系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(7) (2009, 7), 999–1008

几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性*

俞 建

(贵州大学数学系，贵阳 550025)

摘要 对 Ky Fan 点问题定义了理性函数，证明了大多数的 Ky Fan 点问题 (在 Baire 分类意义上) 都是结构稳定的，对 ε- 平衡也都是鲁棒的. 作为应用，还给出了 Nash 平衡问题和变分不等式问题的稳定性结论.

关键词 有限理性， Ky Fan 点问题，稳定性.

MR(2000) 主题分类号 91A26, 91A10, 47J20

1 引 言

我们知道，许多经济模型的基础都是建立在完全理性的假设之上，即每个决策者都能够在一定的约束条件下作出对自己最为有利的选择. 这一假设太严格了，太理想了，在应用上当然也受到了一定的限制. 我们希望建立的经济模型在有限理性假设之上，这无论在理论上还是在实践中都具有重要的意义，而要做到这一点，未来还必须克服不少的障碍.

经济模型中引入有限理性，会对建立在完全理性假设之上的模型分析结果产生怎样的影响呢？我们自然会提出这样的问题. 2001 年，Anderlini 和 Canning[1] 为此建立了抽象的架构–模型 M, 它是一类带有抽象理性函数的参数化的 “一般博弈”(general games). 具体来说， $M=(\Lambda,X,F,R)$: Λ 是参数空间，每个 $\lambda\in\Lambda$ 表示一个博弈； X 是行为空间，每个 $x\in X$ 表示一个策略； $F:\Lambda\times X\to 2^X$ 是可行映射，而由 F 诱导出行为映射 $f:\Lambda\to 2^X$, 其中 $\forall\lambda\in\Lambda, f(\lambda)=\{x\in X: x\in F(\lambda,x)\}$; 映射 f 的图 $\mathrm{Graph}(f)=\{(\lambda,x)\in\Lambda\times X: x\in f(\lambda)\}$, R :$\mathrm{Graph}(f)\to R_+$ 是理性函数. $R(\lambda,x)=0$ 对应于完全理性. $\forall\lambda\in\Lambda,\forall\varepsilon\geq 0, E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in f(\lambda): R(\lambda,x)\leq\varepsilon\}$ 定义为博弈 λ 的 ε- 平衡点集，特别地，$E(\lambda)=E(\lambda,0)=\{x\in f(\lambda): R(\lambda,x)=0\}$ 定义为博弈 λ 的平衡点集.

[1] 中假定：参数空间 Λ 和活动空间 X 都是紧度量空间，行为映射 $f:\Lambda\to 2^X$ 紧值且连续，理性函数 $R:\mathrm{Graph}(f)\to R_+$ 连续且 $\forall\lambda\in\Lambda$, 平衡点集 $E(\lambda)\neq\emptyset$.

如果 $\forall\delta>0,\exists\overline{\varepsilon}>0$, 使 $\forall\varepsilon<\overline{\varepsilon},\forall\lambda\in\Lambda$, 有

$$h(E(\lambda,\varepsilon),E(\lambda))<\delta,$$

文献 [1] 中称 M 对 ε- 平衡是鲁棒的，其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离.

---

* 国家自然科学基金 (10461004) 资助课题.
收稿日期：2006-08-14, 收到修改稿日期：2008-10-09.

如果平衡映射 $E:\Lambda\to 2^X$ 是连续的, [1] 中称 M 是结构稳定的.

[1] 中主要结果是证明了 M 对 ε- 平衡是鲁棒的当且仅当 M 是结构稳定的. [1] 中还给出了 4 个应用实例, 其中 2 个是关于微观经济学的, 2 个是关于宏观经济学的. 但即使是对这 4 个相对简单的实例, 平衡映射 $E:\Lambda\to 2^X$ 在某些 $\lambda\in\Lambda$ 都不是连续的, [1] 中指出这样的 λ 为临界参数值.

