfrac{\lambda_1 + C_4}{C_0 - \lambda_1}$. Si $x_1 \in \Gamma$, alors, d'après (18), on a

$$W^{k_0 l_0}(x_1) \leqslant \sum_{\alpha \in I} (K + \alpha_1 + \alpha_2 M^{1/2})^2.$$

Mais

$$M \leqslant n \sup_{i,j,k,l,x} \left| \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant 2n \sup_{\alpha,k,l,x} \left| \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right|$$

d'où

$$W^{k_0 l_0}(x_1) \leqslant C_5 K,$$

où C_5 ne dépend que de γ, μ et n.

Ainsi dans tous les cas on obtient la majoration annoncée:

$$W^{kl}(x) \leqslant \sum_{\alpha \in I} (K + \tau K + C_3 K^{1/2} + C_2(\eta))^2$$

où $\tau = \dfrac{\lambda_1 + C_4}{C_0 - \lambda_1}$, C_3 ne dépend pas de C_0 et où $C_2(\eta)$ ne dépend que de η et de C_1.

Enfin, on a:

$$\sum_{\alpha \in I} \left\{ \mu_\alpha \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right\}^2 \leqslant \sum_{\alpha \in I} \;[2K + \tau K + C_3 K^{1/2} + C_2(\eta)][\tau K + C_3 K^{1/2} + C_2(\eta)]$$

$$- 2K \sum_{\alpha \in I} \left(\mu_\alpha \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right).$$

Mais d'après (24),

$$-\sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} = -\left(1 + \frac{n(n+1)}{2}\right) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant C_5(\eta),$$

puisque $A^{kl} u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x_0) \leqslant f^{kl}(x_0) + \beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k,l+1} - u_{\varepsilon\eta}^{kl})$ et $\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leqslant$ Cte. De plus

$$\sum_{\alpha \in I} \left\{ \mu_\alpha \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_{\chi_\alpha}^2} \right\}^2 \geqslant \gamma^2 \sup_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 = \gamma^2 M^2$$

et

$$K \leqslant C_6 M,$$

où C_6 ne dépend que de γ, μ, n. Donc en conclusion on a:

$$M^2 \leqslant C_6^2 \tau (2 + \tau) M^2 + C M^{3/2} + C(\eta) M^{1/2} + C(\eta).$$

Si λ_0 est assez grand tel que $C_6^2 \tau(2 + \tau) < 1$, on obtient l'estimation

$$M \leqslant C(\eta)$$

d'où (26).

Remarque III. 1. De la même manière, on peut aussi démontrer que

$$\|u_{\varepsilon\eta}^{kl}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C(\varepsilon) \text{ (indép. de } \eta,\ p \text{ et } q).$$

IV. Premier Passage à la Limite

Etant donné (26), on peut extraire une sous-suite de $u_{\varepsilon\eta}^{kl}$ pour η fixé, qui convergera vers une solution d'un autre système pénalisé. Plus précisément, on a:

Proposition IV. 1. Le système pénalisé suivant:

$$\begin{cases} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} \ (A^{kl} u_\eta^{pl}(x) - f^{kl}(x)) = \beta_\eta(u_\eta^{p,l+1}(x) - u_\eta^{pl}(x)) \text{ p. p. dans } \Omega, \\ u_\eta^{pl} = 0 \text{ sur } \Gamma, \qquad (l = 1, \cdots, q; \text{ et } \eta > 0) \end{cases} \tag{27}$$

admet une solution (u_η^{pl}) $(l=1, \cdots, q)$

et on a

$$\|u_\eta^{pl}\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant C(\eta) \text{ (indép. de } p \text{ et } l). \tag{28}$$

Démonstration. D'après (26), pour η fixé, on peut extraire une sous-suite $u_{\varepsilon_n\eta}^{kl}$ de $u_{\varepsilon\eta}^{kl}$ telle que si $\varepsilon_n \to 0$,

$$u_{\varepsilon_n\eta}^{kl} \to u_\eta^{kl} \text{ dans } C^1(\bar{\Omega}) \text{ fort,}$$
$$u_{\varepsilon_n\eta}^{kl} \to u_\eta^{kl} \text{ dans } W^{2,s}(\Omega) \text{ faible } \forall\, s<\infty.$$

Puisque

$$\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon\eta}^{kl}-u_{\varepsilon\eta}^{k+1,l}) = -A^{kl}u_{\varepsilon\eta}^{kl}+\beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k,l+1}-u_{\varepsilon\eta}^{kl})+f^{kl} \leqslant C(\eta),$$

en notant que $\beta_\varepsilon(t)\to\infty$ si $t>0$ et $\varepsilon\to 0$, on en déduit

$$u_\eta^{1l} \leqslant u_\eta^{2l} \leqslant \cdots \leqslant u_\eta^{pl} \leqslant u_\eta^{p+1,l} = u_\eta^{1l}$$

d'où

$$u_\eta^{1l} = u_\eta^{2l} = \cdots = u_\eta^{pl}.$$

De plus, $u_\eta^{pl} \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Montrons que u_η^{pl} vérifie (27).

