系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(4) (2009, 4), 502–511

两类易感者具垂直传染和预防接种的 SIRS 传染病模型*

付 景 超
(东北电力大学理学院，吉林 132012; 东北大学信息科学与工程学院，沈阳 110004)
井 元 伟
(东北大学信息科学与工程学院，沈阳 110004)
张 中 华
(东北电力大学理学院，吉林 132012)
张 嗣 瀛
(东北电力大学理学院，吉林 132012; 东北大学信息科学与工程学院，沈阳 110004)

摘要 讨论了具有连续预防接种和脉冲预防接种且具有垂直传染的双线性 SIRS 传染病模型，分别给出了 SIRS 传染病模型基本再生数. 利用 Liapunov 函数方法和 LaSalle 不变原理证明了连续预防接种下无病平衡点和正平衡点的全局稳定性；利用脉冲微分方程的 Floquet 乘子理论和比较定理，证明了无病周期解的存在性和全局稳定性.

关键词 传染病模型，连续接种，脉冲接种，周期解，稳定性.

MR(2000) 主题分类号 92D30, 92D25

1 引 言

众所周知，传染病的传播规律和防治对策的研究是关系到国计民生的重大问题. 早在 1927 年， Kermark 和 Mckendrick 就利用动力学方法建立了传染病传播的基本数学模型 SIR 传染病模型，通过对这种数学模型的研究，提出了阈值理论，揭开了传染病数学模型研究的篇章. 近 20 多年来，国际上传染病动力学研究进展迅速，人们建立了大量的传染病数学模型，国内也有许多专家和学者在进行此类的研究，相应也取得了很大的进展. 这些模型大多是适用于各种传染病一般规律的研究，也有一些是针对流行性感冒，爱滋病等具体疾病的模型. 有些模型涉及到接触传染，垂直传染和媒介传染等不同的传染方式；有些涉及到因病死亡，预防接种等因素，构成了丰富多彩的传染病动力学模型，这方面的研究成果见文 [1–6].

* 国家自然科学基金 (62074009) 资助课题.
收稿日期：2007-06-18.

本文根据文 [7,8] 的建模思想，考虑了暂时免疫情况下具连续预防接种和脉冲预防接种的 SIRS 传染病模型. 分别定义了模型的基本再生数，研究了模型的渐近性态，得到了模型的无病平衡解，无病周期解及地方病平衡解的稳定性条件. 连续接种模型中，当 $R_0 \leq 1$ 时，无病平衡解全局渐近稳定；当 $R_0 > 1$ 时，不稳定；脉冲接种模型中，当 $\widetilde{R_0} \leq 1$ 时，无病周期解全局渐近稳定；当 $\widetilde{R_0} > 1$ 时，无病周期解不稳定. 文中还比较了连续接种和脉冲接种的结果.

2 对易感者的新生儿进行连续预防接种的 SIRS 传染病模型

2.1 模型建立

根据疾病的传染机制如图，本文做如下假设与说明.

1) S, I, R 分别表示易感者，染病者，恢复者；

2) 人口总数设为 $N, N = S + I + R$, 且 S, R 的新生者为易感者， I 新生者中没有被垂直传染的部分为易感者；

3) b 为非染病者 S 和 R 的出生率系数， d 为其死亡率系数； b' 为染病者 I 的出生率系数， d' 为其死亡率系数； r 是恢复率系数； δ 是 R 的免疫失去率系数； q 是垂直传染率 $(p + q = 1)$; m 是对易感者新生儿进行预防接种的比例；

4) βSI 为染病期所具传染率.

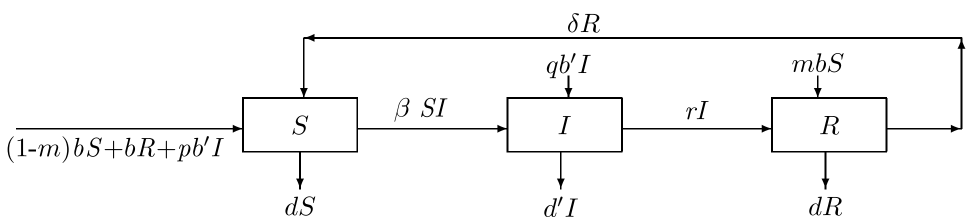

图 1 疾病的传染机制图

假设 $b' = d', b = d$, 则相应的传染病动力学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI + (1-m)bS + bR + pb'I - bS + \delta R, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI + qb'I - b'I - rI, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI + mbS - bR - \delta R. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.2 平衡点的存在性

把 (2.1) 的三个方程相加得 $\frac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(N)}{\mathrm{d}t} = 0$.