但 [1] 中给出的假设条件太强, 很多重要的经济模型都不满足, [2] 将其中的假设条件大大减弱: 由 Λ 是紧度量空间减弱为完备度量空间, 由集值映射 f 连续减弱为上半连续, 由函数 R 连续减弱为下半连续. 同时, [2] 给出了 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 对 ε- 平衡鲁棒和 M 在 $\lambda\in\Lambda$ 结构稳定的新定义, 在减弱后的假设条件下由 M 在 λ 结构稳定推出了 M 在 λ 对 ε- 平衡是鲁棒的; 更重要的是, [2] 中证明了对大多数的参数值 $\lambda\in\Lambda$ (在 Baire 分类意义上), M 都是结构稳定的, 对 ε- 平衡也是鲁棒的. [2] 中还给出了 2 个应用实例, 一个是关于非合作博弈的, 其中 Λ 是完备度量空间, R 是下半连续的; 另一个是关于广义博弈 (或抽象经济) 的, 其中 Λ 是完备度量空间, f 是上半连续的. [3] 又进一步将 [2] 中的主要结果应用于多目标博弈与广义多目标博弈.

另一方面, [4] 中定义了平衡问题解的概念: $\phi:X\times X\to R$, 若 $\exists\, x\in X$, 使 $\forall y\in X$, 有 $\phi(x,y)\geq 0$, 则称 x 是平衡问题 ϕ 的解. 平衡问题概括了凸优化问题, 不动点问题, 变分不等式问题, 互补问题及非合作博弈问题等等. 稍后, [5] 中定义了 Ky Fan 点问题: $\phi:X\times X\to R$, 若 $\exists\, x\in X$, 使 $\forall y\in X$, 有 $\phi(x,y)\leq 0$ 则称 x 是函数 ϕ 在 X 中的 Ky Fan 点, 之所以命名为 Ky Fan 点, 是因为 Ky Fan 首先在一定条件下给出以上点的存在性结果 [6], 这一结果已被命名为 Ky Fan 不等式. Ky Fan 点的研究有不少重要应用, 在 [7] 中正是首先证明了 Ky Fan 点集本质连通区的存在性, 并由此证明了 Nash 平衡点集本质连通区的存在性, 从而推广了博弈论中非常重要的 Nash 平衡点集精练的 Kohlberg-Mertens 定理 [8].

从 [9,10] 开始, 我们将上述 [2,3] 关于有限理性的研究扩充至几类非线性问题: Λ 是一个 “问题” 空间, 每个 $\lambda\in\Lambda$ 表示一个非线性问题; X 是一个 “解” 空间, 每个问题 $\lambda\in\Lambda$ 的解都在 X 中; $\forall\lambda\in\Lambda$, 问题 λ 的可行解集 $f(\lambda)\subset X$, 即 $f:\Lambda\to 2^X$ 是一个集值映射; $R:\mathrm{Graph}(f)\to R_+$ 是非线性问题的理性函数, $R(\lambda,x)=0$ 对应于完全理性, 此时 x 是问题 λ 的解, 或者平衡点, 记解集或平衡点集 $E(\lambda)=\{x\in f(\lambda):R(\lambda,x)=0\}$, $\varepsilon>0$, $E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in f(\lambda):R(\lambda,x)\leq\varepsilon\}$, 表示问题 λ 的 ε- 近似解集或 ε- 平衡点集.

本文首先对 Ky Fan 点问题定义了理性函数, 证明了大多数的 Ky Fan 点问题 (在 Baire 分类意义上) 都是结构稳定的, 对 ε- 平衡也是鲁棒的. 作为应用, 还给出了非合作博弈中 Nash 平衡问题和变分不等式问题的稳定性结论.

2 预备知识

首先介绍集值映射连续性的一些定义 [11,12].

设 X 和 Y 是两个度量空间, $K(X)$ 是 X 中的所有非空紧集的集合, $F:Y\to K(X)$ 是一个集值映射.

(1) 如果对任意 X 中的开集 $U, U\supset F(y)$, 存在 y 的开邻域 $O(y)$, 使 $\forall y'\in O(y)$, 有 $U\supset F(y')$, 则称 F 在 $y\in Y$ 是上半连续的;

(2) 如果对任意 X 中的开集 $U, U\cap F(y)\neq\emptyset$, 存在 y 的开邻域 $O(y)$, 使 $\forall y\prime\in O(y)$, 有

$U \cap F(y\prime) \neq \emptyset$, 则称 F 在 $y \in Y$ 是下半连续的；

(3) 如果 F 在 $y \in Y$ 既上半连续又下半连续，则称 F 在 y 是连续的．如果 X 是紧度量空间，则 F 在 $y \in Y$ 连续的充分必要条件是 $\forall y_n \to y$, 有 $h(F(y_n), F(y)) \to 0$, 其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离.

