系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
4 (2) (1984), 81-86

$\delta^{(m)}(x)$ 和 $x_+^{\pm n}\ln^k x_+$ 的乘积

李 雅 卿

关于广义函数的乘积,有各种定义.在[1,2]中曾比较了各种乘积,证明了利用广义函数的解析表示结合非标准分析定义的乘积 $S\circ T$ 包含了绝大多数已知的乘积.乘积 $S\circ T$ 的一个特点是易于对特殊的广义函数的乘积算出具体的结果,包括有限部分和无穷部分,例如可见[3—7].应用解析表示计算乘积的还可见[8—11].当然由于没有应用非标准分析,算出的乘积只限于是普通的广义函数的情形或阿达玛有限部分的情形.应用解析表示使得乘积易于计算的原因,是常见的广义函数均可由比较简单的初等解析函数来表示.对广义函数 $x_+^{\pm n}\ln^k x_+$,在[13]中已求出其具体的解析表示,因此有可能考虑它与其他特殊广义函数的乘积.但较之以前被计算过乘积的广义函数,$x_+^{\pm n}\ln^k x_+$ 的解析表示是比较复杂的,因此具体地计算它与其他特殊广义函数的乘积是比较困难的.在本文中,我们计算了乘积 $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^n\ln^k x_+$, $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{-n}\ln^k x_+$,对任意非负整数 m, n, k.特别有

$$\frac{Pf(\delta^{(m+n)}(x)\circ x_+^m\ln x_+)}{(m+n)!}=\left[\frac{1}{n!2}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^m\frac{1}{k}\right)+\sum_{j=1}^n\frac{m!(-1)^{j+1}}{(m+j)!(n-j)!j2^j}\right](-1)^n\delta^{(n)}(x),$$

$$Pf(\delta(x)\circ\ln^2 x_+)=\left(\frac{1}{2}\ln^2 2+\frac{1}{8}\pi^2\right)\delta(x),$$

$$Pf(\delta(x)\circ x_+^{-1}\ln x_+)=\left(-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{3}\right)\delta'(x).$$

§1. $(\ln^k x_+)_\rho$ 和 $(x_+^{\pm n}\ln^k x_+)_\rho$

$\ln^k x_+$, $x_+^{\pm n}\ln^k x_+$ 作为广义函数,定义如下:对任意 $\mathscr{D}$ 试验函数 $\varphi(x)$,有

$$\langle\ln^k x_+,\varphi\rangle=\int_0^\infty\ln^k x\varphi(x)dx,$$

$$\langle x_+^n\ln^k x_+,\varphi\rangle=\int_0^\infty x^n\ln^k x\varphi(x)dx,$$

$$\langle x_+^{-n}\ln^k x_+,\varphi\rangle=\int_0^1 x^{-n}\ln^k x\left[\varphi(x)-\varphi(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\right]dx+\int_1^\infty x^{-n}\ln^k x\left[\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\cdots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)\right]dx.$$

1981年5月4日收到,1984年1月7日收到修改稿.

它们的解析表示（见 [13]），分别是

$$\widehat{\ln^k x_+}(z) = -\frac{\ln^{k+1} z}{2\pi i(k+1)} + \frac{\ln^k z}{2} - i\sum_{\nu=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \frac{k!(2\pi)^{2\nu+1}B_{\nu+1}\ln^{k-1-2\nu} z}{(2\nu+2)!(k-1-2\nu)!}, \quad (1.1)$$

$$\widehat{x_+^{\pm n}\ln^k x_+}(z) = z^{\pm n}\widehat{\ln^k x_+}(z),$$

其中，$\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$，$0 < \mathrm{Arg}\, z < 2\pi$。$B_\nu$ 是第一类贝努里数，$B_1 = \frac{1}{6}$，$B_2 = \frac{1}{30}$，$B_3 = \frac{1}{42}$，$\cdots$。

为了能按 [1] 的方法，计算其与其它广义函数的乘积，必须求出

$$(\ln^k x_+)_\rho = \widehat{\ln^k x_+}(x + i\rho) - \widehat{\ln^k x_+}(x - i\rho)$$

