系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(5) (2008, 5), 535–541

限制零的 m 进制数集之 Hausdorff 测度*

钟 婷 张菁菁 汤 亮

(吉首大学信息管理与工程学院， 湖南 427000)

摘要 对于任意整数 $m \geq 2$, 设 $F_m = \left\{x \in [0,1) : \{m^k x\} \geq \frac{1}{m^2}, k \in N\right\}$, 符号 $\{m^k x\}$ 表示 $m^k x$ 的分数部分. 给出了数集 F_m 的 Hausdorff 测度 $H^s(F_m) = (\frac{m^2-2}{m^2-1})^s$, 其中 $s = \log_m \frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2+4(m-1)}}{2}$ 是 F_m 的 Hausdorff 维数.

关键词 m 进制数，零不相邻序列，质量分布， Hausdorff 维数， Hausdorff 测度.

MR(2000) 主题分类号 28A80

1 引言与结果

对于任意整数 $m \geq 2$, 每个实数 $x \in (0,1)$ 都可以按 m 进制展开成如下形式

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{m^i}, \quad x_i \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}.$$

定义下列数集

$$F_m = \left\{x \in [0,1) : \{m^k x\} \geq \frac{1}{m^2}, k \in N\right\}.$$

Zulauf[1] 研究了 Fibonacci 型递归集 F_2, Dorbot[2] 获得了 F_2 的 Hausdorff 维数：$\dim_H F_2 = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 一般递归集均可通过其关联矩阵的特征值而在理论上确定其维数. 但测度的确定更加困难，至今只能针对很少量的特别集合给出特别的估计. 本文观察到 F_m 的 k 阶基本区间的个数和长度特征、长度与质量关系，发展了文 [3] 的技巧，利用文 [4] 中的一个结果，得到 F_m 的 Hausdorff 维数及测度的确切值，我们的主要结果是

定理 1 设 $F_m = \left\{x \in [0,1) : \{m^k x\} \geq \frac{1}{m^2}, k \in N\right\}$, 则 F_m 的 Hausdorff 维数及测度分别为

$$\dim_H F_m = \log_m \frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2+4(m-1)}}{2} =: s, \quad H^s(F_m) = \left(\frac{m^2-2}{m^2-1}\right)^s.$$

* 湖南省教育厅 (07C542) 资助项目.
收稿日期：2006-06-19.

2 F_m 的 k 阶基本区间的长度和个数

因为对于任意纯小数 $x=\frac{x_1}{m}+\frac{x_2}{m^2}+\cdots+\frac{x_k}{m^k}+\cdots$, 乘积 m^kx 的分数部分是 $\{m^kx\}=\frac{x_{k+1}}{m}+\frac{x_{k+2}}{m^2}+\cdots$. 所以 $\{m^kx\}\geq\frac{1}{m^2}$ 意味着前两项的 x_{k+1} 和 x_{k+2} 至少一个不为零. 由 $k\in N$ 的任意性知 x 展式中的数字序列 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 不能连续排列两个零. 故而与 F_m 对应的序列集应是下列零不相邻序列集

$$D_k=\big\{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k):\sigma_i\in\{0,1,\cdots,m-1\},\ i\in N,\ \sigma_i\neq 0\ \text{如果}\ \sigma_{i-1}=0\big\}. \tag{1}$$

对于任意 $k\in N$ 和 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k$, 定义 k 阶 m 进区间

$$I_\sigma=\mathrm{cl}\{x\in(0,1],\ x_1=\sigma_1,\ x_2=\sigma_2,\cdots,\ x_k=\sigma_k\}.$$

