系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(2) (2009, 2), 228–241

具有时滞和可变营养消耗率的比率型 Chemostat 模型稳定性分析*

董 庆 来

(北京科技大学应用科学学院数力系， 北京 100083; 延安大学数学与计算机学院， 延安 716000)

马 万 彪

(北京科技大学应用科学学院数力系， 北京 100083)

摘要 考虑了一类具有时滞和可变营养消耗率、增长函数为比率确定型的微生物连续培养模型. 首先，详细地讨论了解的存在性、有界性、平衡点的局部渐近稳定性以及 Hopf 分支. 其次，利用 Lyapunov-LaSalle 不变性原理证明了边界平衡点的全局渐近性. 最后，利用时滞微分系统解的极限集的一些性质，证明了当正平衡点存在时，对任意时滞系统是一致持久的.

关键词 Chemostat, 时滞，稳定性， Hopf 分支， Lyapunov-LaSalle 不变性原理，持久性.

MR(2000) 主题分类号 34K20, 92B05

1 引 言

Chemostat(又称恒化器) 是一个用来连续培养微生物的实验装置 [1−4], 是一个简化的湖泊模型，可用于模拟湖泊和海洋中单细胞藻类浮游生物的生长． Chemostat 模型的研究对于工业发酵过程和废水处理等都有很重要的作用. 经典的单种微生物单种营养的 Chemostat 模型是用如下的微分方程组来描述的 [2−4]

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = D(S^0 - S) - \delta^{-1}\mu(S)X, \\ \dot{X}(t) = (\mu(S) - D)X, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$ 和 $X(t)$ 分别表示在 t 时刻培养皿中营养的浓度和微生物的浓度，S^0 为输入的初始营养浓度，D 表示流出率，δ 表示营养的消耗率，$\mu(S)$ 为微生物的增长率． Monod (1950) 最早提出了一个与营养浓度有关的增长函数 $\mu(S) = \frac{\mu_m S}{k_m + S}$ (其中 μ_m, k_m 是正常数). 显然，$\mu(S)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是 S 的增函数．然而，在现实的微生物连续培养中会存在一些非常高的营养浓度反而抑制细胞增长的现象，并且随着研究的不断深入，系统会出现许多滞后、多态

* 北京科技大学校基金和国家自然科学基金 (10671011) 资助课题.
收稿日期：2006-09-04, 收到修改稿日期：2007-05-11.

振荡、混沌等更复杂的非线性现象 [2,5]. 这些现象都是无法用原有的模型来解释的. 为了更加准确地描述这些自然现象, 可以从多个方面对模型 (1) 加以改进 [3,5]. 例如, 引进新的增长函数 [2,3,6−14] 等; 放弃营养消耗率为常数的假设 [2,7−12] 等; 引入时滞 [1,2,5,13−27] 等.

近年来, 许多作者对捕食者 - 食饵的相互作用关系的研究, 提出了比率型的假设, 即捕食者对食饵的功能型反应是捕食者种群和食饵种群的密度比值函数 [2,3,28]. 文 [12, 29] 考虑到模型 (1) 中微生物和营养之间存在的捕食和被捕食关系, 研究了用比率确定型功能反应函数来表示增长函数的 Chemostat 模型, 即增长函数取为 $\mu=\frac{\mu_{max}\frac{S}{X}}{K_s+\frac{S}{X}}$. 它与 Monod 型比较, 在于用单位菌体所具有的底物 $\frac{S}{X}$ 代替了底物浓度 S, 这种表示方法对 BOD(生化需氧量) 的测量具有实际意义. 当 $\frac{S}{X}\ll K_s$ 时, 由增长函数的表达式知 $\mu\approx\frac{\mu_{max}}{K_s}\cdot\frac{S}{X}$. 显然, 当单位菌体所具有的底物很少时, 菌体的增长率与底物浓度成正比, 而与菌体浓度成反比. 文 [12] 所研究的具体系统模型为

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=(S^0-S(t))D-\dfrac{\mu S(t)}{kX(t)+S(t)}\dfrac{X(t)}{A+BS(t)},\\[2mm] \dot{X}(t)=\dfrac{\mu S(t)}{kX(t)+S(t)}X(t)-DX(t),\end{cases}\tag{2}$$

其中 D, S^0, μ, k, A, B 是正常数, $S(t)$ 和 $X(t)$ 的意义与系统 (1) 相同; 增长函数 $\mu(S)=\frac{\mu S(t)}{kX(t)+S(t)}$ 为比率确定型功能反应函数; $\delta(S)=A+BS$, 放弃了营养消耗率为常数的假设. 作者对系统 (2) 解的渐近行为进行了详细的分析, 并证明了只要正平衡点存在时, 系统 (2) 就是持续生存的. 同时, 给出了系统 (2) 存在极限环和正平衡点全局渐近稳定的充分条件.

然而, 在微生物连续培养过程中, 微生物的增值与所消耗掉的营养并不是瞬时完成的, 即常常存在时间滞后现象. 如同文 [2–5] 中指出的, 通常时滞是由下面三种情况引起的: 一是微生物对营养的存储. 营养被微生物摄取后有个消化吸收过程, 即营养将会在微生物体内存储一段时间 [18−21] 等; 二是微生物具有成熟期. 每种微生物都有成熟期, 并且只有成熟的微生物才能产生新的生物体; 三是微生物的新陈代谢作用. 尽管细胞吸收营养是瞬间的过程, 但微生物用以生产新生物量的生理化学过程却有时间滞后存在 (时滞出现在反应细胞增长的方程中). 由新陈代谢引起滞后增长反应现象 (Delay Growth Response) 的模型称为 DGR 模型 [13,14,22−27] 等. 大量的研究结果表明在一些系统模型中, 时滞可能会破坏系统平衡点的稳定性, 而产生周期振荡; 而在一些系统模型中, 时滞对系统平衡点的稳定性和系统的持久性却是无害的.

本文将在文 [12] 的基础上, 进一步考虑具有 DGR 的系统模型 (2), 即考虑下述具有时滞的非线性微分系统

$$\begin{cases}\dot{S}(t)=(S^0-S(t))D-\dfrac{\mu S(t)}{kX(t)+S(t)}\dfrac{X(t)}{A+BS(t)},\\[2mm] \dot{X}(t)=\dfrac{\mu S(t-\tau)}{kX(t-\tau)+S(t-\tau)}X(t-\tau)-DX(t),\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\tau\geq 0$ 为时滞. 为了研究上的方便, 首先对系统 (3) 无量纲化. 为此, 令

$$X=AS^0x,\quad S=S^0y,\quad t=\frac{T}{D},\quad a=\frac{\mu}{D},\quad b=kA,\quad c=\frac{BS^0}{A},$$

仍用 t 记 T, 则系统 (3) 化为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{ay(t-\tau)}{bx(t-\tau)+y(t-\tau)}x(t-\tau)-x(t), \\ \dot{y}(t) = 1-y(t)-\dfrac{ay(t)}{bx(t)+y(t)}\dfrac{x(t)}{1+cy(t)}. \end{cases} \tag{4}$$

考虑到生物学意义，设初始条件为

$$x(t)=\varphi_1(t)\geq 0,\quad y(t)=\varphi_2(t)\geq 0,\quad \varphi_1^2(t)+\varphi_2^2(t)\neq 0,\quad t\in[-\tau,0], \tag{5}$$

其中 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是 $[-\tau,0]$ 上的连续函数.