故总人口 N 为常数，不妨设 $N = S + I + R = 1$, 又 $p + q = 1$, 则方程 (2.1) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI - (mb + \delta + b)S + (pb' - \delta - b)R + \delta + b, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (pb' + r)I. \end{cases} \tag{2.2}$$

方程 (2.2) 总有平衡点 $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$. 令 $R_0=\frac{\beta(\delta+b)}{(pb'+r)(mb+\delta+b)}$, 当 $R_0>1$ 时，有正平衡点

$$E_1\Big(\frac{pb'+r}{\beta},\frac{\beta(\delta+b)-(pb'+r)(mb+\delta+b)}{\beta(\delta+b+r)}\Big)=E_1(S^*,I^*).$$

与 E_0 对应的 (2.1) 的平衡点 $M_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0,\frac{mb}{mb+\delta+b})$ 是无病平衡点，与 E_1 对应的 (2.1) 的平衡点 $M_1(S^*,I^*,1-S^*-I^*)$ 是地方病平衡点. 取

$$\Omega=\{(S,I)\in R^2:S\geq 0,I\geq 0,S+I\leq 1\}.$$

显然， Ω 是 (2.2) 的正向不变集. 于是有

定理 2.1 方程组 (2.2) 的平衡点为 $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$, 当且仅当 $R_0>1$ 时有正平衡点

$$E_1\Big(\frac{pb'+r}{\beta},\frac{\beta(\delta+b)-(pb'+r)(mb+\delta+b)}{\beta(\delta+b+r)}\Big)=E_1(S^*,I^*).$$

2.3 平衡点的稳定性

定理 2.2 当 $R_0\leq 1$ 时，系统 (2.2) 的平衡点 $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$ 全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时， $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$ 不稳定.

证 系统 (2.2) 在平衡点 $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$ 的线性化矩阵为

$$A_0=\begin{pmatrix} -mb-\delta-b & -\dfrac{\beta(\delta+b)}{mb+\delta+b}+pb'-\delta-b \\ 0 & \dfrac{\beta(\delta+b)-(pb'+r)(mb+\delta+b)}{mb+\delta+b}\end{pmatrix}.$$

相应的特征值为 $\lambda_1=-mb-\delta-b,\lambda_2=\frac{\beta(\delta+b)-(pb'+r)(mb+\delta+b)}{mb+\delta+b}$. 当 $R_0\leq 1$ 时，有 $\lambda_1<0,\lambda_2\leq 0$. 由此可知， E_0 在区域 Ω 内局部渐近稳定；构造 Liapunov 函数 $V(t)=I(t)$, 沿方程 (2.2) 轨线的导数为

$$V'(t)=[\beta S-(pb'+r)]I\leq\Big[\frac{\beta(\delta+b)-(pb'+r)(mb+\delta+b)}{mb+\delta+b}\Big]I\leq 0.$$

由此知， $I(t)\to 0(t\to+\infty)$, 方程 (2.2) 的极限方程为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-(mb+\delta+b)S+\delta+b,$$

计算得

$$S=c\mathrm{e}^{-(mb+\delta+b)t}+\frac{\delta+b}{mb+\delta+b}\to\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},\quad t\to\infty.$$

这里 c 为任意常数，因 $(S,I)\in\Omega$, 由 LaSalle 不变原理知， E_0 全局稳定. 当 $R_0>1$ 时，有 $\lambda_1<0,\lambda_2>0$ 成立. 由此可知，此时 $E_0(\frac{\delta+b}{mb+\delta+b},0)$ 不稳定.