假定 (Λ, ρ) 是一个完备度量空间，X 是一个紧度量空间，$f : \Lambda \to K(X)$ 是上半连续的，$R : Graph(f) \to R_+$ 是下半连续的，而 $\forall \lambda \in \Lambda, E(\lambda) \neq \emptyset$. 这样， $\forall \lambda \in \Lambda, \forall \varepsilon \geq 0, E(\lambda, \varepsilon) = \{x \in f(\lambda) : R(\lambda, x) \leq \varepsilon\}$ 必是 X 中的闭集，从而是紧集.

定义 2.1[2] $\forall \lambda \in \Lambda$, 如果 $\forall \delta > 0$, $\exists \overline{\varepsilon} > 0$, 当 $\varepsilon < \overline{\varepsilon}, \rho(\lambda, \lambda') < \overline{\varepsilon}$, 有

$$h(E(\lambda', \varepsilon), E(\lambda')) < \delta,$$

则称 M 在 λ 对 ε- 平衡是鲁棒的.

定义 2.2[2] 如果平衡映射 $E : \Lambda \to K(X)$ 在 $\lambda \in \Lambda$ 是连续的，则称 M 在 λ 是结构稳定的.

[2] 中的主要结果可综合于以下定理 A, 也可见 [3] 中定理 A.

定理 A 设 Λ 是完备度量空间， X 是紧度量空间， $f : \Lambda \to K(X)$ 是上半连续的， $R : \mathrm{Graph}(f) \to R_+$ 是下半连续的，则

(1) 平衡映射 $E : \Lambda \to K(X)$ 是上半连续的；

(2) 存在 Λ 中的一个稠密 G_δ 集 Q, 使 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 是结构稳定的；

(3) 如果 M 在 $\lambda \in \Lambda$ 是结构稳定的, 则 M 在 $\lambda \in \Lambda$ 对 ε- 平衡必是鲁棒的, 从而 $\forall \lambda \in Q, M$ 在 λ 对 ε- 平衡必是鲁棒的；

(4) $\forall \lambda \in Q, \forall \lambda_n \to \lambda, \forall \varepsilon_n \to 0$, 有

$$h(E(\lambda_n, \varepsilon_n), E(\lambda)) \to 0;$$

(5) 如果 $\lambda \in \Lambda$, 而 $E(\lambda)$ 是单点集，则 M 在 $\lambda \in \Lambda$ 必是结构稳定的，在 λ 对 ε- 平衡也必是鲁棒的.

3 Ky Fan 点问题解的稳定性

设 X 是一个紧度量空间，

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda = (\phi) : \begin{array}{l} \phi : X \times X \to R \text{ 满足 } \forall y \in X, x \to \phi(x, y) \text{ 是下半连续的;} \\ \forall x \in X, \phi(x, x) = 0; \\ \sup\limits_{(x,y) \in X \times X} |\phi(x, y)| < +\infty; \\ \exists x \in X, \text{ 使 } \forall y \in X, \text{ 有 } \phi(x, y) \leq 0. \end{array} \right\}$$

$\forall \lambda_1 = \phi_1, \lambda_2 = \phi_2 \in \Lambda_1$, 定义

$$\rho_1(\lambda_1, \lambda_2) = \sup_{(x,y) \in X \times X} |\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)|.$$

引理 3.1 (Λ_1, ρ_1) 是一个完备度量空间.

证 设 $\{\lambda_n = \phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Λ_1 中的任意 Cauchy 序列，即 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 $N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall m, n \geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\rho_1(\lambda_m, \lambda_n) = \sup_{(x,y)\in X\times X} |\phi_m(x,y) - \phi_n(x,y)| < \varepsilon.$$

存在 $\phi : X \times X \to R$, 使 $\lim\limits_{m\to\infty} \phi_m(x,y) = \phi(x,y)$, 且 $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} |\phi(x,y) - \phi_n(x,y)| \leq \varepsilon.$$

容易证明： $\forall y \in X, x \to \phi(x,y)$ 是下半连续的； $\forall x \in X,\ \phi(x,x) = 0$; $\sup\limits_{(x,y)\in X\times X} |\phi(x,y)| < +\infty$.