本文的组成如下：第 2 节分析系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解的存在性、非负性和有界性. 第 3 节完整地讨论系统 (4) 平衡点的局部稳定性和 Hopf 分支. 第 4 节研究系统 (4) 边界平衡点的全局渐近稳定性. 第 5 节讨论系统的持久性. 最后，第 6 节是本文的结论.

2 解的存在性、非负性和有界性

这一节将讨论系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解的存在性、非负性和有界性. 我们有下面的结论.

定理 2.1 系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解 $(x(t),y(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在、非负，并且满足

$$\limsup_{t\to+\infty} x(t)\leq\frac{a}{b},\quad \liminf_{t\to+\infty} y(t)\geq\frac{b}{a+b},\quad \limsup_{t\to+\infty} y(t)\leq 1.$$

证 由泛函微分方程解的局部存在性定理知 [28,30−32], 对某个常数 $\delta>0$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\delta)$ 上存在. 首先证明当 $t\in(0,\delta)$ 时， $y(t)>0$. 事实上，如果不成立，由 $\varphi_2(t)\geq 0$ 和 $y(t)$ 的连续性，必存在 $t_1\geq 0$, 使得 $y(t_1)=0$, $\dot{y}(t_1)\leq 0$, 且 $y(t)\geq 0(-\tau\leq t\leq t_1)$, 其中当 $t_1=0$ 时， $\dot{y}(t_1)$ 表示 $y(t)$ 在 $t=t_1$ 的上右导数. 因此，由系统 (4) 的第二个方程得

$$\dot{y}(t_1)=1-y(t_1)-\frac{ax(t_1)y(t_1)}{(bx(t_1)+y(t_1))(1+cy(t_1))}=1>0,$$

这与 $\dot{y}(t_1)\leq 0$ 矛盾. 因此，对任意的 $t\in(0,\delta)$, 有 $y(t)>0$ 成立.

下面证明对任意的 $t\in[0,\delta)$, 有 $x(t)\geq 0$ 恒成立. 分两种情况讨论

i) $\tau=0$. 系统 (4) 的第一个方程化为

$$\dot{x}(t)=x(t)\Big(\frac{ay(t)}{bx(t)+y(t)}-1\Big),\quad t\geq 0.$$

因而，直接积分可知 $x(t)\geq 0$ $(0\leq t<\delta)$.

ii) $\tau>0$. 如果不然，则由 $x(t)$ 在 $[-\tau,\delta)$ 上的连续性，必存在 $t_2>0$, 使得 $x(t_2)<0$, $\dot{x}(t_2)\leq 0$, 且 $x(t_2-\tau)\geq 0$. 因此，由系统 (4) 的第一个方程得

$$\dot{x}(t_2)=\frac{ax(t_2-\tau)y(t_2-\tau)}{bx(t_2-\tau)+y(t_2-\tau)}-x(t_2)\geq -x(t_2)>0,$$

这与 $\dot{x}(t_2) \le 0$ 矛盾. 因此, 对任意的 $t \in [0,\delta)$, 有 $x(t) \ge 0$ 恒成立.

下面证明 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[0,\delta)$ 上有界. 事实上, 由系统 (4) 和 $x(t), y(t)$ 在 $[-\tau,\delta)$ 上的非负性, 对任意的 $t \in [0,\delta)$, 有

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \le ax(t-\tau) - x(t), \\ \dot{y}(t) \le 1 - y(t). \end{cases} \tag{6}$$

由于时滞线性系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = au(t-\tau) - u(t), \\ \dot{v}(t) = 1 - v(t) \end{cases} \tag{7}$$

满足初始条件 $u(t) = \varphi_1(t)$, $v(t) = \varphi_2(t)$ $(-\tau \le t \le 0,\ \varphi_1, \varphi_2$ 如同 (5)) 的解 $(u(t), v(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在且唯一. 因此, 由泛函微分方程解的比较原理 [33] 可知, 对任意的 $t \in [0,\delta)$, 有

$$x(t) \le u(t), \quad y(t) \le v(t). \tag{8}$$

显然, 由 (8) 知 $(x(t), y(t))$ 必在 $[0,\delta)$ 上有界. 因此, 由泛函微分方程解的延拓定理 [28,30−32] 可知, $(x(t), y(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在, 并且进一步可证是非负的. 由系统 (4) 的第二个方程, 显然有 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) \le 1$. 又由

$$\dot{y}(t) > 1 - y(t) - \frac{a}{b}y(t) = 1 - \frac{a+b}{b}y(t),$$

易知 $\liminf\limits_{t\to+\infty} y(t) \ge \frac{b}{a+b}$. 再由系统 (4) 的第一个方程和 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) \le 1$ 可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\bar{t} > 0$, 使得当 $t \ge \bar{t}$ 时, 有

$$\dot{x}(t) \le \frac{a}{b}y(t-\tau) - x(t) \le \frac{a}{b}(1+\varepsilon) - x(t).$$

因此, 利用 ε 的任意性可得 $\limsup\limits_{t\to+\infty} x(t) \le \frac{a}{b}$. 定理证毕.

3　平衡点的局部稳定性与 Hopf 分支

这一节将细致地讨论系统 (4) 平衡点的局部稳定性. 首先, 由于在第 4 节定理 4.1 的证明中证明了集合

$$G = \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C \mid 0 \le \varphi_1 \le \frac{a}{b},\ \frac{b}{a+b} \le \varphi_2 \le 1 \right\}$$

关于系统 (4) 是正向不变的, 并注意到定理 2.1, 我们只需在 G 上讨论系统 (4) 即可. 系统 (3) 与系统 (2) 的平衡点分类是一致的, 并有下面的结论.

引理　3.1[12] 系统 (4) 总有边界平衡点 $E_0 = (0,1)$. 当 $a > 1$ 时, 存在唯一的正平衡点 $E^+ = (x^*, y^*)$, 其中 $x^* = \frac{(a-1)y^*}{b}$, $y^* = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4b^2c}}{2bc}$, y^* 是方程 $f(y) = y^2 - \frac{(bc-a-b+1)y}{bc} - \frac{1}{c}$ 的唯一正根, $\sigma = bc - a - b + 1$.