设

$$J_\sigma=I_\sigma\bigcap F_m,$$

则有 F_m 的一个分划如下

$$F_m=\bigcup_{\sigma\in D_k}J_\sigma, \tag{2}$$

我们称 J_σ 为集 F_m 的一个 k 阶基本元. 由 J_σ 的定义容易推出的下列结果

1) 对于任意 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k$, 令 $a(\sigma)$ 为 J_σ 的左端点, $b(\sigma)$ 为 J_σ 的右端点, 并记 $\sigma|_{k-1}=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{k-1})$. 则有

$$a(\sigma)=a(\sigma|_{k-1});\quad b(\sigma)=b(\sigma|_{k-1}).$$

2) F_m 的 k 阶基本元 $J_\sigma(\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k)$ 的长度分两类

i) $\sigma_k\neq 0$ 时, $$|J_\sigma|=\frac{1}{m^k}\Big(1-\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^4}-\frac{1}{m^6}-\cdots\Big)=\frac{1}{m^k}\Big(1-\frac{1}{m^2-1}\Big); \tag{3}$$

ii) $\sigma_k=0$ 时, $$|J_\sigma|=\frac{1}{m^k}\Big(1-\frac{1}{m}-\frac{1}{m^3}-\frac{1}{m^5}-\cdots\Big)=\frac{1}{m^k}\Big(1-\frac{m}{m^2-1}\Big). \tag{4}$$

3) 对于任意 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k$, $\sigma_k=0$ 意味着 $\sigma_{k-1}\neq 0$, 所以有

$$\bigcup_{\sigma\in D_k}J_\sigma=\bigcup_{\substack{\sigma\in D_k\\ \sigma_k\neq 0}}J_\sigma+\bigcup_{\substack{\sigma\in D_k\\ \sigma_{k-1}\neq 0\\ \sigma_k=0}}J_\sigma. \tag{5}$$

以下记 q_k 为 F_m 的 k 阶基本元个数 $(q_k=\#D_k)$, 则 (5) 式给出

$$q_0=1,\quad q_1=m,\quad q_k=(m-1)q_{k-1}+(m-1)q_{k-2},\quad k\geq 2. \tag{6}$$

更确切地: F_m 的所有 k 阶基本元 $J_\sigma(\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k)$ 中, 对应 $\sigma_k\neq 0$ 的有 $(m-1)q_{k-1}$ 个, 而对应 $\sigma_k=0$ 的有 $(m-1)q_{k-2}$ 个.

从 (6) 式立刻推出

若令

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=:r_k, \tag{7}$$

则有

$$r_1 = m, \quad r_k = m - 1 + \frac{m-1}{r_{k-1}}\,(k \geq 2), \tag{8}$$

取极限 $r = \lim\limits_{k\to+\infty} r_k$ 得

$$(m-1) + \frac{m-1}{r} = r \ \text{ 或 }\ r^2 = (m-1)(r+1), \tag{9}$$

进而有

$$r = \frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2+4(m-1)}}{2}.$$

下面的极限关系在估计 Hausdorff 测度上界时起重要作用.

命题　2　上面给出的 q_k 和 r 满足

$$\lim_{k\to\infty} q_k \cdot \frac{1}{r^k} = \frac{(r+1)^2}{r(r+2)}.$$

证　由 (7)–(9), 我们得到一个递推关系

$$\begin{aligned} q_k\Big(r_{k+1} + \frac{m-1}{r}\Big)\frac{1}{r^k} &= (r_1 r_2 \cdots r_k)\Big(m - 1 + \frac{m-1}{r_k} + \frac{m-1}{r}\Big)\frac{1}{r^k} \\ &= (r_1 r_2 \cdots r_k)\Big(\frac{m-1}{r_k} + r\Big)\frac{1}{r^k} \\ &= q_{k-1}\Big(r_k + \frac{m-1}{r}\Big)\frac{1}{r^{k-1}}, \end{aligned}$$

应用这个关系 k 次得到

$$q_k\Big(r_{k+1} + \frac{m-1}{r}\Big)\frac{1}{r^k} = q_0\Big(r_1 + \frac{m-1}{r}\Big)\frac{1}{r^0} = m + \frac{m-1}{r} = r+1,$$

两边除以 $r_{k+1} + \frac{\beta-1}{r}$, 并再次应用 (6) 即得

$$\lim_{k\to\infty} q_k \cdot \frac{1}{r^k} = \frac{(r+1)}{r + \frac{m-1}{r}} = \frac{(r+1)^2}{r(r+2)}.$$

3　F_m 的 k 阶基本区间的长度与质量

在 F_m 上定义质量分布

$$\mu(J(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)) = \begin{cases} \dfrac{1}{r^k}, & \text{如果 } \sigma_k \neq 0, \\ \dfrac{1}{r^{k-1}(r+1)}, & \text{如果 } \sigma_k = 0. \end{cases} \tag{10}$$

由此给出下面的引理.