定理 2.3 当 $R_0>1$ 时，系统 (2.2) 的正平衡点 $E_1(S^*,I^*)$ 全局稳定.

证 系统 (2.2) 在正平衡点 $E_1(S^*,I^*)$ 的线性化矩阵为

$$A_1=\begin{pmatrix} -\beta I^*-mb-\delta-b & -r-\delta-b \\ \beta I^* & 0\end{pmatrix}.$$

设 A_1 的特征值为 λ_1, λ_2, 则有 $\lambda_1 + \lambda_2 = -\beta I^* - mb - \delta - b < 0, \lambda_1\lambda_2 = (r + \delta + b)\beta I^* > 0$. 由此可知， A_1 有两个负实部特征值， E_1 在区域 Ω 内局部渐近稳定. 下证全局稳定性：根据引理，构造 Liapunov 函数

$$V(t) = \omega_1\Big(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}\Big) + \omega_2\Big(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\Big).$$

沿方程 (2.2) 轨线的导数为

$$\begin{aligned} V'(t) = (S - S^*)(I - I^*)\Big[\omega_2\beta + \omega_1\Big(-\beta + \frac{pb' - \delta - b}{S^*}\Big)\Big] \\ -\omega_1 \frac{[\delta + b + (pb' - \delta - b)I]}{SS^*}(S - S^*)^2. \end{aligned}$$

选取 $\omega_2 = \frac{r+\delta+b}{pb'+r}\omega_1$ $(\forall \omega_1 > 0)$, 则 $V'(t) = -\omega_1 \frac{[\delta+b+(pb'-\delta-b)I]}{SS^*}(S - S^*)^2 \le 0$. 因 $(S, I) \in \Omega$, 由 LaSalle 不变原理知， E_1 全局稳定.

3　对易感者的新生儿进行脉冲预防接种的 SIRS 传染病模型

3.1　模型建立

对模型 (2.1) 而言，当接种不是连续的，而是以周期 T 进行脉冲接种时，则系统 (2.1) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI + bS + bR + pb'I - bS + \delta R, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (pb' + r)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - bR - \delta R, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $t \ne t_n, t_{n+1} = t_n + T$.

$$\begin{cases} S(t^+) = (1 - m)bS(t^-), \\ I(t^+) = I(t^-), \\ R(t^+) = R(t^-) + mbS(t^-), \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $t = t_n, n = 0, 1, 2, \cdots$. (3.1) 等式两边相加得

$$\frac{\mathrm{d}(S + I + R)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(N)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

故总人口 N 为常数，不妨设 $N = S + I + R = 1$, 所以只须考虑下面的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta I(1 - I - R) + -(pb' + r)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - (b + \delta)R, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $t \ne t_n, t_{n+1} = t_n + T$.

$$\begin{cases} I(t^+) = I(t^-), \\ R(t^+) = R(t^-) + mb(1 - I(t^-) - R(t^-)), \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $t=t_n, n=0,1,2,\cdots$.

3.2 无病周期解的存在性

无病周期解的存在性就是寻找 $i=0$ 时，满足方程组 (3.3) 和 (3.4) 的 T 周期解. 当 $i=0$ 时，方程组 (3.3) 和 (3.4) 变为

$$\begin{cases} R'(t)=-(b+\delta)R(t), \quad t\neq t_n, \\ R(t^+)=R(t^-)+mb(1-R(t^-)), \quad t=t_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

方程组 (3.5) 在区间 $t_n\leq t\leq t_{n+1}$ 上的解为

$$R(t)=\begin{cases} R(t^+)\exp\{-(b+\delta)(t-t_n)\}, \quad t_n\leq t<t_{n+1}, \\ R(t_{n+1}^+)=mb+(1-mb)R(t_{n+1}^-), \quad t=t_{n+1}. \end{cases} \tag{3.6}$$