首先, 对边界平衡点 E_0 的局部稳定性, 有如下的结论.

定理 3.1 当 $a<1$ 时, 对任意的 $\tau\geq 0$, E_0 是局部渐近稳定的; 当 $a=1$ 时, 对任意的 $\tau\geq 0$, 系统 (4) 在 E_0 处的线性近似系统的零解是稳定的; 当 $a>1$ 时, 对任意的 $\tau\geq 0$, E_0 是不稳定的.

证 设 $\overline{E}^*=(\overline{x}^*,\overline{y}^*)$ 是系统 (4) 的任一平衡点. 作代换 $X=x-\overline{x}^*$, $Y=y-\overline{y}^*$, 则系统 (4) 在 $\overline{E}^*$ 处对应的线性化系统为

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=-X(t)+PX(t-\tau)+QY(t-\tau),\\ \dot{Y}(t)=AX(t)+BY(t),\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$A=-\frac{a\overline{y}^{*2}}{(1+c\overline{y}^*)(b\overline{x}^*+\overline{y}^*)^2},\quad P=\frac{a\overline{y}^{*2}}{(b\overline{x}^*+\overline{y}^*)^2},$$
$$Q=\frac{ab\overline{x}^{*2}}{(b\overline{x}^*+\overline{y}^*)^2},\quad B=-1-\frac{a\overline{x}^*(b\overline{x}^*-c\overline{y}^{*2})}{(b\overline{x}^*+\overline{y}^*)^2(1+c\overline{y}^*)^2}.$$

系统 (9) 的特征方程为

$$\lambda^2+(1-B)\lambda-B+(-P\lambda+BP-AQ)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0.\tag{10}$$

考虑边界平衡点 $E_0=(0,1)$, 对应的有 $A=-\frac{a}{1+c}$, $P=a$, $Q=0$, $B=-1$. 方程 (10) 等价于

$$(\lambda+1-a\mathrm{e}^{-\lambda\tau})(\lambda+1)=0.\tag{11}$$

显然, $\lambda=-1$ 是特征方程 (11) 的根. 而对于超越方程 $\lambda+1-a\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0$, 由文 [28] 知, i) 当 $a<1$ 时, 对任意的 $\tau\geq 0$, 所有的根均具有负实部. 因此, E_0 是局部渐近稳定的; ii) 当 $a>1$ 时, 对任意的 $\tau\geq 0$, 存在具有正实部的根. 因此, E_0 是不稳定的; iii) 当 $a=1$ 时, 方程 $\lambda+1-a\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0$ 等价于 $\lambda+1-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0$. 此方程有单根 $\lambda=0$, 且对任意的 $\tau\geq 0$, 所有其它的根均具有负实部. 因此, 对任意的 $\tau\geq 0$, 系统 (4) 在 E_0 处的线性近似系统的零解是稳定的. 定理证毕.

下面设 $a>1$, 即系统 (4) 存在唯一的正平衡点 E_1. 有下面的结论.

定理 3.2 1) 若 $B<\frac{a-1}{a}$, 则有如下结论成立: i) 若 $B^2>(BP-AQ)^2$ 或 $-B=BP-AQ$, 则对任意的 $\tau\geq 0$, E^+ 是局部渐近稳定的; ii) 若 $B^2<(BP-AQ)^2$, 则存在 τ_0, 使得当 $\tau<\tau_0$ 时, E^+ 是局部渐近稳定的; 当 $\tau>\tau_0$ 时, E^+ 是不稳定的; 当 $\tau=\tau_0$ 时, 系统在 E^+ 附近分支出周期解.

2) 若 $B>\frac{a-1}{a}$, 则对任意的 $\tau\geq 0$, E^+ 是不稳定的.

证 对于正平衡点 $E^+=(x^*,y^*)$, 因 $bx^*+y^*=ay^*$, 则对应有 $A=-\frac{1}{a(1+cy^*)}$, $P=\frac{1}{a}$, $Q=\frac{(a-1)^2}{ab}$, $B=-1-\frac{(a-1)(a-1-cy^*)}{ab(1+cy^*)^2}$. 下面考虑特征方程 (10). 当 $\tau=0$ 时, 即系统 (4) 中不含有时滞时, 对应的特征方程 (10) 化为

$$\lambda^2+(1-B-P)\lambda+BP-AQ-B=0.\tag{12}$$

由文 [12] 中的分析有: 当 $B<\frac{a-1}{a}$ 时, 有 $1-B-P>0$, $BP-AQ-B>0$, 即方程 (12) 的根均具有负实部. 因而, 系统 (4) 的正平衡点 E^+ 局部渐近稳定. 当 $B>\frac{a-1}{a}$ 时, 有 $1-B-P<0$,

$BP-AQ-B>0$, 即方程 (12) 均有正实部的根，因而正平衡点 E^+ 不稳定；当 $B=\frac{a-1}{a}$ 时，有 $1-B-P=0$, $BP-AQ>0$, 即 E^+ 是非双曲型平衡点.

对于 $\tau\geq 0$ 的情形，分如下两种情况讨论.

1) 设 $B<\frac{a-1}{a}$. 首先，注意到 $-B+BP-AQ>0$, 可知对任意的 $\tau\geq 0$, $\lambda=0$ 不是特征方程 (10) 的根. 不妨设 $\lambda=\mathrm{i}\omega(\omega>0)$ 是特征方程 (10) 的任意一个纯虚根. 将 $\lambda=\mathrm{i}\omega$ 代入方程 (10), 并分离实部与虚部，有

$$\begin{cases} B+\omega^2=-P\omega\sin\omega\tau+(BP-AQ)\cos\omega\tau, \\ (1-B)\omega=P\omega\cos\omega\tau+(BP-AQ)\sin\omega\tau. \end{cases} \tag{13}$$

上式两边平方、相加，整理得

$$\omega^4+(1+B^2-P^2)\omega^2+B^2-(BP-AQ)^2=0. \tag{14}$$

求解得

$$\omega^2=\frac{1}{2}\{P^2-1-B^2\pm\sqrt{(P^2-1-B^2)^2-4[B^2-(BP-AQ)^2]}\}, \tag{15}$$

其中

$$P^2-1-B^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-1-B^2<0,\quad a>1.$$

再分两种情况讨论： i) 若 $B^2<(BP-AQ)^2$, 则由 (15) 可知，存在唯一的正解 $\omega=\omega_+$. 此时，特征方程 (10) 有一对纯虚根 $\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_+$. 由 (13) 知对应于 ω_+, 可求得对应的 $\tau=\tau_n$ 为

$$\tau_n=\frac{\theta}{\omega_+}+\frac{2n\pi}{\omega_+},\quad 0\leq\theta<2\pi,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$\cos\theta=-\frac{P(B-1)\omega_+^2-(BP-AQ)(B+\omega_+^2)}{P^2\omega_+^2+(BP-AQ)^2},$$

$$\sin\theta=\frac{(1-B)(BP-AQ)\omega_+-P\omega_+(B+\omega_+^2)}{P^2\omega_+^2+(BP-AQ)^2}.$$