En effet à partir de (9), on voit que

$$A^{kl}u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x) - f^{kl}(x) \leqslant \beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k,l+1}(x)-u_{\varepsilon\eta}^{kl}(x)).$$

Puisque la convergence faible préserve cette inégalité, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &A^{kl}u_\eta^{pl}(x) - f^{kl}(x) \leqslant \beta_\eta(u_\eta^{p,l+1}(x)-u_\eta^{pl}(x)) \text{ p. p. dans } \Omega, \\ &(k=1, \cdots, p). \end{aligned}\right. \tag{29}$$

D'autre part, en suivant Evans et Friedman [2], soient

$$A^l u = \begin{pmatrix} A^{1l}u^1 \\ A^{2l}u^2 \\ \vdots \\ A^{pl}u^p \end{pmatrix} \text{ et } B_\varepsilon u = \begin{pmatrix} \beta_\varepsilon(u^1-u^2) \\ \beta_\varepsilon(u^2-u^3) \\ \vdots \\ \beta_\varepsilon(u^p-u^1) \end{pmatrix}.$$

Alors, $A^l + B_\varepsilon$ est un opérateur accretif dans $(C(\bar{\Omega}))^p$. On a donc

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant [u_{\varepsilon\eta}^l - \tilde{\phi},\ (A^l+B_\varepsilon)u_{\varepsilon\eta}^l - (A^l+B_\varepsilon)\tilde{\phi}]_+ \\ &= \max_{1\leqslant k\leqslant p} [u_{\varepsilon\eta}^{kl}-\phi,\ f^{kl}+\beta_\eta(u_{\varepsilon\eta}^{k,l+1}-u_{\varepsilon\eta}^{kl})-A^{kl}\phi]_+ \end{aligned}$$

où $u_{\varepsilon\eta}^l = (u_{\varepsilon\eta}^{1l}, u_{\varepsilon\eta}^{2l}, \cdots, u_{\varepsilon\eta}^{pl})^T$, $\tilde{\phi} = (\phi, \phi, \cdots, \phi)^T$ et où

$$[f, g]_+ = \max_{y\in\bar{\Omega}} g(y).\ \operatorname{sgn} f(y),\ (f\not\equiv 0);\ f,\ g\in C(\bar{\Omega})$$

$$|f(y)| = \|f\|.$$

Puisque $[\cdot,\cdot]_+$ est semi-continu supérieurement et $u_{\varepsilon_n\eta}^{kl} \to u_\eta^{pl}$ uniformément dans Ω, on a donc

$$\max_{1\leqslant k\leqslant p} [u_\eta^{pl}-\phi,\ f^{kl}+\beta_\eta(u_\eta^{p,l+1}-u_\eta^{pl})-A^{kl}\phi]_+ \geqslant 0,\ \forall\ \phi\in C(\bar{\Omega}). \tag{30}$$

D'après le lemme 2.2 de [5], pour p.p. $x_0\in\Omega$, il existe une suite $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que:

$$\phi_n(x_0)\to u_\eta^{pl}(x_0),\ \nabla\phi_n(x_0)\to\nabla u_\eta^{pl}(x_0),\ D^2\phi_n(x_0)\to D^2u_\eta^{pl}(x_0)$$

$$\psi_n(x_0) - u_\eta^{pl}(x_0) = \|\psi_n - u_\eta^{pl}\|_{C(\bar{\Omega})} > \psi_n(x) - u_\eta^{pl}(x), \ \forall\ x \in \Omega,\ x \neq x_0.$$

Donc, dans (30) on prend $\psi = \psi_n$, et on obtient

$$\max_{1 \leq k \leq p} (A^{kl}\psi_n(x_0) - f^{kl}(x_0) - \beta_\eta(u_\eta^{p,l+1}(x_0) - u_\eta^{pl}(x_0))) \geq 0$$

d'où

$$\max_{1 \leq k \leq p} (A^{kl}u_\eta^{pl}(x_0) - f^{kl}(x_0) - \beta_\eta(u_\eta^{p,l+1}(x_0) - u_\eta^{pl}(x_0))) \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \tag{31}$$

De (29) et (31), il résulte (27). (28) est une conséquence de (26).