令 $R(t_{n+1}^+)=R(t_{n+1})$, 则 (3.6) 得

$$R_{n+1}=mb+(1-mb)R_n\exp\{-(b+\delta)T\}.$$

设 $F:R_n\to R_{n+1}$ 是一个映射，满足

$$R_{n+1}=F(R_n)=mb+(1-mb)R_n\exp\{-(b+\delta)T\}. \tag{3.7}$$

该映射有唯一不动点 R_0^*, 满足

$$R_0^*=F(R_0^*)=\frac{mb\exp\{(b+\delta)T\}}{\exp\{(b+\delta)T\}-1+mb}.$$

因为

$$\Big|\frac{\mathrm{d}F(R_n)}{\mathrm{d}R}\Big|_{R_n=R_0^*}=(1-mb)\exp\{(b+\delta)T\}<1,$$

所以不动点 R_0^* 是稳定的，从而得到序列 $\{R_n\}$ 必收敛于 R_0^*, 故方程组 (3.3) 和 (3.4) 有无病的 T 周期解 $(I^*(t),R^*(t))$, 取 $R(t^+)=R_0^*$,

$$\begin{cases} R_t^*=\begin{cases} \dfrac{mb\exp\{(b+\delta)T\}}{\exp\{(b+\delta)T\}-1+mb}\exp\{-(b+\delta)(t-t_n)\}, \quad t_n\leq t<t_{n+1}, \\ R_0^*, \quad t=t_{n+1}, \end{cases} \\ I^*(t)=0. \end{cases}$$

3.3 无病周期解的稳定性

方程 (3.3) 关于周期解 $(I^*(t),R^*(t))$ 的线性化矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} \beta-pb'-r-\beta R^*(t) & 0 \\ r & -b-\delta \end{pmatrix},$$

则相应的关于 $(I^*(t),R^*(t))$ 的线性化系统为

$$\begin{cases} x'=[\beta-pb'-r-\beta R^*(t)]x, \\ y'=rx-(b+\delta)y. \end{cases} \tag{3.8}$$

设 $\Phi(t)$ 是系统 (3.8) 的基解矩阵，且满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\beta-pb'-r-\beta R^*(t) & 0\\ r & -b-\delta\end{pmatrix}\Phi(t),$$

其中 $\Phi(0)=I$, I 是单位阵．解上述矩阵方程组得，

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t) & 0\\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t)\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}&\Phi_{11}(t)=\exp\left\{[\beta-pb'-r]t-\beta\int_0^t R^*(S)\mathrm{d}S\right\},\\&\Phi_{22}(t)=\exp\{-(b+\delta)t\},\\&\Phi_{21}(t)=\exp\{-(b+\delta)t\}\int_0^t r\Phi_{11}(S)\exp\{(b+\delta)S\}\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

当 $t=t_n$ 时，由 (3.4) 得

$$\begin{bmatrix}x'(t_n^+)\\ y'(t_n^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -mb & 1-mb\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'(t_n^-)\\ y'(t_n^-)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ mb\end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{aligned}M&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -mb & 1-mb\end{pmatrix}\Phi(T)\\&=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(T) & 0\\ -mb\Phi_{11}(T)+(1-mb)\Phi_{21}(T) & (1-mb)\exp\{-(b+\delta)T\}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由 Floquet 定理得，无病周期解稳定的充要条件是矩阵 M 的特征值的模小于 1, 因此，只须 $\Phi_{11}(T)<1$, 即

$$[\beta-(pb'+r)]T<\beta\int_0^T R^*(t)\mathrm{d}t,$$

因为 $S^*(t)+I^*(t)+R^*(t)=1$, 故此不等式等价于

$$\frac{1}{T}\int_0^T S^*(t)\mathrm{d}t<\frac{pb'+r}{\beta}.$$

定义

$$\widetilde{R_0}=\frac{\beta\int_0^T S^*(t)\mathrm{d}t}{T(pb'+r)}=\frac{\beta}{pb'+r}\times\frac{[T(b+\delta)-mb][\mathrm{e}^{T(b+\delta)}-1]+T(b+\delta)mb}{T(b+\delta)[\mathrm{e}^{T(b+\delta)}-1+mb]},$$

则 $\widetilde{R_0}$ 为基本再生数．由上面的讨论可得下面的定理．

定理 3.1　当 $\widetilde{R_0}<1$ 时， (3.3) 和 (3.4) 的无病 T 周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 局部渐近稳定．下证无病周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 的全局稳定性．由系统 (3.1) 和 (3.2) 得

$$\begin{cases}S'=(b+\delta)-(b+\delta)S+(pb'-b-\delta)I-\beta SI,\\ I'=\beta SI-(pb'+r)I,\end{cases}\tag{3.9}$$

其中 $t \neq t_n, t_{n+1} = t_n + T$.

$$\begin{cases} S(t^+) = (1-mb)S(t^-), \\ I(t^+) = I(t^-), \end{cases} \tag{3.10}$$

其中 $t = t_n, n = 0, 1, 2, \cdots$. 假设 $pb' < b + \delta$, 可以得到以下定理.