及 $(x_+^{\pm n}\ln^k x_+)_\rho = (x + i\rho)^{\pm n}\widehat{\ln^k x_+}(x + i\rho) - (x - i\rho)^{\pm n}\widehat{\ln^k x_+}(x - i\rho)$，其中 ρ 为某个正的非标准无穷小数。

按 (1.1) 直接求 $(\ln^k x_+)_\rho$，$(x_+^{\pm n}\ln^k x_+)_\rho$ 不是件容易的事情．下面我们用展开的方法求之。

命题 1. 对任意非负整数 $n \geqslant 0$，$k \geqslant 0$，有

$$(\ln^k x_+)_\rho = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]-1} \frac{k!\ln^{k-2-2j}(x^2+\rho^2)}{2^{k-2-2j}(k-2-2j)!} \times \left[\frac{(\pi-\theta)(-1)^{j+1}\theta^{2j+2}}{\pi(2j+3)!} + D_j\right] + \frac{\pi-\theta}{2^k\pi}\ln^k(x^2+\rho^2),$$

其中

$$D_j = \sum_{p=0}^{j} \frac{2^{2(p+1)}B_{p+1}(\pi^{2p+1} - \theta^{2p+1})(-1)^{j+p}\theta^{2j-2p+1}}{(2p+2)!(2j-2p+1)!},$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\rho}{x}.$$

又

$$(x_+^{\pm n}\ln^k x_+)_\rho = (x^2+\rho^2)^{\pm\frac{n}{2}}[\cos n\theta(\ln^k x_+)_\rho \pm \sin n\theta I],$$

其中

$$I = \frac{\ln^{k+1}(x^2+\rho^2)}{\pi(k+1)2^{k+1}} + k\left(\theta - \frac{\theta^2}{2\pi} - \frac{\pi}{3}\right)2^{1-k}\ln^{k-1}(x^2+\rho^2) + \sum_{j=0}^{[\frac{k-3}{2}]} \frac{\ln^{k-3-2j}(x^2+\rho^2)k!}{2^{k-3-2j}(k-3-2j)!}(E_{j+1} + F_j),$$

$$E_j = (-1)^{j+1}\theta^{2j+1}\left(\frac{\theta}{\pi(2j+3)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right) - \sum_{p=0}^{j} \frac{(-1)^{j+p}\theta^{2j-2p}(\theta^{2p+2} + \pi^{2p+2})}{\pi(2j-2p+1)!}a_p,$$

$$a_p = \frac{2^{2p+2}B_{p+1}}{(2p+2)!},$$

$$F_j = \sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{p} a_s a_{p-s}\theta^{2j-2s+2}(-1)^{j+p}\pi^{2s+1}/(2j-2p+1)!.$$

证. 当复数 $\lambda \neq$ 整数时，广义函数 x_+^λ 在 $\lambda=0$, $\lambda=n$, $\lambda=-n$ 的邻域的展开为

$$x_+^\lambda = H + \lambda\ln x_+ + \frac{\lambda^2}{2}\ln^2 x_+ + \cdots,$$

$$x_+^\lambda = x_+^n + (\lambda-n)x_+^n\ln x_+ + \frac{(\lambda-n)^2}{2}x_+^n\ln^2 x_+ + \cdots, \tag{1.2}$$

$$x_+^\lambda = \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(\lambda+n)} + x_+^{-n} + (\lambda+n)x_+^{-n}\ln x_+ + \frac{(\lambda+n)^2}{2}x_+^{-n}\ln x_+ + \cdots,$$

其中H表示 Heaviside 函数。

另一方面，由 [4] 知，$(x_+^\lambda)_\rho = (x^2+\rho^2)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\sin\lambda(\pi-\theta)}{\sin\lambda\pi}$. 利用公式

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}B_k}{(2k)!}z^{2k-1},$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},$$

