系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(6) (2009, 6), 849–853

一个新的弱 Pareto-Nash 均衡点存在性结果*

林 志

(重庆交通大学理学院， 重庆 400074)

摘要 研究了多目标广义对策问题，通过 Brouwer-Schauder-Tychonoff 不动点定理，建立了弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性结果，最后，通过一个例子，说明结果是新的、不能被已有的存在性结果所包含.

关键词 多目标广义对策，弱 Pareto-Nash 均衡点， C- 凸， C- 似拟凸.

MR(2000) 主题分类号 47H04, 47H10, 90B50, 91A10

1 介 绍

本文对多目标广义对策问题进行了研究，通过 Brouwer-Schauder-Tychonoff 不动点定理，建立了弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性结果，最后，通过一个例子，说明了本文的存在性结果是新的，不能被已有的类似结果所包含；关于其它弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性结果，参见 [1–5] 及相关文献.

若 Y 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间， C 是 Y 中的一个锥. 锥 C 是凸的，当且仅当 $C+C=C$; 锥 C 是尖的，当且仅当 $C\cap(-C)=\{\theta\}$, 其中 θ 表示 Y 中的零元.

在本文中，除非特别申明，设指标集 I 是一个有限集，对任何 $i\in I$, 设 X_i 和 Y_i 是两个 Hausdorff 拓扑向量空间， K_i 是 X_i 中的一个非空凸紧子集， θ_i 表示 Y_i 中的零元， C_i 是 Y_i 中的一个闭凸尖锥，且 $\mathrm{int}C_i\neq\emptyset$, 其中 $\mathrm{int}C_i$ 表示 C_i 的内部. 记 $K=\prod\limits_{i\in I}K_i$, $K_{\hat{i}}=\prod\limits_{j\in I,j\neq i}K_j$. 对任何 $x\in K$, 可写 $x=(x_i,x_{\hat{i}})$. 用 2^K 表示 K 的非空子集全体.

对任何 $i\in I$, 设 $f_i:K\to Y_i$ 是一个向量值函数， $G_i:K_{\hat{i}}\to 2^{K_i}$ 是约束对应. 多目标广义对策问题是：寻找 $x^*\in K$ 满足，对任何 $i\in I, x_i^*\in G_i(x_{\hat{i}}^*)$, 并且

$$f_i(y_i,x_{\hat{i}}^*)-f_i(x_i^*,x_{\hat{i}}^*)\notin \mathrm{int}C_i,\quad 对所有\ y_i\in G_i(x_{\hat{i}}^*).$$

$x^*\in K$ 被称为多目标广义对策的一个弱 Pareto-Nash 均衡点. 一个多目标广义对策问题通常被表示为 $\{K_i,G_i,f_i\}_{i\in I}$.

---

* 重庆市自然科学基金资助课题.
收稿日期：2007-01-04, 收到修改稿日期：2008-07-17.

对任何 $i \in I$, 若令 $G_i(x_{\widehat{i}}) = K_i$, $\forall x_{\widehat{i}} \in K_{\widehat{i}}$, 那么，多目标广义对策问题简化为多目标对策问题，一个多目标对策问题通常被表示为 $\{K_i, f_i\}_{i\in I}$.

2 预备知识

下面先介绍基本概念和结论.

定义 2.1 设 X 和 Y 是两个拓扑向量空间， K 是 X 中的一个非空凸子集， C 是 Y 中的一个闭凸尖锥，且 $\mathrm{int}C \neq \emptyset$, 其中 $\mathrm{int}C$ 表示 C 的内部. $f: K \mapsto Y$ 是一个向量值函数.

1) f 被称为是 C- 凸的，只要对任何 $x_1, x_2 \in K$ 和任何 $t \in [0,1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \in \{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\} - C;$$

f 被称为是 C- 凹的，只要 $-f$ 是 C- 凸的，此时有，

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \in \{tf(x_1) + (1-t)f(x_2)\} + C.$$

2) f 被称为是 C- 似拟凸的，只要对任何 $x_1, x_2 \in K$ 和任何 $t \in [0,1]$,

$$\text{或者}\ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \in f(x_1) - C,\ \text{或者}\ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \in f(x_2) - C;$$

f 被称为是 C- 似拟凹的，只要 $-f$ 是 C- 似拟凸的，此时有，

$$\text{或者}\ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \in f(x_1) + C,\ \text{或者}\ \ f(tx_1 + (1-t)x_2) \in f(x_2) + C.$$

下面的结果，见文献 [4] 中引理 1.1.

引理 2.1 若 Y 是一个 Hausdorff 拓扑向量空间，C 是 Y 中的一个闭凸尖锥，$\mathrm{int}C \neq \emptyset$, 其中 $\mathrm{int}C$ 表示 C 的内部，那么，有 $\mathrm{int}C + C \subset \mathrm{int}C$.