下面证明 $\lambda(\tau_n)=\mathrm{i}\omega_+$ 是单根. 记

$$F(\lambda)\equiv\lambda^2+(1-B)\lambda-B+(-P\lambda+BP-AQ)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}. \tag{16}$$

上式两边对 λ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=2\lambda+1-B+[-P-\tau(-P\lambda+BP-AQ)]\mathrm{e}^{-\lambda\tau}.$$

若 $\lambda(\tau_n)=\mathrm{i}\omega_+$ 不是单根，则当 $\tau=\tau_n$, $\lambda=\mathrm{i}\omega_+$ 时， $\frac{\mathrm{d}F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=0$, 即

$$\{2\lambda+1-B+[-P-\tau(-P\lambda+BP-AQ)]\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\}|_{\tau=\tau_n,\lambda=\mathrm{i}\omega_+}=0.$$

又 $\lambda(\tau_n)=\mathrm{i}\omega_+$ 是特征方程 (10) 的根，从而

$$\{\tau\lambda^2+[2+(1-B)\tau]\lambda+1-B-\tau B-Pe^{-\lambda\tau}\}|_{\tau=\tau_n,\lambda=\mathrm{i}\omega_+}=0.$$

即

$$\left\{\begin{array}{l} 1-B-B\tau_n-\tau_n\omega_+^2-P\cos(\omega_+\tau_n)=0, \\ ((1-B)\tau_n+2)\omega_++P\sin(\omega_+\tau_n)=0. \end{array}\right. \tag{17}$$

然而，由 $B<1-\frac{1}{a}=1-P$ 有

$$\begin{aligned} &((1-B)\tau_n+2)\omega_++P\sin(\omega_+\tau_n) \\ >\ &2\omega_++(1-B)\omega_+\tau_n-P\omega_+\tau_n=2\omega_++(1-B-P)\omega_+\tau_n>0, \end{aligned}$$

这与 (17) 的第二式矛盾．因此， $\lambda(\tau_n)=\mathrm{i}\omega_+$ 是单根．

对特征方程 (10) 两边关于 τ 求导，得

$$\{2\lambda+1-B+[-P-\tau(-P\lambda+BP-AQ)]\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\}\frac{\mathrm{d}\lambda(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\lambda(-P\lambda+BP-AQ)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}. \tag{18}$$

由 (18) 得

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\Big)^{-1}=\frac{2\lambda+1-B+[-P-\tau(-P\lambda+BP-AQ)]\mathrm{e}^{-\lambda\tau}}{\lambda(-P\lambda+BP-AQ)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}}=\frac{(2\lambda+1-B)\mathrm{e}^{\lambda\tau}-P}{\lambda(-P\lambda+BP-AQ)}-\frac{\tau}{\lambda}.$$

注意到 (10), 有 $\mathrm{e}^{\lambda\tau}=\frac{P\lambda-BP+AQ}{(\lambda^2+(1-B)\lambda-B}$. 因此

$$\begin{aligned} \mathrm{sign}\Big\{\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\lambda)}{\mathrm{d}\tau}\Big\}_{\lambda=\mathrm{i}\omega} &= \mathrm{sign}\Big\{\mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\Big)^{-1}\Big\}_{\lambda=\mathrm{i}\omega} \\ &= \mathrm{sign}\Big\{\mathrm{Re}\Big[\frac{-(2\lambda+1-B)}{\lambda(\lambda^2+(1-B)\lambda-B)}\Big]_{\lambda=\mathrm{i}\omega}+\mathrm{Re}\Big[\frac{-P}{\lambda(-P\lambda+BP-AQ)}\Big]_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\Big\} \\ &= \mathrm{sign}\Big\{\frac{(1-B)^2-2(-B-\omega^2)}{(-B-\omega^2)^2+(1-B)^2\omega^2}+\frac{-(-P)^2}{(BP-AQ)^2+(-P)^2\omega^2}\Big\} \\ &= \mathrm{sign}\{1+B^2-P^2+2\omega^2\}=\mathrm{sign}\Big\{1+B^2-\frac{1}{a^2}+2\omega^2\Big\}=1, \end{aligned}$$

即 $\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Re}\lambda)}{\mathrm{d}\tau}|_{\lambda=\mathrm{i}\omega_+,\tau=\tau_n}>0$. 因而，由文 [28, 32] 知，当 $\tau=\tau_n$ 时，有 Hopf 分支，即当 $\tau=\tau_n$ 时，系统 (4) 在 E^+ 附近分支出周期解．又当 $\tau=0$ 时， E^+ 是局部渐近稳定的．因此，当 $\tau<\tau_0$ 时， E^+ 是局部渐近稳定的．当 $\tau>\tau_0$ 时，特征方程 (10) 存在具有正实部的根，即 E^+ 是不稳定的．

ii) 若 $B^2>(BP-AQ)^2$, 或 $-B=BP-AQ$, 则方程 (14) 不存在正实根，即特征方程 (10) 不存在纯虚根．又当 $\tau=0$ 时， E_1 是局部渐近稳定的．因此，由文 [28] 知，当 $B^2>(BP-AQ)^2$, 或 $-B=BP-AQ$ 时，对任意的时滞 $\tau\geq 0$, E_1 是局部渐近稳定的．

2) 设 $B>\frac{a-1}{a}$. 由于当 $B>\frac{a-1}{a}$ 时，有 $BP-AQ>B>0$, 从而 $(BP-AQ)^2>B^2$, 则特征方程 (10) 存在一对纯虚根．又因当 $\tau=0$ 时，正平衡点 E^+ 是不稳定的．因此，类似于文 [28] 的讨论可知，对任意的时滞 $\tau\geq 0$, E^+ 是不稳定的．定理证毕．

4 边界平衡点 E_0 的全局稳定性

第 3 节中, 我们详细分析了边界平衡点 E_0 的局部稳定性等. 这一节, 将利用 Lyapunov-LaSalle 不变性原理 [28,31,32], 进一步讨论 E_0 的全局渐近稳定性，并得到如下结论．

定理 4.1　若 $a<1$, 则对任意时滞 $\tau\geq 0$, E_0 是全局渐近稳定的；若 $a=1$, 则对任意的 $\tau\geq 0$, E_0 是全局吸引的．

证　设 $C=C([-\tau,0],R^2)$ 表示由 $[-\tau,0]$ 到 R^2 的全体连续函数构成的 Banach 空间．定义 C 的子集合

$$G=\Big\{\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in C\mid 0\leq\varphi_1\leq\frac{a}{b},\ \frac{b}{a+b}\leq\varphi_2\leq 1\Big\}.$$

