系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(7) (2008, 7), 886–896

某个单点值给定的 Copula 最优界的不可交换性度量

董 永 权
(唐山师范学院数学与信息科学系， 唐山 063000)

苏 红 顺
(河北师范大学数学与信息科学学院， 石家庄 050016)

徐 付 霞
(唐山师范学院数学与信息科学系， 唐山 063000)

摘要 通过研究某个单点值给定的 Copula(相关结构函数) 的最佳上下界的不可交换性度量, 构造了 4 个奇异的 Copula, 它们具有最大的不可交换性, 揭示了最大不可交换 Copula 的结构特点和性质. 定义了非径向对称和非联合对称意义下的随机变量的不可交换性, 指出对于 4 个最大不可交换的 Copula,3 种不可交换性度量是相同的. 另一方面, 研究了在一般的 L_P 距离定义下的不可交换性度量的计算公式，确定了其中的标准化系数 $k_p = 3^{p+1}(p+1)\frac{p+2}{4}$, 特别地 $k_1 = \frac{27}{2}$ 和 $k_2 = 81$ 的计算公式可以作为常用的不可交换性度量.

关键词 相关结构函数，不可交换随机变量，界，相关系数，距离.

MR(2000) 主题分类号 60E15

1 引 言

对称的随机变量在数理统计的许多领域包括极限理论，极值统计理论，贝叶斯统计和随机过程理论中都有重要作用. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $H(x,y)$, 边缘分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(y)$, 如果对任意的 $(x,y)\in R^2$ 都有 $H(x,y)=H(y,x)$, 则称随机变量 (X,Y) 是可交换 (对称) 的；若 $H(x,y)\neq H(y,x)$, 称随机变量 (X,Y) 是不可交换的. 进一步，令 (X,Y) 的相关结构函数 (Copula) 为 $C(u,v),(u,v)\in I^2, I=[0,1]$, 那么有 $H(x,y)=C(F(x),G(y))$, 如果 (X,Y) 是连续型随机变量，且它们的边缘分布函数 $F(x)$ 和 $G(y)$ 相同，则 $H(x,y)=H(y,x)$ 的充要条件是 $C(u,v)=C(v,u)$. 文 [1] 研究了可交换的随机变量的性质和应用，文 [2] 讨论了边缘分布函数相同，但不可交换的随机变量的度量和性质，其度量的定义是基于上述的不可交换性理论和 $C(u,v)$ 到 $C(v,u)$ 的 L_∞ 距离意义

收稿日期：2005-12-12, 收到修改稿日期：2007-04-17.

上的，即用 $\delta_{XY}=\delta_C=3\sup\limits_{u,v\in I}|C(u,v)-C(v,u)|$ 作为随机变量的不可交换性度量，其中 3 是使得 δ_C 最大为 1 的标准化系数．本文通过研究某个单点值给定的 Copula 的最佳上下界："M 的拖曳"[3] $C_U(u,v)=M(4,\{[0,\theta],[\theta,a],[a,a+b-\theta],[a+b-\theta,1]\},(1,3,2,4),1)$ 和 $C_L(u,v)=M(4,\{[0,a-\theta],[a-\theta,a],[a,1-b+\theta],[1-b+\theta,1]\},(4,2,3,1),-1)$ 的不可交换性的度量，揭示了最大不可交换 Copula 的结构特点和性质．进一步，引进非径向对称和非联合对称的定义，讨论了 3 种不可交换性度量的相似性．另一方面，研究了在一般的 L_P 距离意义下的不可交换性度量的计算公式．

研究某个单点值给定时的 Copula 具有重要意义，例如 Blomqvist's 中位相关系数 β: $\beta=\beta_{X,Y}=P[(X-\widetilde{x})(Y-\widetilde{y})>0]-P[(X-\widetilde{x})(Y-\widetilde{y})<0]$, 这里 $\widetilde{x}$ 和 $\widetilde{y}$ 分别是随机变量 X 和 Y 的中位数．如果设 X 和 Y 是连续型随机变量，联合分布函数为 H, 边缘分布函数分别是 F 和 G, 相关结构为 C, 那么 $F(\widetilde{x})=G(\widetilde{y})=\frac{1}{2}$, 而且有 $\beta=4H(\widetilde{x},\widetilde{y})-1=4C(\frac{1}{2},\frac{1}{2})-1$. 即 Blomqvist's β 仅由 Copula 在其定义域 I^2 的中心点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的值决定．进一步，由 β 还可以求 Kendall's τ 和 Spearman's ρ 秩相关系数的近似值．