注意, 在文献 [4] 中, 上述结果是在 Banach 空间建立的, 事实上, 它的证明过程在 Hausdorff 拓扑向量空间同样成立.

下面的结果见 [5] 中引理 2.1.

引理 2.2 若 X 是一个紧拓扑空间，Y 是一个凸空间，$G, T : X \mapsto 2^Y$ 是两个集值映射满足：对任何 $x \in X, G(x) \neq \emptyset$, $\mathrm{co}G(x) \subset T(x)$, 且 $X = \bigcup\limits_{y\in Y} \mathrm{int}G^{-1}(y)$, 其中 $\mathrm{co}G(x)$ 表示 $G(x)$ 的凸包. 那么 T 存在一个连续的选择 $f: X \mapsto Y$, 即是说，存在一个连续的选择 $f: X \mapsto Y$ 使 $f(x) \in T(x)$，对任何 $x \in X$.

下面的结果是著明的 Brouwer-Schauder-Tychonoff 不动点定理，见文献 [6].

引理 2.3 若 K 是局部凸 Hausdorff 向量空间中的一个非空凸紧子集， $f: K \mapsto K$ 是一个连续函数. 那么， f 的不动点集是非空紧的.

3 弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性

对任何 $i \in I, x \in K$, 记 $S_i(x) = \{y_i \in G_i(x_{\widehat{i}}) : f_i(y_i, x_{\widehat{i}}) - f_i(x_i, x_{\widehat{i}}) \in \mathrm{int}C_i\}$, $W_i = \{x \in K : S_i(x) \neq \emptyset\}$. 由引理 2.1 容易验证：对任何 $x_{\widehat{i}} \in K_{\widehat{i}}$, 如果 $f_i(\cdot, x_{\widehat{i}})$ 是 C_i- 凹的或是 C_i- 似拟凹的，那么 $S_i(x)$ 是凸的.

定理 3.1 考虑多目标广义对策 $\{K_i, G_i, f_i\}_{i\in I}$. 对任何 $i \in I$, 若

1) 对任何 $x_{\widehat{i}}\in K_{\widehat{i}}, G_i(x_{\widehat{i}})$ 是凸的；

2) 对任何 $x_{\widehat{i}}\in K_{\widehat{i}}$, $f_i(\cdot,x_{\widehat{i}})$ 是 C_i- 凹的或是 C_i- 似拟凹的；

3) 如果 $x\in\overline{W}_i$, 那么存在 x 在 K 中开邻域 $U_i(x)$ 使：$\bigcap\limits_{x'\in U_i(x)\cap W_i}S_i(x')\neq\emptyset$, 其中 $\overline{W}_i$ 表示 W_i 的闭包. 那么，存在 $x^*\in K$ 满足：对任何 $i\in I$,

$$x_i^*\in G_i(x_{\widehat{i}}^*),\ \text{并且}\ f_i(y_i,x_{\widehat{i}}^*)-f_i(x_i^*,x_{\widehat{i}}^*)\notin\mathrm{int}C_i,\text{对任何}\ y_i\in G_i(x_{\widehat{i}}^*).$$

证　定义集值映射 $H:K\mapsto 2^K$ 为 $H(x)=\prod\limits_{i\in I}H_i(x)$, 其中 $H_i:K\mapsto 2^{K_i}$ 定义为

$$H_i(x)=\begin{cases}S_i(x) & \text{如果 } x\in W_i,\\ K_i & \text{如果 } x\in K\backslash W_i.\end{cases}$$

(1)　对任何 $i\in I,x\in K$, 由引理 2.1 容易验证：$H_i(x)$ 是凸的；显然，$H_i(x)$ 是非空的.

(2)　对任何 $x\in K$, 记 $J=\{i\in I:x\in\overline{W}_i\}$.

如果 $J=\emptyset$, 那么对任何 $i\in I$, 存在 x 在 K 中的开邻域 $U_i(x)$, 当 $x'\in U_i(x)$ 时，$H_i(x')=K_i$. 令 $U(x)=\bigcap\limits_{i\in I}U_i(x)$, 那么 $U(x)$ 是 x 在 K 中的一个开邻域，当 $x'\in U(x)$ 时，有 $H(x')=\prod\limits_{i\in I}H_i(x')=K$. 因此，对任何 $z^0\in K$, 当 $x'\in U(x)$ 时，$z^0\in H(x')$, 这推出 $U(x)\subset H^{-1}(z^0)$, 即 $x\in\mathrm{int}H^{-1}(z^0)\subset\bigcup\limits_{z\in K}\mathrm{int}H^{-1}(z)$.