将 $\frac{\sin\lambda(\pi-\theta)}{\sin\lambda\pi}$ 展为 $(\lambda\pm n)$ 的级数，得到

$$\frac{\sin\lambda(\pi-\theta)}{\sin\lambda\pi} = \left\{\frac{\pi-\theta}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(D_{k-1} + \frac{(-1)^k\theta^{2k}(\pi-\theta)}{\pi(2k+1)!}\right)(\lambda\pm n)^{2k}\right\}\cos n\theta$$

$$\pm\ \sin n\theta\left\{\frac{1}{(\lambda\pm n)\pi} + \theta - \frac{\theta^2}{2\pi} - \frac{\pi}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}(E_k + F_{k-1})(\lambda\pm n)^{2k+1}\right\},$$

其中

$$D_k = \sum_{p=0}^{k} a_p(-1)^{k+p}\theta^{2k-2p+1}(\pi^{2p+1}-\theta^{2p+1})/(2k-2p+1)!,$$

$$E_k = (-1)^{k+1}\theta^{2k+1}\left(\frac{\theta}{\pi(2k+3)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right) - \sum_{p=0}^{k}\frac{(-1)^{k+p}\theta^{2k-2p}(\theta^{2p+2}+\pi^{2p+2})}{\pi(2k-2p+1)!}a_p,$$

$$F_k = \sum_{p=0}^{k}\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^{k+p}\theta^{2k-2s+2}\pi^{2s+1}}{(2k-2p+1)!}a_s a_{p-s},$$

$$a_p = \frac{2^{2p+2}B_{p+1}}{(2p+2)!}.$$

同时，$(x^2+\rho^2)^{\frac{\lambda}{2}}$在 $\lambda=\mp n$ 的邻域可展为 $(\lambda\pm n)$ 的级数

$$(x^2+\rho^2)^{\frac{\lambda}{2}} = (x^2+\rho^2)^{\pm\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}h_k(\lambda\pm n)^k,\quad h_k = \frac{\ln^k(x^2+\rho^2)}{2^k k!}.$$

于是 $(x_+^\lambda)_\rho$ 在 $\lambda=\mp n$ 的邻域可以展为

$$(x_+^\lambda)_\rho=(x^2+\rho^2)^{\pm\frac{n}{2}}\cos n\theta\sum_{k=0}^{\infty}M_k(\lambda\pm n)^k\pm(x^2+\rho^2)^{\pm\frac{n}{2}}\sin n\theta$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}h_{k+1}(\lambda\pm n)^k+\sum_{k=0}^{\infty}W_k(\lambda\pm n)^{k+1}\right],\tag{1.3}$$

其中,

$$M_k=\frac{\pi-\theta}{\pi}h_k+\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}h_{k-2j}\left(\frac{(-1)^j\theta^{2j}}{(2j+1)!}+D_{j-1}\right),$$

$$W_k=\left(\theta-\frac{\theta^2}{2\pi}-\frac{\pi}{3}\right)h_k+\sum_{j=1}^{[\frac{k}{2}]}h_{k-2j}(E_j+F_{j-1}).$$

比较 (1.2) 和 (1.3) 的系数,我们有

$$(\ln x_+)_\rho=\frac{\pi-\theta}{2\pi}\ln(x^2+\rho^2),$$

$$(x_+^{\pm n}\ln x_+)_\rho=(x^2+\rho^2)^{\pm\frac{n}{2}}\left\{\frac{\pi-\theta}{2\pi}\ln(x^2+\rho^2)\cos n\theta\right.$$

$$\left.\pm\ \sin n\theta\left[\frac{1}{8\pi}\ln^2(x^2+\rho^2)+\theta-\frac{\theta^2}{2\pi}-\frac{\pi}{3}\right]\right\},$$

$$(\ln^2x_+)_\rho=\frac{\pi-\theta}{4\pi}\ln^2(x^2+\rho^2)+\frac{2}{3}\theta(\pi-\theta)\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right),$$

$$(\ln^3x_+)_\rho=\frac{\pi-\theta}{8\pi}\ln^3(x^2+\rho^2)-\theta(\pi-\theta)\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\ln(x^2+\rho^2),$$

$$\cdots\cdots$$

及 $(\ln^kx_+)_\rho$, $(x_+^{\pm n}\ln^kx_+)_\rho$ 如命题所述的表达式,证毕.