下面证明 G 关于系统 (4) 是正向不变的．

对任意的 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in G$, 设 $(x(t),y(t))$ 是系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解．由定理 2.1 的证明知，$(x(t),y(t))$ 是非负的．首先证明对任意的 $t\geq 0$, 有 $y(t)\leq 1$. 事实上，若存在 $t_3>0$, 使得 $y(t_3)>1$, 且 $\dot y(t_3)>0$. 则，由系统 (4) 的第二个方程得

$$\dot y(t_3)=1-y(t_3)-\frac{ax(t_3)y(t_3)}{(bx(t_3)+y(t_3)(1+cy(t_3))}<0,$$

这与 $\dot y(t_3)>0$ 矛盾．其次证明对所有的 $t\geq 0$, 有 $y(t)\geq\frac{b}{a+b}$. 如果不然，则存在 $t_4>0$, 使得 $y(t_4)=\frac{b}{a+b}$, $y(t)\geq\frac{b}{a+b}$ $(0\leq t\leq t_4)$, $\dot y(t_4)\leq 0$. 由系统 (4) 的第二个方程得

$$\begin{aligned}\dot y(t_4)&=1-y(t_4)-\frac{ax(t_4)}{bx(t_4)+y(t_4)}\frac{y(t_4)}{1+cy(t_4)}\\&\geq 1-\frac{b}{a+b}-\frac{a}{b}\frac{\frac{b}{a+b}}{1+c\frac{b}{a+b}}\\&=\frac{a}{a+b}\Big(1-\frac{1}{1+c\frac{b}{a+b}}\Big)>0,\end{aligned}$$

这与 $\dot y(t_4)\leq 0$ 矛盾．最后证明对任意的 $t\geq 0$, 有 $x(t)\leq\frac{a}{b}$. 如果不然，则存在 $t_5\geq 0$, 使得 $x(t)\leq\frac{a}{b}$ $(t\leq t_5)$, $x(t_5)=\frac{a}{b}$, $\dot x(t_5)\geq 0$. 由系统 (4) 的第一个方程得

$$\begin{aligned}\dot x(t_5)&=-x(t_5)+\frac{ay(t_5-\tau)x(t_5-\tau)}{bx(t_5-\tau)+y(t_5-\tau)}\\&\leq -x(t_5)+\frac{ax(t_5-\tau)}{bx(t_5-\tau)+1}\leq -x(t_5)+\frac{ax(t_5)}{bx(t_5)+1}\\&=\Big(-1+\frac{a}{1+b\cdot\frac{a}{b}}\Big)\frac{a}{b}=-\frac{a}{b(a+1)}<0,\end{aligned}$$

这与 $\dot x(t_5)\geq 0$ 矛盾．因此，G 关于系统 (4) 是正向不变的．

定义 G 上的泛函 V

$$V(\varphi)=\varphi_1(0)+\int_{-\tau}^{0}\varphi_1(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{19}$$

显然，$V(\varphi)$ 在 $\overline{G}$ 上连续，且在 G 上 $V(\varphi)$ 沿 (4) 的解的导数满足

$$\begin{aligned}\dot V(\varphi)|_{(4)}&=\dot\varphi_1(0)+\varphi_1(0)-\varphi_1(-\tau)=\dot x(t)+x(t)-x(t-\tau)\\&=\frac{ay(t-\tau)}{bx(t-\tau)+y(t-\tau)}x(t-\tau)-x(t)+x(t)-x(t-\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ay(t-\tau)}{bx(t-\tau)+y(t-\tau)}x(t-\tau)-x(t-\tau)\\
&= \frac{(a-1)y(t-\tau)-bx(t-\tau)}{bx(t-\tau)+y(t-\tau)}x(t-\tau)\\
&= \frac{(a-1)\varphi_2(-\tau)-b\varphi_1(-\tau)}{b\varphi_1(-\tau)+\varphi_2(-\tau)}\varphi_1(-\tau).
\end{aligned} \tag{20}$$

当 $a\le 1$ 时，有 $(a-1)\varphi_2(-\tau)-b\varphi_1(-\tau)\le 0$. 从而对任意的 $\varphi\in G$, $\dot V(\varphi)|_{(4)}\le 0$. 这表明 $V(\varphi)$ 是 G 上的一个 Lyapunov 函数 [28,31,32].

定义 $E=\{\varphi\in\overline{G}\mid \dot V(\varphi)|_{(4)}=0\}$, 由 (20) 得

$$E=\{\varphi\in G\mid \varphi_1(-\tau)=0 \text{ 或 } (a-1)\varphi_2(-\tau)-b\varphi_1(-\tau)=0\}. \tag{21}$$

若 $a\le 1$, 则 $(a-1)\varphi_2(-\tau)-b\varphi_1(-\tau)\le 0$. 因此， $E=\{\varphi\in G\mid\varphi_1(-\tau)=0\}$. 又设 M 是 E 中的最大不变集. 由于 $E_0=(0,1)\in M$, 则 M 是非空的. 对任意的 $\varphi\in M$, 设 $(x(t),y(t))$ 是系统 (4) 以 φ 为初始函数的解. 由 M 的不变性，对任意的 $t\in R$, $(x_t,y_t)\in M\subset E$. 因此，对任意的 $t\in R$, $x(t-\tau)=0$, 即对任意的 $t\in R$, $x(t)\equiv 0$, 进而 $\varphi_1\equiv 0$. 由系统 (4) 的第二个方程得 $\dot y(t)=1-y(t)$. 因而当 $t\to+\infty$ 时， $y(t)\to 1$. 因此， $\varphi_2\equiv 1$. 从而 $M=\{(0,1)\}=\{E_0\}$. 于是，由 Lyapunov-LaSalle 不变性原理 [28,31,32], 对任意的 $\tau\ge 0$, E_0 是全局吸引的．又由定理 3.1 知，当 $a<1$ 时， E_0 是局部渐近稳定的．因此，当 $a<1$ 时，对任意的时滞 $\tau\ge 0$, E_0 是全局渐近稳定的．当 $a=1$ 时，对任意的时滞 $\tau\ge 0$, E_0 是全局吸引的．定理证毕.

5 系统的持久性

一个系统的持久性研究具有重要的生物学意义 [2−4]. 这一节将采用与文 [34] 类似的方法进一步讨论系统 (4) 的持久性．由于讨论的需要，首先给出如下一个注解.