2　C_U 和 C_L 的不可交换性度量

任意一个 Copula $C(u,v),(u,v)\in I^2$, 都满足有界性，即有下式成立

$$\max(u+v-1,0)\le C(u,v)\le\min(u,v),\tag{1}$$

其中 $W(u,v)=\max(u+v-1,0),M(u,v)=\min(u,v)$ 分别称为 Fréchet–Hoeffding 上下界，它们本身也是 Copula. 但是如果 $C(u,v)$ 在某个单点的值是给定的，它的 Fréchet–Hoeffding 界要变窄，也就是下面定理所描述的．

定理 1[4]　设 $C(u,v)$ 是一个 Copula, 若对 I^2 上的一点 (a,b) 有 $C(a,b)=\theta$, 而且 θ 满足 $\max(a+b-1,0)\le\theta\le\min(a,b)$ 则有

$$C_L(u,v)\le C(u,v)\le C_U(u,v),\tag{2}$$

因为 $C_L(a,b)=C_U(a,b)=\theta$, 所以 C_L 和 C_U 是最优的上下界．

例如，设 X 和 Y 是分布函数为 F 和 G 的连续型随机变量，其联合分布函数为 H, 相关结构 Copula 为 C, 并且已知 $C(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\theta$. 那么由定理 1 可得这样的 Copula $C(u,v)$ 满足 $C_L(u,v)\le C(u,v)\le C_U(u,v)$, 其中

$$C_U(u,v)=M\Big(4,\Big\{[0,\theta],\Big[\theta,\frac{1}{2}\Big],\Big[\frac{1}{2},1-\theta\Big],[1-\theta,1]\Big\},(1,3,2,4),1\Big),$$

$$C_L(u,v)=M\Big(4,\Big\{\Big[0,\frac{1}{2}-\theta\Big],\Big[\frac{1}{2}-\theta,\frac{1}{2}\Big],\Big[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\theta\Big],\Big[\frac{1}{2}+\theta,1\Big]\Big\},(4,2,3,1),-1\Big).$$

为了比较其 Fréchet–Hoeffding 界的变化情况，我们定义函数

$$m(\theta)=6\int\int_{I^2}\big[\overline{A}_\theta(u,v)-\underline{A}_\theta(u,v)\big]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

来表示其 Fréchet–Hoeffding 界的宽窄程度．其中 $\overline{A}_\theta$ 和 $\underline{A}_\theta$ 是集合

$$A_\theta=\Big\{C|C\text{ 是一个 Copula, }C\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=\theta\Big\}$$

的上下界. 当 Fréchet–Hoeffding 界没有改善时, 即 $\underline{A}_\theta = W$, $\overline{A}_\theta = M$ 时 $m(\theta) = 1$; 当上下界重合时, $m(\theta) = 0$; 对于 $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ 有 $m(\theta) = \frac{1-36\theta^2+18\theta}{4}$, 具体计算结果如下表.

θ	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$m(\theta)$	0.25	0.45	0.61	0.72	0.79	0.81	0.79	0.72	0.61	0.45	0.25

下面研究 C_U 和 C_L 的不可交换性度量, 首先给出这两个 Copula 的其它数学表达式

$$C_U(u,v) = \min(u, v, \theta + (u-a)^+ + (v-b)^+) \tag{3}$$

$$= \begin{cases} \min(u, v, \theta), & (u,v) \in [0,a] \times [0,b], \\ \min(u, v-b+\theta), & (u,v) \in [0,a] \times [b,1], \\ \min(u-a+\theta, v), & (u,v) \in [a,1] \times [0,b], \\ \min(u, v, u-a+v-b+\theta), & (u,v) \in [a,1] \times [b,1]. \end{cases} \tag{4}$$

$$C_L(u,v) = \max(0, u+v-1, \theta - (a-u)^+ - (b-v)^+) \tag{5}$$

$$= \begin{cases} \max(0, u-a+v-b+\theta), & (u,v) \in [0,a] \times [0,b], \\ \max(0, u+v-1, u-a+\theta), & (u,v) \in [0,a] \times [b,1], \\ \max(0, u+v-1, v-b+\theta), & (u,v) \in [a,1] \times [0,b], \\ \max(\theta, u+v-1), & (u,v) \in [a,1] \times [b,1]. \end{cases} \tag{6}$$

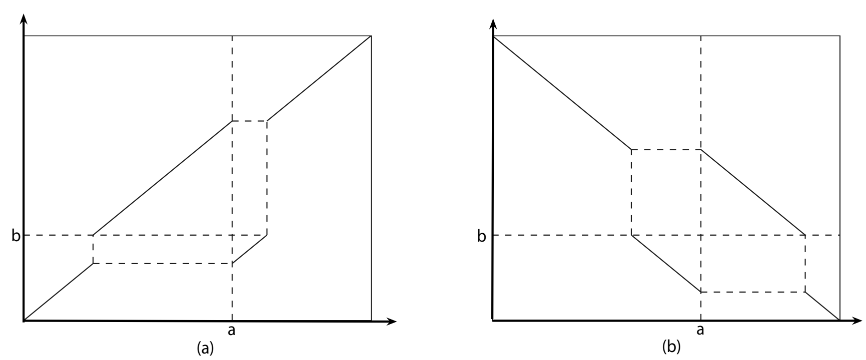

图 1 C_U 和 C_L 的支撑

其中 $x^+ = \max(o, x)$, 其支撑如图 1 中的 (a) 和 (b), 关于它们的不可交换性有如下主要结论.