Proposition IV. 2. Le système pénalisé suivant

$$\begin{cases} \sup\limits_{1 \leq k < \infty} (A^{kl}u_\eta^l(x) - f^{kl}(x)) = \beta_\eta(u_\eta^{l+1}(x) - u_\eta^l(x)) \text{ p.p. dans } \Omega, \\ u_\eta^l = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases} \tag{32}$$

$$(l = 1, \cdots, q; \text{ et } \eta > 0)$$

admet une solution $(u_\eta^l)(l = 1, \cdots, q)$ avec

$$u_\eta^l \in W^{2,\infty}(\Omega). \tag{33}$$

Démonstration. D'après (28), pour η fixé, on peut aussi extraire une sous-suite $u_\eta^{p_n l}$ de u_η^{pl} telle que si $p_n \to \infty$,

$$u_\eta^{p_n l} \to u_\eta^l \text{ dans } C^1(\bar{\Omega}) \text{ fort},$$

$$u_\eta^{p_n l} \to u_\eta^l \text{ dans } W^{2,s}(\Omega) \text{ faible } \forall\ s < \infty.$$

Il est immédiat que $u_\eta^l \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega)$. On montre que u_η^l vérifie (32). Soit

$$\mathscr{A}_p^l v(x) \equiv \max_{1 \leq k \leq p} (A^{kl}v(x) - f^{kl}(x)),$$

$$\mathscr{A}^l v(x) \equiv \sup_{1 \leq k < \infty} (A^{kl}v(x) - f^{kl}(x)).$$

Alors, $\mathscr{A}_p^l$ est un opérateur accretif dans $L^\infty(\Omega)$, de domaine

$$D(\mathscr{A}_p^l) = \{v \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,\infty}(\Omega);\ \mathscr{A}_p^l v(x) \in L^\infty(\Omega)\},$$

et quand $p \to \infty$,

$$\mathscr{A}_p^l\psi(x) \to \mathscr{A}^l\psi(x) \text{ dans } C(\bar{\Omega}) \text{ fort}, \ \forall\ \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

(cf. [2]). On a donc

$$[u_\eta^{pl} - \psi, \mathscr{A}_p^l u_\eta^{pl} - \mathscr{A}_p^l\psi]_+ = [u_\eta^{pl} - \psi, \beta_\eta(u_\eta^{p,l+1} - u_\eta^{pl}) - \mathscr{A}_p^l\psi]_+ \geq 0$$
$$\forall\ \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

d'où

$$[u_\eta^l - \psi,\ \beta_\eta(u_\eta^{l+1} - u_\eta^l) - \mathscr{A}^l\psi]_+ \geq 0, \qquad \forall\ \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ensuite, on peut utiliser la même méthode pour montrer que u_η^l vérifie (32).

V. Deuxieme Passage Á la Limite

Jusqu'à maintenant on n'a pas utilisé l'hypothèse (8). Nous allons nous en servir pour démontrer l'estimation suivante

$$\|u_\eta^l\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leq \text{Cte (indép. de } \eta \text{ et } q).$$

Proposition V. 1. Soit $(u_\eta^l)(l=1,\cdots,q)$ la solution de (32) considérée précédemment sous l'hypothèse (8), on a

$$\|u_\eta^l\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant \text{Cte (indép. de } \eta \text{ et } q). \tag{34}$$

Démonstration. D'après l'hypothèse (8), il existe des opérateurs $A_\eta^l \in \{A^{kl}\}$ et des fonctions $f_\eta^l \in \{f^{kl}\}$ tels que

$$\begin{cases} A_\eta^l u_\eta^l - f_\eta^l = \sup\limits_k (A^{kl}u_\eta^l - f^{kl}) = \beta_\eta(u_\eta^{l+1} - u_\eta^l) \quad \text{p. p. dans } \Omega \\ u_\eta^l = 0 \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$
$$(l=1,\cdots,q).$$

Alors, on a $u_\eta^l \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ et on peut montrer l'estimation (34).