引理 3 设 $s=\frac{\log r}{\log m}$, 对于任意 $\sigma,\tau\in D_n$, 若 $a(\sigma)<b(\tau)$, 则有

$$\mu\big([a(\sigma),b(\tau)]\big)\le\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s\big(b(\tau)-a(\sigma)\big)^s. \tag{11}$$

证 (用数学归纳法) 对于 $n=1$, 不妨设 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 中含有 $i(1\le i\le m)$ 个 1 阶基本元, 需分别考虑两种情况

1) 当 $a(\sigma)\ne a(\sigma|_0)$(即不包括最左端的 1 阶基本元) 时, 由 (10) 和 (3) 式分别得

$$\mu([a(\sigma),b(\tau)])=\frac{i}{r},$$

$$\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s\big(b(\tau)-a(\sigma)\big)^s=\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s\cdot\frac{1}{r}\Big(i-\frac{1}{m^2-1}\Big)^s.$$

可见 (11) 式成立只要

$$i\le\Big(i-\frac{1}{m_2-1}\Big)^s\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s.$$

因为函数 $f(x)=x-(x-\frac{1}{m_2-1})^s(\frac{m^2-1}{m^2-2})^s$ 的二阶导数大于零, 且 $f(1)=0,f(m-1)<0$, 由 $f(x)$ 的凹性知, (11) 在 i 满足 $1\le i\le m-1$ 时恒成立.

2) 当 $a(\sigma)=a(\sigma|_0)$(即包括最左端的一阶基本区间), 由 (10) 和 (4) 式得

$$\mu([a(\sigma),b(\tau)])=\frac{i-1}{r}+\frac{1}{1+r};$$

$$\begin{aligned}\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s(b(\tau)-a(\sigma))^s&=\Big(\frac{m^2-1}{m^2-2}\Big)^s\Big[\frac{1}{m}\Big(i-\frac{1}{m}-\frac{1}{m_3}-\frac{1}{m^5}-\cdots\Big)\Big]^s\\&=\frac{1}{r}\Big(\frac{i(m^2-1)-m}{m^2-2}\Big)^s.\end{aligned}$$

故 (11) 式成立只要

$$i-1+\frac{r}{r+1}\le\Big(\frac{i(m^2-1)-m}{m^2-2}\Big)^s,$$

由 $f(x)=x-1+\frac{r}{r+1}-(\frac{x(m^2-1)-m}{m^2-2})^s$ 的凹性及 $f(m)=0,f(1)<0$ 得, (11) 式在 i 满足 $1\le i\le m$ 时成立.

由此可见, 无论哪种情况下, (11) 式在 $n=1$ 时都成立.

现假设 (11) 式在 $n=k$ 时成立, 我们分析 $n=k+1$ 时的各种情况.

若 $\sigma,\tau\in D_{k+1}$ 且 $\sigma|_k=\tau|_k$, 类似于 $n=1$ 时的证明有 (11) 式成立. 因此我们下面只要讨论 $\sigma,\tau\in D_{k+1},\sigma|_k\ne\tau|_k$ 的情形.

情形 A $a(\sigma)=a(\sigma|_k)$. 因为 $J_{\tau|_k}$ 落在 $J_{\sigma|_k}$ 的右方, 可令 $J_{\tau'}$ 为紧靠 $J_{\tau|k}$ 左方的基本元, 记

$$\lambda=\frac{b(\tau|_k)-b(\tau)}{b(\tau|_k)-b(\tau')},\quad 0\le\lambda<1, \tag{12}$$

则

$$b(\tau)-a(\sigma)=b(\tau)-a(\sigma|_k)=\lambda(b(\tau')-a(\sigma|_k))+(1-\lambda)(b(\tau|_k)-a(\sigma|_k)),$$