定理 2 设 $C_U(u,v)$ 和 $C_L(u,v)$ 是由 (3) 和 (5) 式定义的 Copula, 那么有

$$\sup_{u,v \in I} |C_U(u,v) - C_U(v,u)| = \min\{|a-b|, a-\theta, b-\theta\}, \tag{7}$$

$$\sup_{u,v\in I}|C_L(u,v)-C_L(v,u)|=\min\{|a-b|,\theta\}. \tag{8}$$

证　只证明 (7) 式，(8) 式可类似证明.

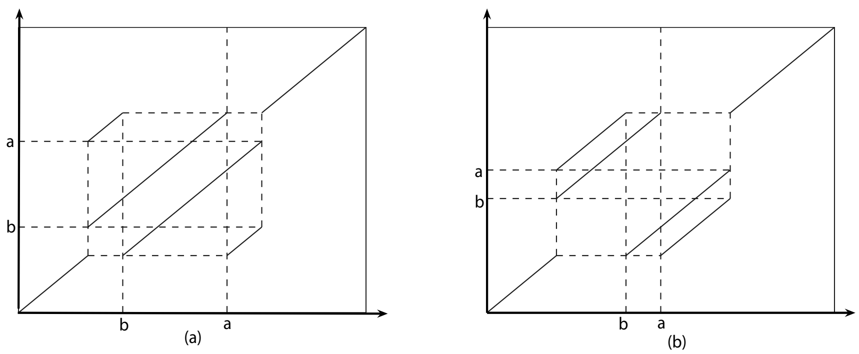

图 2　$C_U(u,v)-C_U(v,u)$ 的支撑

假设 $b-\theta\le a-b\le a-\theta$, 其支撑如图 2($a$) 所示，如果点 (u,v) 落入矩形区域 $[0,b]^2$, $[a,1]^2$, $[b,a]\times[0,\theta]$, $[b,a]\times[a+b-\theta,1]$, $[0,\theta]\times[b,a]$ 和 $[a+b-\theta,1]\times[b,a]$ 以及五边形区域 $[0,b]\times[\max(a,u+(a-\theta)),1]$ 和 $[a,1]\times[0,\min(b,u-(a-\theta))]$ 内，均有 $C_U(u,v)=C_U(v,u)$, 即 $|C_U(u,v)-C_U(v,u)|$=0. 其它情况分析如下

1) 点 (u,v) 落在两线段 $v=u+(a-\theta),u\in[\theta,b]$ 和 $v=u+(b-\theta),u\in[\theta,a]$ 所夹的区域内时：

i) 当 $\theta\le u\le b$, $a\le v\le u+(a-\theta)$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|u-(v-a+\theta)|=u-(v-a+\theta)\le b-(a-a+\theta)=b-\theta;$$

ii) 当 $\theta\le u\le b$, $u+(b-\theta)\le v\le a$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|u-\theta|=u-\theta\le b-\theta;$$

iii) 当 $b\le u\le a-(b-\theta)$, $u+(b-\theta)\le v\le a$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|u-(u-b+\theta)|=b-\theta;$$

iv) 当 $b\le u\le a$, $\max\{a,u+(b-\theta)\}\le v\le a+b-\theta$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|u-(u-a+v-b+\theta)|=(a+b-\theta)-v\le(a+b-\theta)-a=b-\theta.$$

2) 点 (u,v) 落在两线段 $v=u+(b-\theta),u\in[\theta,a]$ 和 $v=u-(b-\theta),u\in[b,a+b-\theta]$ 所夹的区域内时：

i) 当 $\theta\le u\le b$, $b\le v\le u+(b-\theta)$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(v-b+\theta)-\theta|=v-b\le(2b-\theta)-b=b-\theta;$$

ii) 当 $b\le u\le a$, $\max\{b,u-(b-\theta)\}\le v\le\min\{a,u+(b-\theta)\}$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(v-b+\theta)-(u-b+\theta)|=|v-u|\le b-\theta;$$

iii) 当 $a-(b-\theta)\le u\le a,\ a\le v\le u+(b-\theta)$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(v-b+\theta)-(u-a+v-b+\theta)|=a-u\le a-(a-b+\theta)=b-\theta;$$

iv) 当 $b\le u\le 2b-\theta,\ u-(b-\theta)\le v\le b$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|\theta-(u-b+\theta)|=u-b\le(2b-\theta)-b=b-\theta;$$

v) 当 $a\le u\le a+b-\theta,\ u-(b-\theta)\le v\le a$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(u-a+v-b+\theta)-(u-b+\theta)|=a-v\le a-(a-(b-\theta))=b-\theta.$$