定理 3.2 当 $\widetilde{R_0} < 1$ 时, (3.3) 和 (3.4) 的无病周期解 $(S^*(t), 0, R^*(t))$ 全局稳定.

证 由定理 3.1 知, 只须证明当 $\widetilde{R_0} < 1$ 时, 系统 (3.9) 和 (3.10) 的任一解都趋向于 $(S^*(t), 0)$. 首先证明当 $\widetilde{R_0} < 1$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$. 分别由 (3.9) 与 (3.10) 的第一个方程得

$$\begin{cases} S'(t) \le (b+\delta) - (b+\delta)S(t), & t \neq t_n, \\ S(t^+) = (1-mb)S(t^-), & t = t_n. \end{cases} \tag{3.11}$$

对应 (3.11), 应用脉冲微分不等式得

$$\begin{aligned}
S(t) \le{}& S(0^+)\Big[\prod_{0<k<t}(1-mb)\Big]\exp\Big[-\int_0^t (b+\delta)\mathrm{d}t\Big] \\
&+\int_0^t \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big](b+\delta)\exp[-(b+\delta)(t-s)]\mathrm{d}s \\
={}& S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}\mathrm{e}^{-(b+\delta)t} + \mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\int_0^t \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big]\mathrm{e}^{(b+\delta)s}\mathrm{d}[(b+\delta)s] \\
={}& S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}\mathrm{e}^{-(b+\delta)t} \\
&+\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\Big\{\int_0^T \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big]\mathrm{e}^{(b+\delta)s}\mathrm{d}[(b+\delta)s] \\
&\qquad+\int_T^{2T} \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big]\mathrm{e}^{(b+\delta)s}\mathrm{d}[(b+\delta)s] \\
&\qquad+\cdots+\int_{[\frac{t}{T}]T-T}^{[\frac{t}{T}]T} \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big]\mathrm{e}^{(b+\delta)s}\mathrm{d}[(b+\delta)s] \\
&\qquad+\int_{[\frac{t}{T}]T}^{t} \Big[\prod_{s<k<t}(1-mb)\Big]\mathrm{e}^{(b+\delta)s}\mathrm{d}[(b+\delta)s]\Big\} \\
={}& S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}\mathrm{e}^{-(b+\delta)t} \\
&+\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\big\{(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1) + (1-mb)^{[\frac{t}{T}]-1}\mathrm{e}^{(b+\delta)T}(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1) \\
&\qquad+\cdots+(1-mb)\mathrm{e}^{([\frac{t}{T}]-1)(b+\delta)T}(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1) + \mathrm{e}^{(b+\delta)t} - \mathrm{e}^{[\frac{t}{T}](b+\delta)T}\big\} \\
={}& S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}\mathrm{e}^{-(b+\delta)t} \\
&+\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\Bigg[\frac{(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1)[1-(\frac{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}}{1-mb})^{[\frac{t}{T}]}]}{1-\frac{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}}{1-mb}} + \mathrm{e}^{(b+\delta)t} - \mathrm{e}^{[\frac{t}{T}](b+\delta)T}\Bigg] \\
={}& \mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\Bigg[S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]} - \frac{(1-mb)^{[\frac{t}{T}]+1}(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1)}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\Bigg] + 1 - \frac{mb\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T+T-t)}}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1} \\
={}& r(t) + 1 - \frac{mb\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T+T-t)}}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1},
\end{aligned}$$