En effet, on suppose $\tilde{u}_\eta^l = -u_\eta^l$, et on a donc

$$\begin{cases} A_\eta^l \tilde{u}_\eta^l + \beta_\eta(\tilde{u}_\eta^l - \tilde{u}_\eta^{l+1}) = -f_\eta^l \qquad \text{p.p. dans } \Omega \\ \tilde{u}_\eta^l = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$
$$(l=1,\cdots,q).$$

Cela revient au cas que [4] a étudié. Ainsi (34) a lieu.

Dans ce qui suit, on a besoin de la proposition:

Proposition V. 2. On suppose que $u_n \in W^{2,p}(\Omega)$ et que $u_n \to u$ dans $C(\bar{\Omega})$. Alors

$$\limsup_{n\to\infty}\{\inf_l \sup_k (A^{kl}u_n(x) - f^{kl}(x))\} \geqslant \inf_l \sup_k (A^{kl}u(x) - f^{kl}(x))$$
$$\geqslant \liminf_{n\to\infty}\{\inf_l \sup_k (A^{kl}u_n(x) - f^{kl}(x))\}$$
$$\text{p. p. dans } \Omega.$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Krylov [5].

Proposition V. 3. Sous les hypothèses (2)—(8), les problèmes d'Isaac-Dirichlet suivants

$$\begin{cases} \min\limits_{1\leqslant l\leqslant q} \sup\limits_{1\leqslant k<\infty} (A^{kl}u^q(x) - f^{kl}(x)) = 0 \quad \text{p. p. dans } \Omega \\ u^q(x) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma \qquad (q=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{35}$$

admettent des solutions $u^q \in W^{2,\infty}(\Omega)$ avec

$$\|u^q\|_{W^{2,\infty}(\Omega)} \leqslant \text{Cte}. \tag{36}$$

Démonstration. D'après (34), on peut extraire une sous-suite $u_{\eta_n}^l$ de u_η^l telle que si $\eta_n \to 0$,

$$u_{\eta_n}^l \to u^1 \text{ dans } C^1(\bar{\Omega}) \text{ fort,}$$
$$u_{\eta_n}^l \to u^1 \text{ dans } W^{2,p}(\Omega) \text{ faible, } \forall p<\infty.$$

Comme avant, on peut aussi montrer que

$$u^1 = u^2 = \cdots = u^q.$$

Évidemment, u^q vérifie (36). On montre que u^q vérifie aussi (35).

D'après la proposition V. 2, de (32) il vient

$$\min_{1\leqslant l\leqslant q} \sup_{1\leqslant k<\infty} (A^{kl}u^q(x) - f^{kl}(x)) \geqslant 0 \qquad \text{p. p. dans } \Omega. \tag{37}$$

D'autre part, on peut voir que l'opérateur

$$\mathscr{A}^l v(x) = \sup_{1\leq k<\infty} (A^{kl} v(x) - f^{kl}(x))$$

est accretif dans $X = L^\infty(\Omega)$ de domaine

$$D(\mathscr{A}^l) = \{v \in W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,\infty}(\Omega); \mathscr{A}^l v(x) \in L^\infty(\Omega)\}.$$

En effet, dans $L^\infty(\Omega)$ on a

$$[f, g]_+ = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega(f,\varepsilon)} g(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x) \quad (f \not\equiv 0),$$

où

$$\Omega(f, \varepsilon) \equiv \{x \in \Omega;\ |f(x)| > \|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon\}.$$

Si $v, \bar{v} \in D(\mathscr{A}^l)$, on doit démontrer que

$$[v - \bar{v},\ \mathscr{A}^l v - \mathscr{A}^l \bar{v}]_+ = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{G_\varepsilon} (\mathscr{A}^l v(x) - \mathscr{A}^l \bar{v}(x) \geqslant 0, \tag{38}$$

(on suppose que $\max_{\bar{\Omega}} (v(x) - \bar{v}(x)) = \|v - \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)}$) où

$$G_\varepsilon = \{x;\ v(x) - v(x) \geqslant \max_{\bar{\Omega}} |v - \bar{v}| - \varepsilon\}.$$

Or d'après le principe du maximum de Bony [6], on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{ess\,sup}_{G_\varepsilon} (A^{kl} v(x) - A^{kl} \bar{v}(x)) \geqslant 0,\ \forall\ k.$$

Donc clairement on a aussi (38).