3) 点 (u,v) 落在两线段 $v=u-(b-\theta),u\in[b,a+b-\theta]$ 和 $v=u-(a-\theta),u\in[a,a+b-\theta]$ 所夹的区域内时：

i) 当 $b\le u\le a,\ \theta\le v\le\min\{b,u-(b-\theta)\}$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|\theta-v|=v-\theta\le b-\theta;$$

ii) 当 $2b-\theta\le u\le a,\ b\le v\le u-(b-\theta)$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(v-b+\theta)-v|=b-\theta;$$

iii) 当 $a\le u\le a+b-\theta,\ b\le v\le u-(b-\theta)$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(u-a+v-b+\theta)-v|=(a+b-\theta)-u\le(a+b-\theta)-a=b-\theta;$$

iv) 当 $a\le u\le a+b-\theta,\ u-(a-\theta)\le v\le b$ 时，

$$|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=|(u-a+\theta)-v|=(a-\theta)-(u-v)\le(a-\theta)-(a-b)|=b-\theta.$$

综上有 $\sup\limits_{u,v\in I}|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=b-\theta$. 同理可证：当 $a-\theta\le b-a\le b-\theta$ 时，$\sup\limits_{u,v\in I}|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=a-\theta$. 对于 $a-b\le b-\theta\le a-\theta$, 其支撑如图 2(b), 此时两线段 $v=u+(b-\theta),u\in[\theta,a]$ 和 $v=u-(b-\theta),u\in[b,a+b-\theta]$ 之间的距离将变大，它们均离开正方形区域 $[b,a]^2$, 这样上面证明中所划分的 13 个小区域将有所改变，仍然分 3 种情况讨论即可得到 $\sup\limits_{u,v\in I}|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=a-b$. 最后对于 $b-a\le a-\theta\le b-\theta$, 类似 $a-b\le b-\theta\le a-\theta$ 时的讨论，可得 $\sup\limits_{u,v\in I}|C_U(u,v)-C_U(v,u)|=b-a$. (7) 式得证.

对 $C_U(u,v)$ 取 $a=\frac{1}{3}\,(\frac{2}{3}),\ b=\frac{2}{3}\,(\frac{1}{3}),\ \theta=0$: 对 $C_L(u,v)$ 取 $a=\frac{1}{3}\,(\frac{2}{3}),\ b=\frac{2}{3}\,(\frac{1}{3}),\ \theta=\frac{1}{3}$ 将得到 4 个最大的不可交换的 Copula. 为了说明这个问题，引进下面的定理.

定理 3[2] 对任意的 Copula C 和任意的 $u,v\in I$ 有

$$|C(u,v)-C(v,u)|\le\min\{u,v,1-u,1-v,|u-v|\}. \tag{9}$$

当 $u\le v$ 时 (9) 式将变成 $|C(u,v)-C(v,u)|\le\min\{u,1-v,v-u\}$, 其中 $\min\{u,1-v,v-u\}$ 在点 $(u,v)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 处达到最大值 $\frac{1}{3}$, 同理当 $v\le u$ 时，(9) 式右边在点 $(u,v)=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ 处达到最大值 $\frac{1}{3}$. 所以有 $|C(u,v)-C(v,u)|\le\frac{1}{3}$.

推论　下面 4 个特殊的 Copula 具有最大的不可交换性度量.

$$C_1(u,v)=\min\left(u,v,\left(u-\frac{2}{3}\right)^+ + \left(v-\frac{1}{3}\right)^+\right), \tag{10}$$

$$C_2(u,v)=\min\left(u,v,\left(u-\frac{1}{3}\right)^+ + \left(v-\frac{2}{3}\right)^+\right), \tag{11}$$

$$C_3(u,v)=\max\left(0,u+v-1,\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}-u\right)^+ - \left(\frac{2}{3}-v\right)^+\right), \tag{12}$$

$$C_4(u,v)=\max\left(0,u+v-1,\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-u\right)^+ - \left(\frac{1}{3}-v\right)^+\right). \tag{13}$$

证　$C_1(u,v)$ 就是 $C_U(u,v)$ 当 $\theta=0$, $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 时的特殊情况，其支撑见图 3(a): $C_2(u,v)$ 是 $C_U(u,v)$ 当 $\theta=0$, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$ 时的特殊情况，其支撑见图 3(b): $C_3(u,v)$ 是 $C_L(u,v)$ 当 $\theta=\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$ 时的特殊情况，其支撑见图 3(c): $C_4(u,v)$ 是 $C_L(u,v)$ 当 $\theta=\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 时的特殊情况，其支撑见图 3(d).