由 $\phi_n \in \Lambda_1$, 则 $\exists\, x_n \in X$, 使 $\forall y \in X$, 有 $\phi_n(x_n, y) \leq 0$. 因 X 是紧的, 不妨设 $x_n \to x \in X$. $\forall y \in X$, 因 $x \to \phi(x,y)$ 是下半连续的，存在正整数 $N(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$ ，使 $\forall n \geq N(\varepsilon)$ 有

$$\phi(x,y) < \phi(x_n,y) + \varepsilon \leq \phi_n(x_n,y) + 2\varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

因 ε 是任意的，得 $\phi(x,y) \leq 0$. 这样， $\lambda = \phi \in \Lambda_1, (\Lambda_1, \rho_1)$ 是完备的.

$\forall \lambda = \phi \in \Lambda_1$, 它就给定了一个 Ky Fan 点问题, 其解集 $E_1(\lambda) = \{x \in X : \phi(x,y) \leq 0, \forall y \in X\}$ ，由 Λ_1 的定义， $E_1(\lambda) \neq \emptyset$.

考虑模型 $M_1 = \{\Lambda_1, X, F_1, R_1\} : \forall \lambda \in \Lambda_1, \forall x \in X$, 定义

$$F_1(\lambda,x) = X, \quad f_1(\lambda) = \{x \in X : x \in F_1(\lambda,x)\} = X, \quad R_1(\lambda,x) = \sup_{y\in X} \phi(x,y).$$

引理 3.2 $\forall \lambda \in \Lambda_1, \forall x \in X, R_1(\lambda,x) \geq 0; R_1(\lambda,x) = 0$ 当且仅当 $x \in E_1(\lambda)$.

证 $\forall \lambda = \phi \in \Lambda_1, \forall x \in X$, $R_1(\lambda,x) = \sup\limits_{y\in X} \phi(x,y) \geq \phi(x,x) = 0$.

如果 $R_1(\lambda,x) = 0$, 则 $\sup\limits_{y\in X} \phi(x,y) = 0$, 故 $\forall y \in X,\ \phi(x,y) \leq 0,\ x \in E_1(\lambda)$.

反之，如果 $x \in E_1(\lambda)$, 即 $\forall y \in X, \phi(x,y) \leq 0$, 注意到 $\phi(x,x) = 0$, 得

$$R_1(\lambda,x) = \sup_{y\in X} \phi(x,y) = 0.$$

引理 3.3 $R_1(\lambda,x)$ 对 (λ,x) 是下半连续的.

证 这只要证明 $\sup\limits_{y\in X} \phi(x,y)$ 对 (ϕ,x) 是下半连续的，即要证明 $\forall \varepsilon > 0, \forall \phi_n \in \Lambda_1, \phi_n \to \phi \in \Lambda_1, \forall x_n \in X, x_n \to x$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 使 $\forall n \geq N(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{y\in X} \phi(x,y) < \sup_{y\in X} \phi_n(x_n,y) + \varepsilon.$$

由 $\phi_n \to \phi$, 存在正整数 $N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} |\phi(x,y) - \phi_n(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由上确界定义， $\exists \overline{y} \in X$, 使 $\sup\limits_{y\in X} \phi(x,y) < \phi(x,\overline{y}) + \frac{\varepsilon}{3}$. 固定 $\overline{y} \in X$, 因 $x \to \phi(x,\overline{y})$ 下半连续，且 $x_n \to x$, 存在正整数 $N(\varepsilon) \geq N_1(\varepsilon)$, 使 $\forall n \geq N(\varepsilon)$, 有

$$\phi(x,\overline{y}) < \phi(x_n,\overline{y}) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是 $\forall n \geq N(\varepsilon)$, 有

$$\sup_{y\in X}\phi(x,y) < \phi(x,\overline{y}) + \frac{\varepsilon}{3} < \phi(x_n,\overline{y}) + \frac{2\varepsilon}{3} < \phi_n(x_n,\overline{y}) + \varepsilon \leq \sup_{y\in X}\phi_n(x_n,y) + \varepsilon.$$

定理 3.1 关于 Ky Fan 点问题解的稳定性，定理 A 成立.

证 由引理 3.1, Λ_1 是一个完备度量空间， X 是紧度量空间， $f_1 : \Lambda_1 \to K(X)$ 连续，又由引理 3.2, $R_1(\lambda, x)$ 下半连续，故定理 A 成立.

注 3.1 $\forall\varepsilon > 0, \lambda = \phi \in \Lambda_1, E_1(\lambda,\varepsilon) = \left\{x \in X : \sup\limits_{y\in X}\phi(x,y) \leq \varepsilon\right\}$, 由此 $x \in E_1(\lambda,\varepsilon)$ 当且仅当 $\forall y \in X$, 有 $\phi(x,y) \leq \varepsilon, E_1(\lambda,\varepsilon)$ 是函数 ϕ 在 X 中所有 ε-Ky Fan 点的集合.