Ceci étant, on pose

$$\mathscr{A}_q u = (\mathscr{A}^1 u^1,\ \mathscr{A}^2 u^2,\ \cdots,\ \mathscr{A}^q u^q) \text{ et } B_\eta u = (\beta_\eta(u^2 - u^1),$$
$$\beta_\eta(u^3 - u^2),\ \cdots,\ \beta_\eta(u^1 - u^q)).$$

Alors, $\mathscr{A}_q + B_\eta$ est un opérateur accretif dans $(L^\infty(\Omega))^q$. On a donc

$$0 \leqslant [u_\eta - \tilde{\phi}, (\mathscr{A}_q + B_\eta) u_\eta - (\mathscr{A}_q + B_\eta)\tilde{\phi}]_+$$
$$= \max_{1\leqslant l\leqslant q} [u_\eta^l - \phi,\ -\mathscr{A}^l \phi]_+$$

où $u_\eta = (u_\eta^1,\ u_\eta^2,\ \cdots,\ u_\eta^q)$, $\tilde{\phi} = (\phi,\ \phi,\ \cdots,\ \phi)$ et où $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Ainsi, on a aussi

$$\max_{1\leqslant l\leqslant q} [u^q - \phi,\ -\sup_k\ (A^{kl}\phi - f^{kl})]_+ \geqslant 0.$$

Pour p.p. $x_0 \in \Omega$, on peut prendre une suite $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$\phi_n(x_0) \to u^q(x_0),\ \nabla\phi_n(x_0) \to \nabla u^q(x_0),\ D^2\phi_n(x_0) \to D^2 u^q(x_0)$$
$$u^q(x_0) - \phi_n(x_0) = \|u^q - \phi_n\|_{C(\bar{\Omega})} > u^q(x) - \phi_n(x)\ \forall x \in \Omega,\ x \neq x_0,$$

et on obtient

$$\min_{1\leqslant l\leqslant q} \sup_k (A^{kl}\phi_n(x_0) - f^{kl}(x_0)) \leqslant 0$$

d'où

$$\min_{1\leqslant l\leqslant q} \sup_k (A^{kl} u^q(x_0) - f^{kl}(x_0) \leqslant 0,\ \text{p. p. dans } \Omega. \tag{39}$$

De (37) et (39) on déduit (35).

Enfin, on donne notre résultat principal:

Théorème. *Sous les hypothèses* (2)—(8), *le problème d'Isaac-Dirichlet suivant:*

$$\begin{cases} \inf\limits_{l} \sup\limits_{k} \left(A^{kl}u(x) - f^{kl}(x)\right) = 0 & \text{p. p. dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

admet une unique solution $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Démonstration. D'après (36), on peut extraire une sous-suite u^{q_n} de u^q telle que si $q_n \to \infty$,

$$u^{q_n} \to u \text{ dans } C^1(\bar{\Omega}) \text{ fort,}$$
$$u^{q_n} \to u \text{ dans } W^{2,p}(\Omega) \text{ faible } \forall\ p < \infty$$

que u vérifie (1). En effet d'après (35), pour $l \leqslant q$, on a

$$\sup_{1 \leqslant k < \infty} \left(A^{kl}u^q(x) - f^{kl}(x)\right) \geqslant 0 \qquad \text{p. p. dans } \Omega$$

d'où d'après la proposition V. 2,

$$\sup_{1 \leqslant k < \infty} \left(A^{kl}u(x) - f^{kl}(x)\right) \geqslant 0 \qquad \text{p. p. dans } \Omega,\ \forall\ l. \tag{40}$$

D'autre part, de (35) on obtient aussi que

$$\inf_{1 \leqslant l < \infty} \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left(A^{kl}u^q(x) - f^{kl}(x)\right) \leqslant 0 \qquad \text{p. p. dans } \Omega,$$

d'où d'après la proposition V. 2,

$$\inf_{1 \leqslant l < \infty} \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left(A^{kl}u(x) - f^{kl}\right) \leqslant 0 \qquad \text{p. p. dans } \Omega. \tag{41}$$

De (40) et (41), on déduit (1).

L'unicité est un résultat de Krylov [5].

Remarque V. 1. En utilisant une méthode introduite dans [8] on peut encore obtenir le même résultat en supposant à la place de (6):

$$c^{kl}(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in \bar{\Omega}(k,\ l = 1,\ 2,\ \cdots)$$

c.a.d. qu'on n'a pas besoin que les coefficients $c^{kl}(x)$ soient assez grands.

Référence

[1] Krylov, N. V., Control of Markov processes and W-spaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* Tom 35 (1971), n°1, 233—266.

[2] Evans, L. C. and Friedman, A., Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation, *Tran. Amer. Math. Soc.* 253. (1979), 365—389.