由 x^s 的凹性及归纳假设，得

$$
\begin{aligned}
(b(\tau)-a(\sigma))^s &\geq \lambda(b(\tau')-a(\sigma|_k))^s+(1-\lambda)(b(\tau|_k)-a(\sigma|_k))^s \\
&\geq \left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s\Big(\lambda\mu\big([a(\sigma),b(\tau')]\big)+(1-\lambda)\mu\big([a(\sigma|_k),b(\tau|_k)]\big)\Big) \\
&= \left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s\Big(\mu\big([a(\sigma|_k),b(\tau|_k)]\big)-\lambda\mu\big([b(\tau'),b(\tau|_k)]\big)\Big). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

(12) 给出

$$
\lambda \leq \frac{(m-i)\frac{1}{m^{k+1}}}{\frac{1}{m^k}}=\frac{1}{m}(m-i),
$$

所以

$$
\lambda\mu([b(\tau'),b(\tau|_k)]) \leq \frac{1}{m}(m-i)\frac{1}{r^k}<(m-i)\frac{1}{r^{k+1}}=\mu([b(\tau),b(\tau|_k)]),
$$

代入 (13), 得

$$
\begin{aligned}
(b(\tau)-a(\sigma))^s &= \left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s\{\mu([a(\sigma|_k),b(\tau|_k)])-\mu([b(\tau),b(\tau|_k)])\} \\
&= \left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s\mu([a(\sigma),b(\tau)]),
\end{aligned}
$$

表明 (11) 式在情形 A 下成立.

情形 B　$a(\sigma)\neq a(\sigma|_k)$. 此时，我们总可以分情况将区间 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 进行截左端补右端或截右端补左端或逐个 $k+1$ 基本区间左移法，将属于情形 B 的区间 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 变换成属于情形 A 的区间 $[a(\sigma'),b(\tau')]$, 而且保持其长度不增、质量不减

i)　$\sigma_{k+1}\geq\tau_{k+1}$ 时，截下 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 左端的部分 $J_{\sigma|_k}$ 补到右端，并去掉前面的间隔，所得区间 $[a(\sigma'),b(\tau')]$ 满足 $a(\sigma')=a(\sigma'|_k)$, 由情形 A

$$
\mu[a(\sigma),b(\tau)]=\mu[a(\sigma'),b(\tau')]\leq\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau')-a(\sigma'))^s<\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau)-a(\sigma))^s;
$$

ii)　$\sigma_{k+1}<\tau_{k+1}$ 且 $\sigma_k=0$ 时，截下 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 右端 $\sigma_{k+1}-1$ 个 $k+1$ 阶基本区间补到左端，所得区间 $[a(\sigma'),b(\tau')]$, 满足 $a(\sigma')=a(\sigma'|_k)$, 由情形 A 知

$$
\mu[a(\sigma),b(\tau)]=\mu[a(\sigma'),b(\tau')]\leq\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau')-a(\sigma'))^s=\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau)-a(\sigma))^s;
$$

iii)　$\sigma_{k+1}<\tau_{k+1}$ 且 $\sigma_k\neq 0$ 时，将 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 中每个 $k+1$ 阶基本区间分别往左移动到左边的第 $m\sigma_{k+1}$ 个 $k+1$ 阶基本区间上，使区间 $[a(\sigma),b(\tau)]$ 变为 $[a(\sigma'),b(\tau')]$, 满足 $\sigma'_k=0$, 由 ii) 知

$$
\mu[a(\sigma),b(\tau)]\leq\mu[a(\sigma'),b(\tau')]\leq\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau')-a(\sigma'))^s\leq\left(\frac{m^2-1}{m^2-2}\right)^s(b(\tau)-a(\sigma))^s.
$$

从而当 $n=k+1$ 时， (11) 式也成立．由归纳假设，引理 3 获证.

4 F_m 的 Hausdorff 维数与测度

为了确定的 Hausdorff 测度，我们还需要下面的

引理 4[4] 记 G_k 为集合 F 的 k 阶基本区间的所有可能并集， $G=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}G_k$, 则有

$$H^s(F)=H^s_G(F).$$

定理 1 的证明 在 G 中任取集 F_m 的一个 δ 覆盖 $\{U_i\}$, 并假设 U_i 是某些 $k(i)$ 阶基本元的并，记构成 U_i 的最左端基本元为 $J_{\sigma^{(i)}}$, 构成 U_i 的最右端基本元为 $J\tau^{(i)}$, 则 $|U_i|=b(\tau^{(i)})-a(\sigma^{(i)})$. 由引理 3, 得

$$\Sigma|U_i|^s\geq\Big(\frac{m^2-2}{m^2-1}\Big)^s.$$

所以

$$H^s_G(F_m)\geq\Big(\frac{m^2-2}{m^2-1}\Big)^s.$$

从而由引理 4, 得

$$H^s(F_m)\geq\Big(\frac{m^2-2}{m^2-1}\Big)^s.$$

下面证明相反的不等式.