注 3.2 对平衡问题，可以给出类似的结果

设 X 是紧度量空间,

$$\Lambda_1' = \left\{\lambda = (\phi) : \begin{array}{l} \phi : X\times X \to R \text{ 满足 } \forall y \in X, x \to \phi(x,y) \text{ 是上半连续的;} \\ \forall x \in X, \phi(x,x) = 0; \\ \sup\limits_{(x,y)\in X\times X} |\phi(x,y)| < +\infty; \\ \exists\, x \in X, \text{ 使 } \forall y \in X, \text{ 有 } \phi(x,y) \geq 0. \end{array}\right\}$$

$\forall\lambda_1 = \phi_1, \lambda_2 = \phi_2 \in \Lambda_1'$, 定义

$$\rho_1'(\lambda_1,\lambda_2) = \sup_{(x,y)\in X\times X}|\phi_1(x,y) - \phi_2(x,y)|,$$

则同引理 3.1 的证明， (Λ_1', ρ_1') 是一个完备的度量空间.

$\forall\lambda = \phi \in \Lambda_1'$, 它就给定了一个平衡问题，其解集 $E_1'(\lambda) = \{x \in X : \phi(x,y) \geq 0, \forall y \in X\}$, 由 Λ_1' 的定义， $E_1'(\lambda) \neq \emptyset$.

考虑模型 $M_1' = \{\Lambda_1', X, F_1', R_1'\} : \forall\lambda \in \Lambda_1', \forall x \in X$, 定义

$$F_1'(\lambda,x) = X, \quad f_1'(\lambda) = \{x \in X : x \in F_1'(\lambda,x)\} = X.$$

以下考虑理性函数 R_1' 的构造：如果 $\exists\, x \in X$, 使 $\forall\, y \in X$, 有 $\phi(x,y) \geq 0$, 则 $-\phi(x,y) \leq 0$, 由此

$$R_1'(\lambda,x) = \sup_{y\in X}[-\phi(x,y)] = -\inf_{y\in X}\phi(x,y).$$

定理 3.1′ 关于平衡问题解的稳定性，定理 A 成立.

4 应用 I: n 人非合作博弈中的 Nash 平衡点问题

X_i 是第 i 个局中人的策略集, 它是度量空间 E_i 中的非空紧集， $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$， $u_i : X \to R$ 是第 i 个局中人的支付函数． $\forall i \in N$, 记 $\widehat{i} = N\backslash i$. 如果 $\exists\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X$, 使 $\forall\, i \in N$, 有

$$u_i\big(x_i, x_{\widehat{i}}\big) = \max_{y_i\in X_i} u_i\big(y_i, x_{\widehat{i}}\big),$$

则称 x 是 n 人非合作博弈的 Nash 平衡点.

设

$$\Lambda_2=\left\{\lambda=(u_1,u_2,\cdots,u_n):\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\text{ 在 }X\text{上是上半连续的};\\ \forall y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X, x\to\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(y_i,x_{\widehat{i}})\\ \text{在 }X\text{上是下半连续的}\\ \sup\limits_{x\in X}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_i(x)|<+\infty;\\ \exists\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X,\text{使 }\forall\, i\in N,\\ \text{有 }u_i(x_i,x_{\widehat{i}})=\max\limits_{y_i\in X_i}u_i(y_i,x_{\widehat{i}}).\end{array}\right\}$$

$\forall\lambda_1=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1n}),\lambda_2=(u_{21},u_{22},\cdots,u_{2n})\in\Lambda_2$, 定义

$$\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in X}|u_{1i}(x)-u_{2i}(x)|,$$

则由 [2] 中引理 4.1, (Λ_2,ρ_2) 是一个完备度量空间.

$\forall\lambda=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\Lambda_2$, 它就给定了一个 Nash 平衡点问题, 其所有 Nash 平衡点的集合为 $E_2(\lambda)$, 由 Λ_2 的定义, $E_2(\lambda)\neq\emptyset$.