其中

$$r(t)=\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}\left[S(0^+)(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}-\frac{(1-mb)^{[\frac{t}{T}]}(\mathrm{e}^{(b+\delta)t}-1)}{\mathrm{e}^{(b+\delta)t}+mb-1}\right]\leq \mathrm{e}^{-(b+\delta)t}S(0^+). \tag{3.12}$$

由 (3.12) 及 (3.9) 的第二个方程得

$$I'(t)\leq\left[\beta-pb'-r+\beta r(t)-\frac{\beta mb\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T+T-t)}}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\right]I(t),$$

由 (3.10) 及上式得

$$I(t)\leq I(0)\exp\left\{[\beta-pb'-r]t+\beta\int_0^t r(t)\mathrm{d}s-\frac{\beta mb\mathrm{e}^{(b+\delta)T}}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\int_0^t \mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{s}{T}]T-s)}\mathrm{d}s\right\}. \tag{3.13}$$

因为

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{s}{T}]T-s)}\mathrm{d}s\\
=&\int_0^T \mathrm{e}^{-(b+\delta)s}\mathrm{d}s+\int_T^{2T}\mathrm{e}^{(b+\delta)(T-s)}\mathrm{d}s+\cdots+\int_{[\frac{t}{T}]T-T}^{[\frac{t}{T}]T}\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T-T-s)}\mathrm{d}s\\
&+\int_{[\frac{t}{T}]T}^{t}\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T-s)}\mathrm{d}s\\
=&\int_0^T \mathrm{e}^{-(b+\delta)s}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{(b+\delta)T}\int_T^{2T}\mathrm{e}^{-(b+\delta)s}\mathrm{d}s+\cdots+\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T-T)}\int_{[\frac{t}{T}]T-T}^{[\frac{t}{T}]T}\mathrm{e}^{-(b+\delta)s}\mathrm{d}s\\
&+\int_{[\frac{t}{T}]T}^{t}\mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{t}{T}]T-s)}\mathrm{d}s\\
=&\frac{(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)T})}{b+\delta}\left[\frac{t}{T}\right]+\frac{1}{b+\delta}(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)(t-[\frac{t}{T}]T)})\\
=&\frac{(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)T})}{b+\delta}\left[\frac{t}{T}\right]+(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)T(\frac{t}{T}-[\frac{t}{T}])}).
\end{aligned}$$

又 $0\leq\frac{t}{T}-[\frac{t}{T}]\leq 1$, 故

$$\int_0^t \mathrm{e}^{(b+\delta)([\frac{s}{T}]T-s)}\mathrm{d}s\geq\frac{(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)T})}{b+\delta}\left[\frac{t}{T}\right]. \tag{3.14}$$

将 (3.14) 代入 (3.13) 得

$$\begin{aligned}
I(t)\leq I(0)\exp\Big\{&[\beta-pb'-r]t+\beta\int_0^t r(t)\mathrm{d}s-\frac{\beta mb\mathrm{e}^{(b+\delta)T}}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\\
&\times\frac{(1-\mathrm{e}^{-(b+\delta)T})}{b+\delta}\left[\frac{t}{T}\right]\Big\}\\
\leq D(t)\exp&\left\{\left[\beta\left(1-\frac{mb}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\times\frac{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1}{(b+\delta)T}\right)-pb'-r\right]t\right\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$D(t)=I(0)\exp\Big\{-\frac{S(0)\beta}{b+\delta}\mathrm{e}^{-(b+\delta)t}+\frac{S(0)\beta}{b+\delta}\Big\}\exp\Big\{\frac{\beta mb(\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1)(t-[\frac{t}{T}]T)}{[\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1](b+\delta)T}\Big\}$$

是正数且有上界. 由 (3.15) 知, 当 $\widetilde{R_0}<1$ 时, 有 $I(t)\to 0(t\to\infty)$. 下面证明: 当 $\widetilde{R_0}<1$ 时, 方程 (3.9) 和 (3.10) 的任一解 $(S(t),I(t))$ 都有 $S(t)\to S^*(t)(t\to\infty)$. 令 $W(t)=|S(t)-S^*(t)|$, 则当 $t\neq t_n$ 时, 有

$$\begin{aligned}D^+W(t)&=\mathrm{sign}(S(t)-S^*(t))(S'(t)-S^*(t))\\&\leq-(b+\delta)|S(t)-S^*(t)|+(\delta-pb'+b)I(t)+\beta S(t)I(t)\\&=-(b+\delta)W(t)+(\delta-pb'+b)I(t)+\beta S(t)I(t).\end{aligned}\tag{3.16}$$