注 1 利用与定理 2.1 证明中类似的方法和时滞微分方程求解的分步法，可以证明对应于任意非负、连续的初始函数 $\varphi\in C$, 下面的结论成立

1) 系统 (4) 的解 $(x(t),y(t))$ 存在，并且 $x(t)\ge 0$ $(t\ge 0)$ 和 $y(t)>0$ $(t>0)$;

2) 若 $\varphi_1(\theta)=0(\theta\in[-\tau,0])$, 则系统 (4) 的解 $(x(t),y(t))$ 存在，且 $x(t)=0$ $(t\ge 0)$, $y(t)>0$ $(t>0)$;

3) 若 $\varphi_1(0)>0$, 则系统的解 $(x(t),y(t))$ 存在，且 $x(t)>0$ $(t\ge 0)$, $y(t)>0$ $(t>0)$;

4) 若 $\varphi_1(0)>0$, $\varphi_2(0)>0$, 则系统 (4) 的解 $(x(t),y(t))$ 存在，且 $x(t)>0$ $(t\ge 0)$, $y(t)>0$ $(t\ge 0)$.

定理 5.1 若 $a>1$, 则对任意的时滞 $\tau\ge 0$, 系统 (4) 是持久的.

证 注意到定理 2.1 和持久性的定义，我们只需证明系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解 $(x(t),y(t))$ 满足 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)>0$ 即可．又由定理 4.1 的证明知，只需考虑初始函数 φ 满足 $\varphi\in G$ 的解 $(x(t),y(t))(t\ge 0)$ 即可．首先，由定理 2.1 可知解 $(x(t),y(t))(t\ge 0)$ 的 Ω 不变集 $\omega(\varphi)$ 是非空的、紧的、不变的，且 $\omega(\varphi)\subset G$ [28,31,32].

如果 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, 我们将推出矛盾.

事实上，如果 $\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$, 则存在正时间序列 t_n: $t_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ 使得

$$\liminf_{n\to+\infty}x(t_n)=0,\quad \dot x(t_n)\le 0,\quad x(t)\ge x(t_n),\quad t_n-\tau\le t\le t_n.$$

由定理 2.1 知，解 $(x(t),y(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界的．从而，由 (4) 知，$(x(t),y(t))$ 在 $[0,+\infty)$ 上是一致连续的．因此，由 Ascoli 定理可知存在一个序列 $\{t_n\}$ (仍记作 $\{t_n\}$) 使得

$$\lim_{n\to+\infty}(x(t+t_n),y(t+t_n))=(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t))$$

在 R 上广义的一致成立．由定理 4.1 的证明可知，对任意的 $t\in R$, 有 $(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t))\in G$, 并且对任意的 $s\in R$, 关于 t 的函数 $(\widetilde{x}(t+s),\widetilde{y}(t+s))$ 是系统 (4) 满足初始条件 $(\widetilde{x}_s,\widetilde{y}_s)$ 的解，其中，对任意的 $t\in R$, 有 $\widetilde{x}(0)=0$, $\frac{b}{a+b}\le\widetilde{y}(t)\le 1$.

我们断言对任意的 $t\in R$, 有 $(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t))=(0,1)$.

由 $\widetilde{\varphi}_1(0)=0$ 和注 1 中结论 3) 知，对所有的 $t<0$, 有 $\widetilde{x}(t)=0$. 因此，由 (4) 得 $\widetilde{x}(t)=0$ $(t\in R)$, 并且

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}(t)}{\mathrm{d}t}=1-\widetilde{y}(t),\quad t\ge s.$$

因此，

$$\widetilde{y}(t)=\mathrm{e}^{-t}\widetilde{y}(0)+(1-\mathrm{e}^{-t}),\quad t\ge s.$$

由 s 的任意性可得，对任意的 $t\in R$,

$$\widetilde{y}(t)=1+(\widetilde{y}(0)-1)\mathrm{e}^{-t}.$$

由于对任意的 $t\in R$, $\widetilde{y}(t)$ 是有界的，因此，$\widetilde{y}(0)=1$, 即对所有的 $t\in R$, $\widetilde{y}(t)=1$. 由 (4) 和定理 2.1 得对任意的 $t\in R$, 有 $(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t))=(0,1)$. 这就证明了我们的断言．特别地，我们有

$$\lim_{n\to+\infty}x(t_n-\tau)=\widetilde{x}(-\tau)=0,\quad \lim_{n\to+\infty}y(t_n-\tau)=\widetilde{y}(-\tau)=1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y(t_n-\tau)}{bx(t_n-\tau)+y(t_n-\tau)}=1>\frac{1}{a}.$$

从而，对充分小的 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 n_1, 使得当 $n\ge n_1$ 时，有

$$\frac{y(t_n-\tau)}{bx(t_n-\tau)+y(t_n-\tau)}>1-\varepsilon>\frac{1}{a}.$$

因此，当 $n\ge n_1$ 时，有

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_n)&=\frac{ay(t_n-\tau)}{bx(t_n-\tau)+y(t_n-\tau)}x(t_n-\tau)-x(t_n)\\&\ge\Big[\frac{ay(t_n-\tau)}{bx(t_n-\tau)+y(t_n-\tau)}-1\Big]x(t_n)\\&>[a(1-\varepsilon)-1]x(t_n)>0,\end{aligned}$$

这与 $\dot{x}(t_n)\le 0$ 矛盾．定理证毕．

定理　5.2　若 $a>1$, 则对任意的时滞 $\tau\ge 0$, 系统 (4) 是一致持久的．

证　同样，注意到定理 2.1 和一致持久性的定义，只要证明系统 (4) 满足初始条件 (5) 的解 $(x(t),y(t))$ 满足

$$\liminf_{t\to+\infty}x(t)\ge\nu \tag{22}$$

即可，其中 ν 是不依赖于初始函数 φ 的正常数.

对任何初始函数序列 $\varphi_n=\{(\varphi_1^{(n)},\varphi_2^{(n)})\}\subset G$, 设 $(x^{(n)}(t),y^{(n)}(t))$ 是系统 (4) 满足初始条件 φ_n 的解. 设 $\omega_n(\varphi_n)$ 是 $(x^{(n)}(t),y^{(n)}(t))$ 的 Ω 极限集. 用与文 [35, 36] 完全类似的方法，可知存在某个紧的不变集 $\omega^*\subset G$ 使得当 $n\to+\infty$ 时， $\mathrm{dist}(\omega_n(\varphi_n),\omega^*)\to 0$, 其中 $\mathrm{dist}(\omega_n(\varphi_n),\omega^*)$ 是 Hausdorff 距离.