$\forall\lambda=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\Lambda_2$, 定义 $\phi:X\times X\to R$ 如下

$$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X,$$

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[u_i(y_i,x_{\widehat{i}})-u_i(x_i,x_{\widehat{i}})].$$

由 Λ_2 的定义, 易证 $\forall y\in X,\ x\to\phi(x,y)$ 是下半连续的, $\forall x\in X,\ \phi(x,x)=0$. 如果 $x\in E_2(\lambda)$, 则 $\forall y\in X$, 有 $\phi(x,y)\le 0$, 即 x 是 ϕ 在 X 中的 Ky Fan 点; 反之, 如果 x 是 ϕ 在 X 中的 Ky Fan 点, 则 $\forall i\in N,\ \forall y_i\in X_i$, 令 $y=(y_i,x_{\widehat{i}})\in X,\ \phi(x,y)=u_i(y_i,x_{\widehat{i}})-u_i(x_i,x_{\widehat{i}})\le 0,\ u_i(x_i,x_{\widehat{i}})=\max\limits_{y_i\in X_i}u_i(y_i,x_{\widehat{i}}),\ x\in E_2(\lambda)$.

考虑模型 $M_2=\{\Lambda_2,X,F_2,R_2\}:\forall\lambda\in\Lambda_2,\ \forall x\in X$, 定义 $F_2(\lambda,x)=X,\ f_2(\lambda)=X$,

$$R_2(\lambda,x)=\sup_{y\in X}\phi(x,y)=\sup_{y\in X}\sum_{i=1}^{n}[u_i(y_i,x_{\widehat{i}})-u_i(x_i,x_{\widehat{i}})].$$

以下引理 4.1 是显然成立的.

引理 4.1 $\forall\lambda\in\Lambda_2,\ \forall x\in X,\ R_2(\lambda,x)\ge 0;\ R_2(\lambda,x)=0$ 当且仅当 $x\in E_2(\lambda)$.

引理 4.2 $R_2(\lambda,x)$ 对 (λ,x) 是下半连续的.

证 这只要证明 $\forall\varepsilon>0,\ \forall u_m=(u_1^m,u_2^m,\cdots,u_n^m)\in\Lambda_2,\ u_m\to u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\Lambda_2,\ \forall x_m\in X,\ x_m\to x\in X$, 则存在正整数 $M(\varepsilon)$, 使 $\forall m\ge M(\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned}R_2(\lambda,x)&=\sup_{y\in X}\phi(x,y)=\sup_{y\in X}\sum_{i=1}^{n}[u_i(y_i,x_{\widehat{i}})-u_i(x_i,x_{\widehat{i}})]\\&<\sup_{y\in X}\phi_m(x_m,y)+\varepsilon=\sup_{y\in X}\sum_{i=1}^{n}[u_i^m(y_i,x_{\widehat{i}}^m)-u_i^m(x_i^m,x_{\widehat{i}}^m)]+\varepsilon\\&=R_2(\lambda_m,x_m)+\varepsilon.\end{aligned}$$

首先来证明当 $u_m \to u$ 时必有 $\phi_m \to \phi$.

事实上，$\forall (x,y) \in X \times X$, 有

$$
\begin{aligned}
|\phi_m(x,y)-\phi(x,y)| &= \Big|\sum_{i=1}^n [u_i^m(y_i,x_{\hat{i}})-u_i^m(x_i,x_{\hat{i}})]-\sum_{i=1}^n [u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})]\Big| \\
&\le \sum_{i=1}^n \left|u_i^m(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(y_i,x_{\hat{i}})\right| + \sum_{i=1}^n \left|u_i^m(x_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})\right| \\
&\le 2\rho_2(u_m,u),
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\rho_1(\phi_m,\phi)=\sup_{(x,y)\in X\times X}|\phi_m(x,y)-\phi(x,y)| \le 2\rho_2(u_m,u),
$$

即 $\phi_m \to \phi$. 由引理 3.3, $\sup\limits_{y\in X}\phi(x,y)$ 对 (ϕ,x) 是下半连续的，$\forall \varepsilon>0$, 存在正整数 $M(\varepsilon)$, 使 $\forall m \ge M(\varepsilon)$, 有

$$
\sup_{y\in X}\phi(x,y) < \sup_{y\in X}\phi_m(x_m,y)+\varepsilon,
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
R_2(\lambda,x) &= \sup_{y\in X}\phi(x,y)=\sup_{y\in X}\sum_{i=1}^n [u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})] \\
&< \sup_{y\in X}\sum_{i=1}^n [u_i^m(y_i,x_{\hat{i}}^m)-u_i^m(x_i^m,x_{\hat{i}}^m)]+\varepsilon=\sup_{y\in X}\phi_m(x_m,y)+\varepsilon \\
&= R_2(\lambda_m,x_m)+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

定理 4.1 关于 n 人非合作博弈问题 Nash 平衡点的稳定性，定理 A 成立.