如果 $J\neq\emptyset$, 那么，对任何 $i\in I\backslash J$, 存在 x 在 K 中的开邻域 $U_i^1(x)$, 当 $x'\in U_i^1(x)$ 时，$H_i(x')=K_i$, 对任何 $i\in J$, 由条件 3), 存在 x 在 K 中的开邻域 $U_i^2(x)$, 使 $\bigcap\limits_{x'\in U_i^2(x)\cap W_i}S_i(x')\neq\emptyset$, 这推出 $\bigcap\limits_{x'\in U_i^2(x)}H_i(x')\neq\emptyset$ (因为当 $x'\notin W_i$ 时，$H_i(x')=K_i$). 取 $z^0=(z_i^0)_{i\in I}\in K$ 满足：对任何 $i\in J$, $z_i^0\in\bigcap\limits_{x'\in U_i^2(x)}H_i(x')$. 记 $U(x)=(\bigcap\limits_{i\in I\backslash J}U_i^1(x))\cap(\bigcap\limits_{i\in J}U_i^2(x))$. 显然，$U(x)$ 也是 x 在 K 中的一个开邻域，当 $x'\in U(x)$ 时，$z^0\in H(x')=\prod\limits_{i\in I}H_i(x')$, 这推出 $U(x)\subset H^{-1}(z^0)$, 即 $x\in\mathrm{int}H^{-1}(z^0)\subset\bigcup\limits_{z\in K}\mathrm{int}H^{-1}(z)$.

所以，$K=\bigcup\limits_{z\in K}\mathrm{int}H^{-1}(z)$.

由引理 2.2, H 有连续的选择 $g:K\mapsto K$, 其中 $g=(g_i)_{i\in I}$, 即：对任何 $i\in I$, 当 $x\in W_i$ 时，$g_i(x)\in S_i(x)$, 当 $x\in K\backslash W_i$ 时，$g_i(x)\in K_i$. 由 Brouwer-Schauder-Tychonoff 不动点定理 (引理 2.3), g 至少存在一个不动点，即存在 $x^*\in K$ 满足：对任何 $i\in I,x_i^*=g_i(x^*)$. 注意到 $x_i\notin S_i(x)$, 因此对任何 $i\in I$, $x^*\in K\backslash W_i$, 即有：对任何 $i\in I$, $S_i(x^*)=\emptyset$, 由此定理得证.

利用定理 3.1, 容易导出多目标对策弱 Pareto-Nash 均衡点存在性结果.

对任何 $i\in I,x\in K$, 记 $S_i(x)=\{y_i\in K_i:f_i(y_i,x_{\widehat{i}})-f_i(x_i,x_{\widehat{i}})\in\mathrm{int}C_i\}$, $W_i=\{x\in K:S_i(x)\neq\emptyset\}$.

结论　3.1　考虑多目标对策 $\{K_i,f_i\}_{i\in I}$. 对任何 $i\in I$, 若

1) 对任何 $x_{\widehat{i}}\in K_{\widehat{i}}$, $f_i(\cdot,x_{\widehat{i}})$ 是 C_i- 凹的或是 C_i- 似拟凹的；

2) 如果 $x\in\overline{W}_i$, 那么存在 x 在 K 中的开邻域 $U_i(x)$ 使 $\bigcap\limits_{x'\in U_i(x)\cap W_i}S_i(x')\neq\emptyset$, 其中 $\overline{W}_i$ 表示 W_i 的闭包.

那么，存在 $x^* \in K$ 满足：对任何 $i \in I$,

$$f_i(y_i, x^*_{\hat{i}}) - f_i(x^*_i, x^*_{\hat{i}}) \notin \mathrm{int}C_i, \quad \text{对任何 } y_i \in K_i.$$

注 1 定理 3.1 和结论 3.1 均是新的弱 Pareto-Nash 均衡点存在性结果.

用 R 表示实空间. 下面的例子说明定理 3.1 确实是一个新的弱 Pareto-Nash 均衡点存在性结果.

例 3.1 考虑多目标广义对策 $\{K_i, G_i, f_i\}_{i\in I}$, 其中 $I=\{1,2\}, X_1=X_2=R, Y_1=Y_2=R^2, K_1=K_2=[0,1]$, $C_1=C_2=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. 记 $K=K_1\times K_2=[0,1]^2$. 对任何 $i\in I$, $G_i: K_{\hat{i}} \mapsto 2^{K_i}$ 被定义为

$$G_1(x_2)=\begin{cases}\Big[0,\dfrac{1+x_2^2}{2}\Big], & x_2>\dfrac{1}{2},\\[2mm] \Big[\dfrac{1}{2},1-\dfrac{x_2^2}{3}\Big), & \text{否则};\end{cases}\qquad G_2(x_1)=\begin{cases}\Big[\dfrac{1+x_1}{5},1\Big], & x_1>\dfrac{1}{3},\\[2mm] \Big[1-\dfrac{1+x_1}{4},1\Big), & \text{否则}.\end{cases}$$