如果 (22) 不成立, 即当某个初始函数序列 $\varphi_n=\{(\varphi_1^{(n)},\varphi_2^{(n)})\}\subset G$ 满足 $\varphi_1^{(n)}(0)>0$ 时, 存在某个 $\overline{\varphi}=(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2)\in\omega^*$ 和 $\theta_0\in[-\tau,0]$, 使得 $\overline{\varphi}_1(\theta_0)=0$. 设 $(\overline{x}(t),\overline{y}(t))$ 是系统 (4) 满足初始条件 $\overline{\varphi}$ 的解. 那么，由 ω^* 的不变性，则对所有的 $t\in R$, $(\overline{x}_t,\overline{y}_t)\in\omega^*$. 由于 $\overline{\varphi}_1(\theta_0)=0$, 由注 1 知对所有的 $t\le\theta_0$, $\overline{x}(t)=0$, 进而又推知 $\overline{\varphi}_1(\theta)=0(-\tau\le\theta\le 0)$ 和 $\overline{x}(t)=0(t\in R)$. 于是，对所有的 $t\in R$, $\overline{x}(t)=0,\overline{y}(t)=\overline{g}(t)$, 其中 $\overline{g}(t)=1-(1-\overline{\varphi}_2(0))\mathrm{e}^{-t}$.

如果 $\overline{\varphi}_2(0)<1$, 那么系统 (4) 的负半轨线 $(\overline{x}_t,\overline{y}_t)(t\le 0)$ 是无界的，这与解的有界性矛盾. 如果 $\overline{\varphi}_2(0)=1$, 则对所有的 $t\in R$, $\overline{x}(t)=0,\overline{y}(t)=1$. 这说明 $\overline{\varphi}=(0,1)=E_0\in\omega^*$.

下面证明 E_0 是孤立的 [34−36], 即在 G 中存在 E_0 的某个邻域 U 使得 E_0 是 U 的最大不变集. 事实上，选取

$$U=\{\varphi\mid\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in\overline{G},\ \ \|\varphi-E_0\|<\varepsilon\},$$

其中 ε 是充分小的正常数，且满足 $\varepsilon<\frac{a-1}{b+a-1}$. 我们将证明对充分小的 ε, E_0 是 U 的最大不变集. 如果 E_0 不是孤立的，则对充分小的 ε, 存在某个不变集 $W(W\subset U)$ 使得 $W\backslash E_0$ 是非空的. 设 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in W\backslash E_0$, 且 (x_t,y_t) 是系统 (4) 满足初始条件 φ 的解. 从而，对所有的 $t\in R$, $(x_t,y_t)\in W$.

如果 $\varphi_1(0)=0$, 则由注 1 和 W 的不变性, 我们可以推出 $\varphi=E_0$ 或负半轨线 $(x_t,y_t)(t<0)$ 无界的矛盾. 如果 $\varphi_1(0)>0$, 则由注 1 知，对所有的 $t\ge 0$, $x(t)>0$. 下面考虑连续函数

$$P(t)=x(t)+\rho\int_{t-\tau}^{t}x(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\rho>1$ 是待定常数. 又因 $(x_t,y_t)\in U(t\in R)$, 则有 $1-\varepsilon\le y(t)\le 1$, $0\le x(t)\le\varepsilon(t\in R)$. 因而，当 $t\ge 0$ 时， $P(t)$ 沿解 $(x(t),y(t))$ 的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{P}(t)&=\dot{x}(t)+\rho(x(t)-x(t-\tau))\\&=(\rho-1)x(t)+\Big(\frac{ay(t-\tau)}{bx(t-\tau)+y(t-\tau)}-\rho\Big)x(t-\tau)\\&\ge(\rho-1)x(t)+\Big(\frac{a(1-\varepsilon)}{bx(t-\tau)+1-\varepsilon}-\rho\Big)x(t-\tau)\\&\ge(\rho-1)x(t)+\Big(\frac{a(1-\varepsilon)}{b\varepsilon+1-\varepsilon}-\rho\Big)x(t-\tau).\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon<\frac{a-1}{b+a-1}$, 则 $\frac{a(1-\varepsilon)}{b\varepsilon+1-\varepsilon}>1$, 故可选取 $\rho>1$ 使其满足

$$1<\rho<\frac{a(1-\varepsilon)}{b\varepsilon+1-\varepsilon}.$$

因而，对任意的 $t\ge 0$, 有

$$\dot{P}(t)\ge(\rho-1)x(t)>0. \tag{23}$$

由定理 5.1, 存在某个常数 η (可能与解 $(x(t), y(t))$ 有关) 和充分大的 t_1，使得当 $t \geq t_1 > 0$ 时，有 $x(t) \geq \eta > 0$ 成立．于是，由 (23) 可知对所有的 $t \geq t_1$, 有

$$\dot{P}(t) \geq (\rho - 1)\eta > 0.$$

进而，由上式易知，当 $t \to +\infty$ 时，$P(t) \to +\infty$，这与定理 2.1 中系统解的有界性矛盾．因此，E_0 是孤立的．

显然，由系统 (4) 的解定义的半群满足文 [36] 中引理 4.3 的条件．因此，由文 [36] 的引理 4.3, 存在某个 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, 使得 $\xi \in \omega^* \cap (W^s(E_0) \backslash E_0)$, 其中 $W^s(E_0)$ 表示 E_0 的稳定集．

如果 $\xi_1(0) = 0$, 则由注 1 和 W 的不变性，我们可以推出 $\xi = E_0$ 或负半轨线 $(\widehat{x}_t, \widehat{y}_t)(t < 0)$ 无界的矛盾．如果 $\xi_1(0) > 0$, 则由注 1 知对所有的 $t > 0$, $\widehat{x}(t) > 0$, $\widehat{y}(t) > 0$. 由 $\xi \in \omega^* \cap (W^s(E_0) \backslash E_0)$ 得 $\lim\limits_{t \to +\infty} \widehat{x}(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \widehat{y}(t) = 1$, 这与定理 5.1 矛盾．定理证毕．

6 结 论

考虑到一些生物学意义，本文主要研究了具有时滞和变消耗率的比率确定型 Chemostat 系统模型 (4)(即 (3)). 若这类动力系统模型中时滞为零，即系统中不含有时滞而退化为常微分系统 (即 (2)) 时，其解的定性性质以及系统的持久性在文 [12] 中得到了细致的研究．本文对于时滞系统模型 (4) 的研究 (定理 3.1, 定理 4.1) 表明时滞 τ 的引入对于系统边界平衡点的局部与全局渐近形态并没有本质上的影响，即时滞是无害的 (Harmless). 然而，时滞 τ 的引入对系统正平衡点的局部渐近形态并非总是无害的，即在一些情况之下时滞可以破坏系统的稳定性，进而产生一系列的分支周期解 (定理 3.2). 对于系统 (4) 的持久性研究 (定理 5.2) 表明只要系统 (4) 存在正平衡点，那么，时滞 τ 对于系统的持久性仍然是无害的．从系统 (3) 的生物学意义考虑，系统 (4) 边界平衡点的全局稳定性 (定理 4.1) 以及系统 (4) 的持久性 (定理 5.2) 表明参数 a 的取值范围完全确定了微生物连续培养的成功与否，即若 $a \leq 1$, 则微生物的连续培养不会成功，且随着时间的推移，培养出来的微生物密度最终将趋近于零．若 $a > 1$, 则微生物的连续培养是成功的，即随着时间的推移，最终总有一定数量的微生物会连续不断地培养出来．这里需要指出的一点是对于系统 (4) 正平衡点的全局渐近形态的研究仍然是一个值得继续探讨的问题, 这一点无疑在理论上是重要的, 且具有更为深刻的生物学意义．

参 考 文 献

[1] Beretta E and Takeuchi Y. Qualitative properties of Chemostat equation with time delays: Boundedness, local and global asymptotic stability. *Diff. Eqns. Dyn. Sys.*, 1994, **2**: 19–40.
[2] 陈兰荪，陈键．非线性生物动力系统．北京：科学出版社， 1993.
[3] 陈兰荪．非线性生物动力系统讲义．福州：福建师范大学， 2005.
[4] Smith H L and Waltman P. The Theory of the Chemostat: Dynamics of Microbial Competition. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[5] 付桂芳，马万彪．由微分方程所描述的微生物连续培养动力系统 (I,II). 微生物学通报， 2004, **31**: 128–131; 136–139.