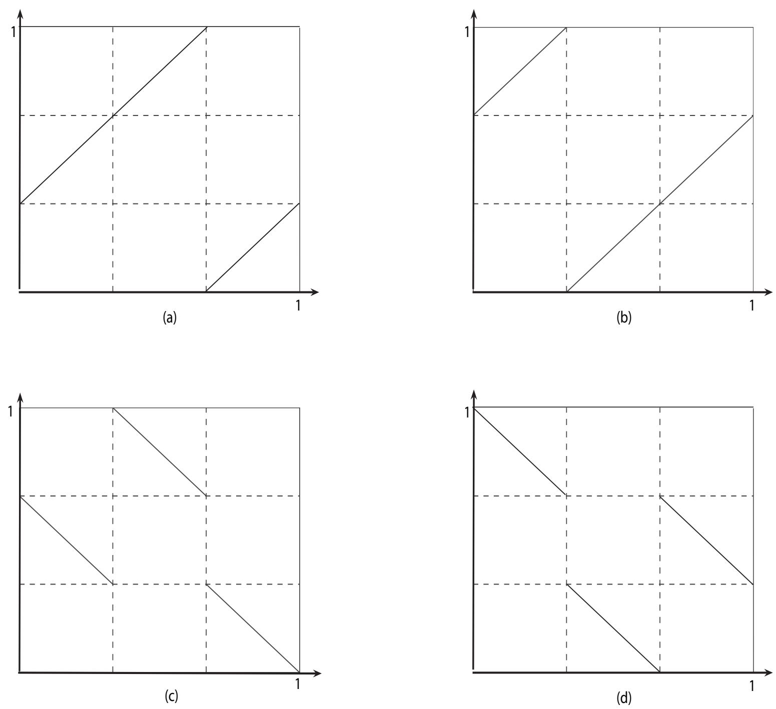

图 3　4 个最大不可交换 Copula 的支撑

由定理 2 知 $\sup\limits_{u,v}|C_i(u,v)-C_i(v,u)|=\frac{1}{3}$, 而且 $|C_i(\frac{1}{3},\frac{2}{3})-C_i(\frac{2}{3},\frac{1}{3})|=\frac{1}{3}$ $(i=1,2,3,4)$, 再由定理 3 知它们是最大的不可交换的 Copula, 即满足 $\delta_C=3\sup\limits_{u,v\in I}|C(u,v)-C(v,u)|=1$.

不仅如此，在下面对最大不可交换 Copula 的性质的分析中，这 4 个 Copula 起着非常重要的作用.

3 最大不可交换 Copula 的性质

进一步研究上节推论介绍的 4 个 Copula, 可以算得

$$C_1\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{3},\quad C_1\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)=0;\quad C_2\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)=0,\quad C_2\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{3};$$

$$C_3\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)=\frac{1}{3},\quad C_3\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)=0;\quad C_4\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)=0,\quad C_4\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{3}.$$

定理 4 设 C 是任意一个最大的不可交换 Copula, 有

1) i) $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$, $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=0$ 或 ii) $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=0$, $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$ 成立；

2) 若 C 满足 i), 则 $C_3\prec C\prec C_1$; 若 C 满足 ii), 则 $C_4\prec C\prec C_2$.

证 1) 如果 C 是最大的不可交换的 Copula, 则一定存在点 $(u_0,v_0)\in I^2$(无妨设 $u_0\leq v_0$) 使得 $|C(u_0,v_0)-C(v_0,u_0)|=\frac{1}{3}$, 由定理 3 得 $\min(u_0,1-v_0,v_0-u_0)=\frac{1}{3}$ 即 $u_0=\frac{1}{3},v_0=\frac{2}{3}$, 又由 Copula 的有界性 (式 (1)) 知 $0\leq C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\leq\frac{1}{3}$, $0\leq C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\leq\frac{1}{3}$, 所以只有 $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$, $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=0$ 或 $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=0$, $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$ 成立，当 $u_0\geq v_0$ 时可同理讨论.

2) 显然 C_1, C_3 均满足 i), 由定理 1, C_1, C_3 分别是满足 $C(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=\frac{1}{3}$, $C(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=0$ 的 Copula 的最优上、下界，即有 $C_3\prec C\prec C_1$, 同理可证 $C_4\prec C\prec C_2$.