由 (2), (5) 式, 对于任意 $k>0$, 全部 q_k 个 k 阶基本元是 F_m 的自然覆盖. 由 (6), F_m 的 k 阶基本元 $J_\sigma(\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k)\in D_k)$ 中，对应 $\sigma_k\neq0$ 的有 $(m-1)q_{k-1}$ 个，对应 $\sigma_k=0$ 的有 $(m-1)q_{k-2}$ 个，现将对应 $\sigma_k=0$ 的每个 k 阶基本元都升为 $k+1$ 阶. 共得对应 $\sigma_{k+1}\neq0$ 的 $k+1$ 阶基本元 $(m-1)^2q_{k-2}$ 个，连同原有的 $(m-1)q_{k-1}$ 个对应 $\sigma_k\neq0$ 的 k 阶基本元仍然是 F_m 的覆盖. 故而有

$$H^s(F_m)\leq\sum_{\substack{\sigma\in D_k\\ \sigma_k\neq0}}|J_\sigma|^s+\sum_{\substack{\sigma*i\in D_{k+1}\\ i\neq0\\ \sigma_k=0}}|J_{\sigma*i}|^s,$$

所以，由 (3), (8) 和 $m^s=r$, 我们有

$$\begin{aligned}H^s(F_m)&\leq(m-1)\cdot q_{k-1}|J_\sigma|^s+(m-1)^2\cdot q_{k-2}|J_{\sigma*i}|^s\\&=(m-1)\Big(q_{k-1}\frac{1}{r^k}+(m-1)\cdot q_{k-2}\cdot\frac{1}{r^{k+1}}\Big)\Big(1-\frac{1}{m^2-1}\Big)^s.\end{aligned}$$

应用命题 2, 得到

$$H^s(F_m)\leq(m-1)\frac{(r+1)^2}{r^2(r+2)}\Big(1+\frac{m-1}{r^2}\Big)\Big(1-\frac{1}{m^2-1}\Big)^s=\Big(\frac{m^2-2}{m^2-1}\Big)^s.$$

综合下界即得测度的确切值

$$H^s(F_m)=\Big(\frac{m^2-2}{m^2-1}\Big)^s.$$

参 考 文 献

[1] Zulauf A and Turner J C. Fibonacci sequences of sets and their duasl. *Fibonacci Quart*, 1988, **26**(2): 152–156.
[2] Drobot V and Turner J. Hausdorff dimension and Perrobenius theory. *Illinois J. Math.*, 1989, **33**: 1–9.
[3] 瞿成勤，苏维宜．齐次 Cantor 集的 Hausdorff 测度．数学学报， 2003, **46**: 19–22.
[4] Feng D J, Wen Z Y and Wu J. Dimension of the homogeneous Moran. *Science in China, Sar.* A, 1997, **40**: 475–482.

HAUSDORFF MEASURE FOR THE SET OF m-ADIC NUMBERS WITHOUT NEIGHBORING ZEROES

ZHONG Ting ZHANG Qingqing TANG Liang

(*College of Information Management and Engineering, Jishou University, Hunan* 427000)

Abstract For any integer $m \geq 2$, let $F_m = \left\{x \in [0,1) : \{m^k x\} \geq \frac{1}{m^2}, k \in N\right\}$, where $\{m^k x\}$ is the fractional part of $m^k x$. This paper gives the Hausdorff measure of F_m: $H^s(F_m) = (\frac{m^2-2}{m^2-1})^s$, where $s = \log_m \frac{m-1+\sqrt{(m-1)^2+4(m-1)}}{2}$ is the Hausdorff dimension of F_m.

Key words m-adic, sequence of no double zeroes linked, mass distribution, Hausdorff dimension, Hausdorff measure.