[3] Fleming, W. H., Some Markovian optimization problems, *J. Math. Mech.* 12 (1963), 131—140.

[4] Lions, P. L., Résolution des problèmes de Bellman-Dirichlet, à paraître.

[5] Krylov, N. V., On uniqueness of the solution of Bellman's equation, *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat.* 35 (1971), 1377—1388.

[6] Bony, J. M., Principe du maximum dans les espaces de Sobolev, C. R. Acad. Sci. Paris, 265 (1967), 333—336.

[7] Freidman, A. and Lions, P. L., The optimal strategy in the control problem associated with the Hamilton-Jacobi-Bellman equation, *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 18, n°2 (1980), 191—198.

[8] Evans, L. C. et Lions, P. L., Résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman pour des opérateurs uniformément elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980).

关于 Isaac-Dirichlet 问题的解*

奥·本诺纳 (BEL 摩洛哥)

史 树 中 (南开大学)

本文讨论一类与 W. H. Fleming[3] 和 N. V. Krylov[2] 引人的随机微分对策问题有关的非线性椭圆型偏微分方程. 更确切地说,我们考虑下列问题:

$$\begin{cases}\inf\limits_{l}\sup\limits_{k}\ (A^{kl}u(x)-f^{kl}(x))=0, & \text{p. p. 在}\ \Omega\ \text{内},\\ u=0, & \text{在}\ \Gamma\ \text{上},\end{cases}\tag{1}$$

其中,

$$A^{kl}u=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{kl}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i^{kl}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c^{kl}(x)u\tag{2}$$

$$(k,\ l=1,\ 2,\ \cdots),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{kl}\xi_i\xi_j\geqslant\gamma|\xi|^2\forall x\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n;\ \gamma>0,\tag{3}$$

$$a_{ij}^{kl},\ b_i^{kl},\ c^{kl},\ f^{kl}\in C^2(\Omega),\tag{4}$$

$$\phi=a_{ij}^{kl},\ b_i^{kl},\ c^{kl},\ f^{kl},\ \|\phi\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\leqslant C_1,\tag{5}$$

$$c^{kl}(x)\geqslant0,\tag{6}$$

$$\Omega\ \text{为有正则边界}\ \Gamma\ \text{的有界开集}.\tag{7}$$

当 $n=2$, 唯一已知结果为 [1] 中所得到;该文利用概率方法,并对算子族

$$\bar{A}^{kl}v=A^{kl}v-f^{kl},\ v\in W^{2,p}(\Omega)$$

作了一定的假设后,才得到了方程在这一空间中的解的存在性和唯一性.

本文利用在 Bellman-Dirichlet 问题研究中 L. C. Evans 和 A. Freidman[2], P. L. Lions[4] 等用过的解析方法,在下列对算子族 $\bar{A}^{kl}$ 在 $W^{2,\infty}(\Omega)$ 中相容的补充条件下:

对于所有固定的 l, $v\in W^{2,\infty}(\Omega)$, 存在

$$\tilde{k}=\tilde{k}(l,\ v)\ \text{使得}\tag{8}$$

$$\sup_k\bar{A}^{kl}v(x)=\bar{A}^{\tilde{k}l}v(x)\quad\text{p. p. 在}\ \Omega\ \text{内},$$

证明了(1)在 $W^{2,\infty}(\Omega)$ 中的解的存在性与唯一性.

一个使(8)成立的充分条件曾在[7]中给出:

存在 $\tilde{k}$ 使得 $A^{\tilde{k}l}f^{ml}(x)-A^{ml}f^{\tilde{k}l}(x)\geqslant c>0$, $\forall\ m\neq\tilde{k}$, 在 Ω 的一个 ρ-邻域内成立,这里 $\rho>0$ 充分大,

我们不知道是否能够去掉条件 (8), 引人条件(8)的原因在于在我们的方法中惩罚项

* 本文是两位作者在巴黎第九大学决策数学研究中心访问时合作的成果.

不再是凸的，并且将通过多次极限，从而近似解丧失正则性。

我们可注意到在[1]中也有类似的假设。

注 1. 假设(4)是不必要的，因为我们总可用 C^3 类函数来逼近 $\phi = a_{ij}^{kl}, b_i^{kl}, c^{kl}, f^{kl}$.

注 2. (8)中可用满足(2)—(6)且不在 $\{\tilde{A}^{kl}\}$ 内的算子 $\tilde{A}$ 来代替。

注 3. 我们也可假设(8)局部成立，这时得到的解 $u \in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$.