§2. 乘积及其有限部分

令

$$T_{r,q,m,n}(j,\pm)=\int_0^\pi\ln^r\sin\xi\cos^q\xi\sin(m+1)\xi\cos n\xi\ \ \xi^j\sin^{m\pm n-q-1}\xi d\xi,$$

$$S_{r,q,m,n}(j,\pm)=\int_0^\pi\ln^r\sin\xi\cos^q\xi\sin(m+1)\xi\sin n\xi\ \ \xi^j\sin^{m\pm n-q-1}\xi d\xi.$$

按照 [1] 定义的乘法,我们有下面定理:

定理. 对任意非负整数 m, n, 有

$$\delta^{(m)}(x)\circ x_+^n\ln^kx_+=\begin{cases}0, & \text{当 } m<n,\\ \dfrac{k!m!}{\pi}\displaystyle\sum_{q=0}^{m-n}\frac{(-1)^{q+m}}{q!}\rho^{q-m+n}a(k,q,m,n)\delta^{(q)}(x), & \text{当 } m\geqslant n,\end{cases}$$

$$\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{-n}\ln^kx_+=\frac{k!m!}{\pi}\sum_{q=0}^{m+n}\frac{(-1)^{q+m}}{q!}\rho^{q-m-n}a(k,q,m,-n)\delta^{(q)}(x),$$

其中,

$$a(k, q, m, \pm n) = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]}\sum_{r=0}^{k-2j}\frac{(-1)^{r+j}\ln^{k-2j-r}\rho}{\pi r!\,(k-2j-r)!\,(2j+1)!}[\pi T_{r,q,m,n}(2j, \mp)$$

$$-T_{r,q,m,n}(2j+1, \mp)] + \sum_{j=0}^{[\frac{k-2}{2}]}\sum_{p=0}^{j}\sum_{r=0}^{k-2-2j}$$

$$\times\frac{(-1)^{r+j+p}a_p\ln^{k-2-2j-r}\rho}{r!\,(k-2-2j-r)!\,(2j-2p+1)!}[\pi^{2p+1}T_{r,q,m,n}(2j-2p+1, \mp)$$

$$-T_{r,q,m,n}(2j+2, \mp)] \pm \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{k+1}\frac{(-1)^r}{r!(k+1-r)!}[\ln^{k+1-r}\rho S_{r,q,m,n}(0, \mp)$$

$$\pm\sum_{j=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\sum_{r=0}^{k-1-2j}\frac{(-1)^{r+j}\ln^{k-1-2j-r}\rho}{r!\,(k-1-2j-r)!}\Big\{\Big[\frac{1}{\pi(2j+3)!}$$

$$+\sum_{p=0}^{j}\frac{(-1)^p a_p}{(2j-2p+1)!}\Big]S_{r,q,m,n}(2j+2, \mp) - \frac{1}{(2j+1)!}S_{r,q,m,n}(2j+1, \mp)$$

$$-\sum_{p=0}^{j}\frac{(-1)^p a_p}{(2j-2p+1)!}S_{r,q,m,n}(2j-2p, \mp)\Big\}$$

$$\pm\sum_{j=0}^{[\frac{k-3}{2}]}\sum_{r=0}^{k-3-2j}\sum_{p=0}^{j}\sum_{s=0}^{p}\frac{(-1)^{r+j+p}\ln^{k-3-2j-r}\rho}{r!\,(k-3-2j-r)!\,(2j-2p+1)!}$$

$$\times a_s a_{p-s}\pi^{2s+1}S_{r,q,m,n}(2j-2p+1, \mp).$$

乘积的有限部分为

$$Pf[\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{n}\ln^k x_+] = \begin{cases}0, & \text{当 } m < n,\\ \dfrac{(-1)^n k!\,m!}{(m-n)!\,\pi}Pf[a(k, m-n, m, n)]\delta^{(m-n)}(x), & \text{当 } m \geqslant n,\end{cases}$$

$$Pf[\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{-n}\ln^k x_+] = \frac{(-1)^n k!\,m!}{(m+n)!\,\pi}Pf[a(k, m+n, m, -n)]\delta^{(m+n)}(x).$$

作为例子，我们得到

例 1. $Pf(\delta(x)\circ x_+^{-1}\ln x_+) = -\left(\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{3}\right)\delta'(x).$