[6] Fu G, Ma W and Ruan S. Qualitative analysis of a Chemostat model with inhibitory exponential substrate uptake. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **23**: 873–886.

[7] Crooke P S, Wei C J and Tanner R D. The effect of the specific growth rate and yield expressions on the existence of oscillatory behavior of a continuous fermentation model. *Chem. Eng. Comm.*, 1980, **6**: 333–339.

[8] 刘婧，郑斯宁． Chemostat 系统中的 Hopf 分支．大连理工大学学报， 2002, **42**: 387–390.

[9] Pilyugin S S and Waltman P. Multiple limit cycles in the Chemostat with variable yield. *Math. Biosci.*, 2003, **182**: 151–166.

[10] 宋国华，李秀琴，窦家维，贺庆棠． Chemostat 系统中 Hopf 分支的存在性．系统科学与数学， 2001, **21**: 486–490.

[11] 宋国华，李秀琴．具有非常数消耗率的 Chemostat 系统解的稳定性．生物数学学报， 1999, **14**: 24–27.

[12] Sun S and Chen L. Asymptotic behavior in the ratio-depedent Chemostat model with variable yield. *J. Dalian Univ. of Tech.*, 2007, **47**: 931–936.

[13] 邱志鹏，王稳地，邹云．双营养 Chemostat 模型周期解的全局吸引性．生物数学学报， 2000, **15**: 388–398.

[14] 孙丽华，宋炳辉，修志龙．微生物连续培养过程中动态行为研究．大连理工大学学报， 2003, **43**: 53–57.

[15] 阮士贵．恒化器模型的动力学．华中师范大学学报， 1993, **31**: 377–397.

[16] 陆志奇．具有时滞再生养分竞争系统的全局稳定性．生物数学学报， 1999, **14**: 275–280.

[17] Ellermeyer S. Competition in the Chemostat: Asymptotic behavior of a model with delayed response in growth. *SIAM J. Appl. Math.*, 1994, **54**: 456–465.

[18] Caperon J. Time lag in population growth response of dsochryvis galana to a variable nitrate environment. *Ecology*, 1969, **50**: 188–192.

[19] El-Owaidy H M and Moniem A A. Global asymptotic behavior of a Chemostat model with delayed response in growth. *J. Appl. Math. Comp.*, 2004, **47**: 147–161.

[20] Li X, Pan J and Huang Q. Hopf bifurcation analysis of some modified Chemostat models. *Northeast. Math. J.*, 1998, **14**: 392–400.

[21] Yuan S, Han M and Ma Z. Competition in the Chemostat: Convergence of a model with delayed response in growth. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, **17**: 659–667.

[22] He X, Ruan S and Xia H. Global stability in Chemostat-type equations with distributed delays. *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**: 681–696.

[23] 蒋里强，王桂花，程汉文，景耀杰．一类带时滞营养循环的竞争恒化器模型的全局稳定性．工程数学学报， 2004, **21**: 753–760.

[24] Jiang L, Ma Z and Fergola P. The global stability of a competing Chemostat model with delayed nutrient recycling. *J. Sys. Sci. and Complexity*, 2005, **18**: 19–26.

[25] 马永峰，孙丽华，修志龙．微生物培养过程中振荡的理论分析．工程数学学报， 2003, **20**: 1–6.

[26] Wang K and Fan A. Permanence of prey in a predator-prey Chemostat model. *J. Southwest China Normal Univ.*, 2001, **26**: 67–78.

[27] Zhao T. Global periodic solutions for a differential delay system modeling a microbial population in the Chemostat. *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, **193**: 329–352.

[28] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. San Diego: Academic Press, 1993.

[29] 庞国萍，陈兰荪．比例确定增长率 Chemostat 模型的全局稳定性．广西师范大学学报， 2006, **24**: 37–40.

[30] 秦元勋，刘永清，王联．带有时滞的动力系统的运动稳定性．北京：科学出版社， 1963.

[31] 郑祖庥．泛函微分方程理论．合肥：安徽教育出版社， 1994.

[32] Hale J K. Therory of Functional Differential Equation. New York: Springer, 1977.

[33] Lakshmikantham V and Leela G S. Differential and Integral Inequalities, Vol. I and II. New York: Academic Press, 1969.

[34] Ma W, Takeuchi Y, Hara T and Beretta E. Permanence of an SIR epidemic model with distributed time delays. *Tohoku Math. J.*, 2002, **54**: 581–591.
[35] Butler G, Freedman H I and Waltman P. Uniformly persistent systems. Proc. Amer. Math. Soc., 1986, **96**: 425–430.
[36] Hale J K and Waltman P. Persistence in infinite-dimensional systems. *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, **20**: 388–395.

STABILITY ANALYSIS OF A RATIO-DEPENDENT CHEMOSTAT MODEL WITH VARIABLE YIELD AND TIME DELAY

DONG Qinglai

(*Department of Mathematics and Mechanics, School of Applied Science University of Science and Technology Beijing, Beijing* 100083;
School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000)

MA Wanbiao

(*Department of Mathematics and Mechanics, School of Applied Science University of Science and Technology Beijing, Beijing* 100083)

Abstract In this paper, based on some biological meanings, a class of ratio-dependent Chemostat model with variable yield and time delay is considered. In the Chemostat model, time delay is introduced into growth response of microbial population. Firstly, a detailed theoretical analysis about existence and boundedness of the solutions and local asymptotic stability of the equilibria are carried out, and the Hopf bifurcation is also studied. Then by using classical Lyapunov-LaSalle invariance principle, it is shown that the washout equilibrium (i.e., boundary equilibrium) is globally asymptotically stable for any time delay. Finally, it is shown that the Chemostat model is uniformly persistent for any time delay.

Key words Chemostat, time delay, stability, Hopf bifurcation, Lyapunov-LaSalle invariance principle, permanence.