对任何 $i\in I$, $f_i: K\mapsto Y_i$ 被定义为

$$f_1(x)=(f_1^1(x),f_1^2(x))=\begin{cases}\Big(-4x_1x_2+\Big(x_2-\dfrac{1}{2}\Big)^2,-3x_1x_2-7\Big(x_2-\dfrac{1}{2}\Big)^2\Big), & x_2>\dfrac{1}{2},\\[2mm] (0,-1), & \text{否则};\end{cases}$$

$$f_2(x)=(f_2^1(x),f_2^2(x))=\begin{cases}\Big(x_1x_2-\Big(x_1-\dfrac{1}{5}\Big)^2,5x_1x_2+2\Big(x_1-\dfrac{1}{5}\Big)^2\Big), & x_1>\dfrac{1}{3},\\[2mm] (1,2), & \text{否则}.\end{cases}$$

容易验证

(1) 对任何 $x_2\in K_2, G_1(x_2)$ 是非空凸的，对任何 $x_1\in K_1, G_2(x_1)$ 是非空凸的;

(2) 对任何 $x_2\in K_2$, $f_1(x_2,\cdot)$ 是 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)-$ 凹的；对任何 $x_1\in K_1$, $f_2(x_1,\cdot)$ 是 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)-$ 凹的.

(3) 对任何 $x\in K, S_1(x)=\{y_1\in G_1(x_2): f_1(y_1,x_2)-f_1(x_1,x_2)\in(0,+\infty)^2\}=\{y_1\in G_1(x_2): x_2>\frac{1}{2}, \text{且} y_1<x_1\}, W_1=\{x\in K: S_1(x)\neq\emptyset\}, S_2(x)=\{y_2\in G_2(x_1): f_2(y_2,x_1)-f_2(x_2,x_1)\in(0,+\infty)^2\}=\{y_2\in G_2(x_1): x_1>\frac{1}{3}, \text{且} y_2>x_2\}, W_2=\{x\in K: S_2(x)\neq\emptyset\}$. 注意，对任何 $x\in W_1, y_1=0\in S_1(x)$; 对任何 $x\in W_2, y_2=1\in S_2(x)$; 因此，对任何 $x\in\overline{W}_1$ 以及 x 在 K 中的开邻域 $U_1(x)$, $y_1=0\in\bigcap\limits_{x'\in U_1(x)\cap W_1}S_1(x')$; 对任何 $x\in\overline{W}_2$ 以及 x 在 K 中的开邻域 $U_2(x)$, $y_2=1\in\bigcap\limits_{x'\in U_2(x)\cap W_2}S_2(x')$; 这说明定理 3.1 中的条件 3) 也成立.

所以，由定理 3.1, 该多目标广义对策存在弱 Pareto-Nash 均衡点.

注 2 注意到在例 3.1 中，集值映射 $G_i(i=1,2)$ 在 $K_{\hat{i}}$ 上既不是上半连续的也不是下半连续的 (也不具紧值), 同时，实函数 f_1^1(包括 f_1^2, f_2^1, f_2^2) 在 K 上既不是上半连续的也不是下半连续的，因此，定理 3.1(以及结论 3.1) 的确是新的弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性结果，它不能被文献 [1–5] 中对应的存在性结果所包含.

参 考 文 献

[1] Ansari Q H, Schaible S and Yao J C. The system of generalized vector equilibrium problems with applications. *Journal of Global Optimization*, 2002, **22**: 3–16.
[2] Lin Z. The study of the system of generalized vector quasi-equilibrium problems. *J. Glob. Optim.*, 2006, **36**: 627–635.
[3] Lin Z and Yu J. The existence of solutions for the system of generalized vector quasi-equilibrium problems. *Applied Mathematics Letters,* 2005, **18**: 415–422.
[4] Yang H and Yu J. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points. *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**: 553–560.
[5] Lin L J, Cheng S F, Liu X Y, Ansari Q H. On the constrained equilibrium problems with finite families of players. *Nonlinear Analysis,* 2003, **54**: 525–543.
[6] Aliprantis C D and Border K C. Infinite Dimensional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.

A NEW EXISTENCE RESULT OF WEAKLY PARETO-NASH EQUILIBRIUM POINTS

LIN Zhi

(*College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing* 400074)

Abstract The multiobjective generalized games are considered, and the existence result of weakly Pareto-Nash equilibrium points is established by Brouwer-Schauder-Tychonoff's fixed points theorem. Then an example shows that the obtained existence result is new.

Key words The multiobjective generalized game, Pareto-Nash equilibrium point, C-convex, C- quasiconvex-like.