例 2. $Pf(\delta(x)\circ\ln^2 x_+) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{8}\right)\delta(x),$

$$\delta(x)\circ\ln^2 x_+ = \left(\frac{1}{2}\ln^2\rho + 2\ln\rho\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2 + \frac{\pi^2}{8}\right)\delta(x).$$

例 3. $Pf(\delta'(x)\circ x_+\ln x_+) = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)\delta(x).$

例 4. $Pf(\delta''(x)\circ x_+\ln x_+) = -\left(\ln 2 + 1\frac{1}{4}\right)\delta'(x).$

例 5. $Pf(\delta'''(x)\circ x_+\ln x_+) = \left(\frac{3}{2}\ln 2 + \frac{35}{16}\right)\delta''(x).$

例 6. $Pf(\delta^{(m)}(x)\circ x_+\ln x_+) = (-1)^{m+1}\Big[\frac{m}{2}\ln 2 + \frac{m^2}{8} + \frac{3}{8}m + \sum_{j=3}^{m}\binom{m}{j}$

$$\times \frac{(-1)^j}{2^j(j-1)}\Big]\delta^{(m-1)}(x).$$

例 7. $$\frac{Pf[\delta^{(m+n)}(x)\circ x_+^m \ln x_+]}{(m+n)!} = (-1)^n\left[\frac{1}{n!2}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\frac{m!(-1)^{j+1}}{(m+j)!(n-j)!j2^j}\right]\delta^{(n)}(x).$$

参 考 文 献

[1] 李邦河,中国科学,1(1978),1—10.
[2] 李邦河,李雅卿,吉林大学学报,1(1981),13—30.
[3] 李邦河,中国科学,2(1978),139—149.
[4] 李雅卿,中国科学数学专辑 (I),1979,103—123.
[5] ——,科学通报,4(1980),149—155.
[6] ——,科学通报数理化专辑,1980,16—20.
[7] ——, *Kexue Tongbao*, 6(1980) 454—461.
[8] Иванов, В. К., *Изв. Выс. Учеб. Завед. Мате.*, **106**:3 (1971), 41—49.
[9] ——, *ДАН СССР*, **237** (1977), 779—781.
[10] Иванов, В. К. & В.И. Шарин, *Изв Выс, Учед. Завед. Мате.*, **209**:10 (1979), 38—46.
[11] Itano, M. *J. Sci Hiroshima Univ.*, Ser. A-1, 29 (1965), 51—74, 225—241.
[12] Itano M., & S. Hatano, Mem. Fac. Gen. Ed. Hiroshima Univ. III, **8**(1974), 159—174
[13] 李邦河,数学年刊,**2**: 4(1981),399—405.

THE PRODUCTS $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^n \ln^k x_+$ AND $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{-n} \ln^k x_+$

Li Yaching

ABSTRACT

Let S and T be two distributions and $S(z)$ and $T(z)$, $z\in C-R$, be their analytic representations. Then, the product $S\circ T$ is defined by

$$\langle S\circ T,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}(\hat{S}(x+i\rho)-\hat{S}(x-i\rho))(\hat{T}(x+i\rho)-\hat{T}(x-i\rho))\phi(x)\,dx$$

modulo infinitesimals, where $\rho\in {}^*R$ is a positive infinitesinal. This product is independent of the choice of analytic representations, and contains finite and infinite parts. In this paper, the products $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^n \ln^k x_+$ and $\delta^{(m)}(x)\circ x_+^{-n}\ln^k x_+$ are calculated for any nonnegative integers m, n, k. For the finite part, the special results are:

$$\frac{Pf(\delta^{(m+n)}(x)\circ x_+^m \ln x_+)}{(m+n)!} = \left[\frac{1}{n!2}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{n}\frac{m!(-1)^{j+1}}{(m+j)!(n-j)!j2^j}\right](-1)^n\delta^{(n)}(x),$$

$$Pf(\delta(x)\circ\ln^2 x_+) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 2+\frac{1}{8}\pi^2\right)\delta(x),$$

$$Pf(\delta(x)\circ x_+^{-1}\ln x_+) = \left(-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{3}\right)\delta'(x).$$