由 (3.15) 及条件 $\widetilde{R_0}<1$ 知, 存在一个正的常数 $M=\sup\{D(t)|t>0\}$ 使得下式成立

$$I(t)\leq M\mathrm{e}^{Lt}.\tag{3.17}$$

这里 $L=\beta(1-\frac{mb}{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}+mb-1}\times\frac{\mathrm{e}^{(b+\delta)T}-1}{b+\delta})-pb'-r$. 又因为

$$W(t_n^+)=(1-mb)W(t_n^-),\tag{3.18}$$

所以, 由 (3.16)–(3.18) 式及脉冲微分不等式 [9] 得 $\lim\limits_{t\to\infty}W(t)=0$. 即 $S(t)\to S^*(t)(t\to\infty)$. 同理可证 $R(t)\to R^*(t)(t\to\infty)$. 综上, 定理 3.2 得证.

4 连续接种和脉冲接种的比较

从本文第 1 部分中的 $R_0=\frac{\beta(\delta+b)}{(pb'+r)(mb+\delta+b)}$ 与第 2 部分中的

$$\widetilde{R_0}=\frac{\beta}{pb'+r}\times\frac{[T(b+\delta)-mb][\mathrm{e}^{T(b+\delta)}-1]+T(b+\delta)mb}{T(b+\delta)[\mathrm{e}^{T(b+\delta)}-1+mb]}$$

的比较可知对同一个具有双线性的传染率 SIRS 模型, 采取脉冲预防接种策略比采取连续预防接种策略更好.

参 考 文 献

[1] Alberto d'Onofrio. On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission. *Applied Mathematics Letters*, 2005, **18**: 729–732.

[2] Alberto d'Onofrio. Vaccination policies and nonlinear force of infection: Generalization of an observation by alexander and moghadas. *Applied Mathematics and Computation*, 2005, **168**: 613–622.

[3] Lu Zhonghua, Chi Xuebin and Chen Lansun. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, **36**: 1039–1057.

[4] Alberto d'Onofrio. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model: Global asymptotic stable eradication in presence of vaccine failures. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, **36**: 473–489.

[5] 李健全，马知恩．两类带有确定潜伏期的 SEIS 传染病模型的分析．系统科学与数学，2006, **26**(2): 228–236.

[6] 孟晓伟，张勇，王建中．具有脉冲接种流行病模型的周期解稳定性．华北工学院， 2002, **26**(4): 239–242.

[7] 徐洁，周义仓．具有比例和脉冲接种的乙肝流行病模型．生物数学学报， 2004, **19**(2): 149–155.

[8] 靳祯，马知恩．具有连续和脉冲预防接种的 SIRS 传染病模型．华北工学院， 2003, **24**(4): 235–243.

[9] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.

THE TWO SIRS EPIDEMICAL MODELS WITH VERTICAL INFECTION AND VACCINATION IN THE EASILY INFECTED GROUPS

FU Jingchao

(*College of Sciences, Northeastern Dianli University, Jilin* 132012; *The School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110004)

JING Yuanwei

(*The School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110004)

ZHANG Zhonghua

(*College of Sciences, Northeastern Dianli University, Jilin* 132012)

ZHANG Siying

(*College of Sciences, Northeastern Dianli University, Jilin* 132012; *The School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110004)

Abstract The SIRS epidemical models with continuous and impulsive vaccinations are discussed. The reproduction numbers corresponding to those two models are given. A complete global analysis is given to the continuous vaccination models by using a Liapunov function and a Lasalle invariable theory. In the SIRS epidemical models with impulsive vaccinations, the existence and global stability of the disease-free periodic solution is proved by using a Floquet multiplication theory and a comparative theorem.

Key words Epidemical models, continuous vaccination, impulsive vaccination, periodic solution, global stability.