下面讨论最大不可交换 Copula 的一致性度量，本文拟采用计算 C_U 和 C_L 的 Kendall's τ 和 Spearman's ρ 得到 C_i $(i=1,2,3,4)$ 的两种秩相关系数，而且可以得到一般 Copula 的两种秩相关系数的界.

定理 5 设 X,Y 是最大的不可交换的连续型随机变量, 对应的 Copula 为 C, τ_{XY} 和 ρ_{XY} 分别表示 X,Y 的 Kendall's τ 和 Spearman's ρ 秩相关系数, 则 $\tau_{XY}\in[-\frac{5}{9},\frac{1}{9}]$, $\rho_{XY}\in[-\frac{5}{9},-\frac{1}{3}]$.

证 (参考图 1)

$$\begin{aligned}\tau_{C_U}&=4\int\int_{I^2}C_U(u,v)\mathrm{d}C_U(u,v)-1\\&=4\Big(\int_0^{\theta}u\mathrm{d}u+\int_{\theta}^{a}u\mathrm{d}u+\int_a^{a+b-\theta}(u-a+\theta)\mathrm{d}u+\int_{a+b-\theta}^{1}u\mathrm{d}u\Big)-1\\&=-4\theta^2+4(a+b)\theta-4ab+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{C_L}&=4\int\int_{I^2}C_L(u,v)\mathrm{d}C_L(u,v)-1\\&=4\Big(\int_0^{a-\theta}0\mathrm{d}u+\int_{a-\theta}^{a}0\mathrm{d}u+\int_a^{1-b+\theta}\theta\mathrm{d}u+\int_{1-b+\theta}^{1}0\mathrm{d}u\Big)-1\\&=4\theta(1-b-a+\theta)-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{C_U} &= 12\int\int_{I^2} uv\mathrm{d}C_U(u,v)) - 3\\ &= 12\Big(\int_0^\theta u^2\mathrm{d}u + \int_\theta^a u(u+b-\theta)\mathrm{d}u + \int_a^{a+b-\theta} u(u-a+\theta)\mathrm{d}u + \int_{a+b-\theta}^1 u^2\mathrm{d}u\Big) - 3\\ &= 6(\theta-a)(\theta-b)(2\theta-a-b)+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_{C_L} &= 12\int\int_{I^2} uv\mathrm{d}C_L(u,v) - 3\\ &= 12\Big(\int_0^{a-\theta} u(1-u)\mathrm{d}u + \int_{a-\theta}^a u(a+b-\theta-u)\mathrm{d}u + \int_a^{1-b+\theta} u(1+\theta-u)\mathrm{d}u\\ &\qquad + \int_{1-b+\theta}^1 u(1-u)\mathrm{d}u\Big) - 3\\ &= 6\theta(1-a-b+2\theta)(1-a-b+\theta)-1.\end{aligned}$$

将 $a=\frac{2}{3}\,(\frac{1}{3}),\, b=\frac{1}{3}\,(\frac{2}{3}),\, \theta=0$ 代入 τ_{C_U} 和 ρ_{C_U} 的表达式得

$$\tau_{C_1} = \frac{1}{9}\Big(\tau_{C_2} = \frac{1}{9}\Big),\quad \rho_{C_1} = -\frac{1}{3}\Big(\rho_{C_2} = -\frac{1}{3}\Big).$$

将 $a=\frac{1}{3}\,(\frac{2}{3}),\, b=\frac{2}{3}\,(\frac{1}{3}),\, \theta=\frac{1}{3}$ 代入 τ_{C_L} 和 ρ_{C_L} 的表达式得

$$\tau_{C_3} = -\frac{5}{9}\Big(\tau_{C_4} = -\frac{5}{9}\Big),\quad \rho_{C_3} = -\frac{5}{9}\Big(\rho_{C_4} = -\frac{5}{9}\Big).$$

由于当 $C \prec C'$ 时，有 $\tau(C) \le \tau(C'),\, \rho(C) \le \rho(C')$ 成立，再由定理 4 知结论成立.