证 Λ_2 是一个完备度量空间，X 是紧度量空间，$f_2: \Lambda_2 \to K(X)$ 连续，又由引理 4.2, $R_2(\lambda,x)$ 下半连续，故定理 A 成立.

注 4.1 $\forall \varepsilon>0$, $\lambda=u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\Lambda_2$, $E_2(\lambda,\varepsilon)=\{x\in X: \sup\limits_{y\in X}\sum\limits_{i=1}^n[u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})]\le\varepsilon\}$, 由此 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_2(\lambda,\varepsilon)$ 当且仅当 $\forall y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$ 有 $\sum\limits_{i=1}^n[u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})]\le\varepsilon$. $\forall i\in N$, 记 $\max\limits_{y_i\in X_i}u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})=\varepsilon_i\ge 0$, 则 $\forall y_i\in X_i$, $u_i(y_i,x_{\hat{i}})-u_i(x_i,x_{\hat{i}})\le\varepsilon_i$, 且 $\sum\limits_{i=1}^n\varepsilon_i\le\varepsilon$. 这表明 $x\in E_2(\lambda,\varepsilon)$ 当且仅当 x 是非合作博弈 $\lambda=u$ 的 ε- 平衡点.

5 应用 II: 变分不等式问题

设 X 是 Hilbert 空间 H 中的非空凸紧集，

$$
\Lambda_3=\Big\{g: X\to H\text{连续，且}\sup_{x\in X}\|g(x)\|<+\infty\Big\}.
$$

$\forall \lambda_1=g_1,\lambda_2=g_2\in\Lambda_3$, 定义

$$
\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\sup_{x\in X}\|g_1(x)-g_2(x)\|,
$$

则易知 (Λ_3, ρ_3) 是一个完备度量空间.

$\forall \lambda = g \in \Lambda_3$, 它就给定了一个变分不等式问题: 求 $x \in X$, 使 $\forall y \in X$, 有 $\langle g(x),\ y-x\rangle \geq 0$, 其中 $\langle g(x),\ y-x\rangle \geq 0$ 表示 Hilbert 空间 H 中 $g(x)$ 与 $y-x$ 的内积.

$\forall \lambda = g \in \Lambda_3$, 定义 $\phi: X\times X \to R$ 如下

$$\forall\, x, y \in X, \quad \phi(x,y) = \langle g(x), x-y\rangle.$$

容易验证: $\forall y \in X, x \to \phi(x,y)$ 是连续的, $\forall x \in X,\ y \to \phi(x,y)$ 是凹的, $\forall y \in X,\ \phi(x,x) = 0$, 由 Ky Fan 不等式 [6], 存在 $x \in X$, 使 $\forall y \in X$, 有 $\phi(x,y) = \langle g(x),\ x-y\rangle \leq 0$, 即 $\forall y \in X$, 有 $\langle g(x),\ y-x\rangle \geq 0$, 记其解集 $E_3(\lambda) = \{x \in X : \langle g(x),\ y-x\rangle \geq 0, \forall y \in X\}$.

考虑模型 $M_3 = \{\Lambda_3, X, F_3, R_3\}: \forall \lambda \in \Lambda_3, \forall x \in X$, 定义 $F_3(\lambda, x) = X,\ f_3(\lambda) = X$,

$$R_3(\lambda, x) = \sup_{y\in X} \phi(x,y) = \sup_{y\in X}\langle g(x), x-y\rangle.$$

以下引理 5.1 是显然成立的.

引理 5.1 $\forall \lambda \in \Lambda_3,\ \forall x \in X,\ R_3(\lambda, x) \geq 0;\ R_3(\lambda, x) = 0$ 当且仅当 $x \in E_3(\lambda)$.

引理 5.2 $R_3(\lambda, x)$ 对 (λ, x) 是下半连续的.

证 这只要证明 $\forall \varepsilon > 0,\ \forall g_m \in \Lambda_3,\ g_m \to g \in \Lambda_3,\ \forall x_m \in X,\ x_m \to x \in X$, 则存在正整数 $M(\varepsilon)$, 使 $\forall m \geq M(\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned} R_3(\lambda, x) &= \sup_{y\in X} \phi(x,y) = \sup_{y\in X}\langle g(x), x-y\rangle \\ &< \sup_{y\in X} \phi_m(x_m, y) + \varepsilon = \sup_{y\in X}\langle g_m(x_m), x_m - y\rangle + \varepsilon \\ &= R_3(\lambda_m, x_m) + \varepsilon. \end{aligned}$$

首先来证明当 $g_m \to g$ 时必有 $\phi_m \to \phi$.