进一步，将 $a=\frac{1}{2},\, b=\frac{1}{2}$ 代入得

$$\begin{aligned}\tau_{C_U} &= -4\theta^2+4\theta = 1-\frac{1}{4}(1-\beta)^2,\\ \tau_{C_L} &= 4\theta^2-1 = \frac{1}{4}(\beta+1)^2-1,\\ \rho_{C_U} &= 6\Big(\frac{1}{2}-\theta\Big)^2(2\theta-1)+1 = 1-\frac{3}{16}(1-\beta)^3,\\ \rho_{C_L} &= 12\theta^3-1 = \frac{3}{16}(\beta+1)^3-1,\end{aligned}$$

其中 $\beta = 4C(\frac{1}{2},\frac{1}{2})-1 = 4\theta-1$ 是 Blomqvist's 中位相关系数. 再由定理 1 可得到一般 Copula 的两种秩相关系数的界

$$\frac{1}{4}(1+\beta)^2-1 \le \tau \le 1-\frac{1}{4}(1-\beta)^2, \tag{14}$$

$$\frac{3}{16}(1+\beta)^3-1 \le \rho \le 1-\frac{3}{16}(1-\beta)^3. \tag{15}$$

4 不可交换性的其它度量

上面研究的不可交换性理论是建立在一般的非对称理论和 L_∞ 距离上的，下面引进随机变量的另外两种非对称性 – 非径向对称和非联合对称来定义随机变量的不可交换性.

设 X,Y 是两个随机变量，点 $(a,b)\in R^2$, 如果随机变量 $(X-a,Y-b)$ 与 $(a-X,b-Y)$ 有相同的分布函数，则称随机变量 (X,Y) 关于点 (a,b) 径向对称；如果随机变量 $(X-a,Y-b),(X-a,b-Y),(a-X,Y-b)$ 和 $(a-X,b-y)$ 有相同的分布函数，则称随机变量 X,Y 关于点 (a,b) 联合对称. 设随机变量 X,Y 分别关于点 a,b 对称，它们的相关结构函数 (Copula) 为 C ，那么

1) (X,Y) 关于点 (a,b) 径向对称的充要条件是，对任意的 $(u,v)\in I^2$, 有

$$C(u,v)=\overline{C}(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v). \tag{16}$$

如果存在点 $(u,v)\in I^2$, 使得 $C(u,v)\neq\overline{C}(u,v)$, 则称随机变量 X,Y 或 Copula C 非径向对称；

2) (X,Y) 关于点 (a,b) 联合对称的充要条件是，对任意的 $(u,v)\in I^2$, 有

$$C(u,v)=u-C(u,1-v),\quad C(u,v)=v-C(1-u,v). \tag{17}$$

如果存在点 $(u,v)\in I^2$, 使得 $C(u,v)\neq u-C(u,1-v)$ 或 $C(u,v)\neq v-C(1-u,v)$ 则称随机变量 X,Y 或 Copula C 非联合对称.

可以验证，对于 (10)–(13) 式定义的 4 个最大不可交换的 Copula 有

$$\sup_{u,v\in I}|C_i(u,v)-\overline{C_i}(u,v)|=\left|C_i\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)-C_i\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)\right|=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3,4,$$

$$\sup_{u,v\in I}|C_j(u,v)-(u-C_j(u,1-v))|=\left|C_j\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)+C_j\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3},\quad j=1,3,$$

$$\sup_{u,v\in I}|C_j(u,v)-(v-C_j(1-u,v))|=\left|C_j\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)+C_j\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big)-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3},\quad j=1,3,$$

$$\sup_{u,v\in I}|C_k(u,v)-(u-C_k(u,1-v))|=\left|C_k\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)+C_k\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\Big)-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3},\quad k=2,4,$$

$$\sup_{u,v\in I}|C_k(u,v)-(v-C_k(1-u,v))|=\left|C_k\Big(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\Big)+C_k\Big(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\Big)-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3},\quad k=2,4.$$

可见，对这 4 个特殊的 Copula 而言， 3 种不可交换性度量是相同的，对于一般 Copula 的非径向对称和非联合对称性度量有待进一步的研究.

另一方面，可以用一般的 L_P 距离定义随机变量的不可交换性度量

$$\delta_C^p=\left(k_p\int_0^1\int_0^1|C(u,v)-C(v,u)|^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

其中 k_p 是使得 δ_C^p 最大为 1 的标准化系数，由定理 3 知 $k_\infty=3$ 是最大的距离计算公式.

下面研究 k_p, $1\le p<\infty$ 的取值：由距离的一般理论知，两个函数的距离在某一种距离定义下取值较大 (小) , 在另一种距离定义下取值仍然较大 (小). 对于推论给出的 4 个最大不

可交换的 Copula 而言，它们的不可交换性在 L_∞ 距离定义下达到最大，当然在一般的 L_P 距离定义下也达到最大．所以通过求解式 (10) 定义的 C_1(也可以是其它 3 个) 在 L_P 距离定义下的不可交换性度量，就可以确定标准化系数 k_p.

采用与定理 2 的证明相同的方法来求解 $\int_0^1\int_0^1|C_1(u,v)-C_1(v,u)|^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v$: 参考图 3(a)(b), 当点 (u,v) 落在矩形区域 $[0,\frac{1}{3}]^2$ 和 $[\frac{2}{3},1]^2$ 以及三角形区域 $[0,\frac{1}{3}]\times[u+\frac{1}{3},1]$ 和 $[\frac{2}{3},1]\times[0,u-\frac{2}{3}]$ 内时，$|C_1(u,v)-C_1(v,u)|=0$. 将剩余的区域分解成 12 个小三角形区域，求每个小三角形区域上的 $\int\int|C_1(u,v)-C_1(v,u)|^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 结果显示它们的积分值相同，所以有

$$\int_0^1\int_0^1|C_1(u,v)-C_1(v,u)|^p\mathrm{d}u\mathrm{d}v=12\Big(\int_0^{\frac{1}{3}}\Big(\int_{u+\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}u^p\mathrm{d}v\Big)\mathrm{d}u\Big)=\frac{4}{3^{p+1}(p+1)(p+2)}.$$

由此确定 (18) 式中的标准化系数为

$$k_p=\frac{3^{p+1}(p+1)(p+2)}{4}. \tag{19}$$

特别地 $k_1=\frac{27}{2}$(称为最小距离)，$k_2=81$(称为平方距离) 时的 δ_C^1 和 δ_C^2 可以作为常用的不可交换性度量.

作为应用，求解 $C_U(u,v)$ 在最小距离和平方距离下的不可交换性度量.

参考定理 2 的证明，只须将 3 大类的每一小区域 (共 13 个) 由原来的求 $\sup|C_U(u,v)-C_U(v,u)|$ 改为求 $\int\int|C_U(u,v)-C_U(v,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 或 $\int\int(C_U(u,v)-C_U(v,u))^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 即可．通过比较烦琐的积分运算求得结果如下 $(b-\theta\le a-b\le a-\theta)$

$$\int_0^1\int_0^1|C_U(u,v)-C_U(v,u)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=(a-b)(b-\theta)(a-\theta),$$

$$\int_0^1\int_0^1(C_U(u,v)-C_U(v,u))^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v=(a-b)^2(b-\theta)^2.$$

可见 $C_U(u,v)$ 在最小距离和平方距离下的不可交换性度量分别为

$$\delta_{C_U}^1=\frac{27}{2}|a-b|(b-\theta)(a-\theta),$$

$$\delta_{C_U}^2=9|a-b|(\min\{a,b\}-\theta).$$

参　考　文　献

[1] Galambos J. Exchangeability. *Encyclopedia of Statistical Science*, 1982, **2**: 573–577.

[2] Nelsen R B. Extremes of Nonexchangeability. *Statistical Papers*, 2007, **48**(2): 329–336.

[3] Mikusinski P. Shuffles of min. *Stochastica*, 1992, **15**: 61–74.

[4] Nelsen R B. An Introduction to Copulas. NewYork: Springer, 1999.

[5] Nelsen R B, Quesada Molina J J, Rodríguez Lallena J A and Úbeda Flores M. Bounds on bivariate distribution functions with given margins and measures of association. *Comm. Statist.-Theory Methods*, 2001, **30**: 1155–1162.

[6] Nelsen R B, Quesada Molina J J, Rodríguez Lallena J A and Úbeda Flores M. Best-possible bounds on sets of bivariate distribution functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 2004, **90**: 348–358.

[7] Nelsen R B and Úbeda–Flores M. A comparison of bounds on sets of joint distribution functions derived from various measurs of association. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 2004, **33**(10): 2299–2305.

NONEXCHANGEABLE DEGREES OF BEST-POSSIBLE BOUNDS FOR COPULAS SPECIFIED AT A SINGLE INTERIOR POINT

DONG Yongquan

(*Department of Mathematics and Information Science, Tangshan Normal College, Tangshan* 063000)

SU Hongshun

(*College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050016)

XU Fuxia

(*Department of Mathematics and Information Science, Tangshan Normal College, Tangshan* 063000)

Abstract The degrees of nonexchangeability about the best bounds of Copulas being specified at a single interior point are studied to construct four maximally nonexchangeable Copulas whose features and properties are studied as whell. Moreover this paper define non-radially and non-jointly symmetry about random variables and Copulas, and show that for the four Copulas the three nonexchangeable measures are equivelent. On the other hand, using L_P distance theory we calculate another nonexchangeable degree formulate whose normal coefficient is $k_p = 3^{p+1}(p+1)\frac{p+2}{4}$, in particular, the formulate with $k_1 = \frac{27}{2}$ or $k_2 = 81$ may be commonly used.

Key words Copulas, nonexchangeable random variables, correlation coefficient, bounds, distance.