因 X 是紧集, 必有界, 存在 $b > 0$, 使 $\forall y \in X$, 有 $\|y\| \leq b$.

$\forall\,(x,y) \in X\times X$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} |\phi_m(x,y) - \phi(x,y)| &= |\langle g_m(x), x-y\rangle - \langle g(x), x-y\rangle| = |\langle g_m(x) - g(x), x-y\rangle| \\ &\leq \|g_m(x) - g(x)\|\|x-y\| \leq \sup_{x\in X}\|g_m(x)-g(x)\|[\|x\| + \|y\|] \\ &\leq 2b\rho_3(g_m, g), \end{aligned}$$

从而有

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} |\phi_m(x,y) - \phi(x,y)| \leq 2b\rho_3(g_m, g),$$

即 $\phi_m \to \phi$. 以下同引理 4.2 的证明, 因 $\sup\limits_{y\in X} \phi(x,y)$ 对 (ϕ, x) 是下半连续的, 从而存在正整数 $M(\varepsilon)$, 使 $\forall m \geq M(\varepsilon)$, 有

$$\begin{aligned} R_3(\lambda, x) &= \sup_{y\in X} \phi(x,y) = \sup_{y\in X}\langle g(x), x-y\rangle \\ &< \sup_{y\in X} \phi_m(x_m, y) + \varepsilon = \sup_{y\in X}\langle g_m(x_m), x_m - y\rangle + \varepsilon \\ &= R_3(\lambda_m, x_m) + \varepsilon. \end{aligned}$$

定理 5.1 关于变分不等式解的稳定性, 定理 A 成立.

证　Λ_3 是一个完备度量空间， X 是紧度量空间， $f_3 : \Lambda_3 \to K(X)$ 连续，又由引理 5.2, $R_3(\lambda, x)$ 下半连续，故定理 A 成立.

6　若干评注

(1)　对于 Ky Fan 点问题解的存在性和稳定性研究，一般在 Hausdorff 线性拓扑空间中进行，要求 X 是凸紧集，对函数 ϕ 除了有连续性的假设外，还需要有凸性的假设，即要求 $\forall x \in X,\ y \to \phi(x, y)$ 是拟凹的．本文在度量空间中进行研究， X 是紧集，对函数 ϕ 也只需要连续性的假设，而将 Ky Fan 点问题解的存在性在 Λ_1 的定义中加以规定，然后证明 Λ_1 是一个完备度量空间，在 Λ_1 中再研究 Ky Fan 点问题解的稳定性.

(2)　引言中已经讲过， [2] 大大减弱了 [1] 中的假设条件，而本文则对 Ky Fan 点问题等定义了理性函数，验证它们都满足 [2] 中的假设条件，由此一系列结论都成立．在较弱的假设条件下，首先，平衡映射 $E : \Lambda \to K(X)$ 是上半连续的，见 [13] 中的数学附录 3, 这表明 $\forall \lambda \in \Lambda$, 当 λ' 与 λ 变化很小时， $E(\lambda')$ 相对于 $E(\lambda)$ 不会突然变得较大．其次，本文证明了存在 Λ 中的一个稠密 G_δ 集 Q, 使 $\forall \lambda \in Q$, 平衡映射 E 在 λ 是下半连续的，也见 [13] 中的数学附录 3, 这表明 $\forall \lambda \in Q$, 当 λ' 与 λ 变化很小时， $E(\lambda')$ 相对于 $E(\lambda)$ 不会突然变得较小，于是平衡映射 $E : \Lambda \to K(X)$, 在 $\lambda \in Q$ 是连续的， $h(E(\lambda'), E(\lambda)) \to 0(\lambda' \to \lambda)$, 博弈 $\lambda \in Q$ 是本质的 [14], 平衡点集 $E(\lambda)$ 在 $\lambda \in Q$ 是稳定的， M 在 $\lambda \in Q$ 是结构稳定的．当然，当 $\lambda \in Q$ 时， M 对 ε- 平衡也是鲁棒的， $h(E(\lambda'), E(\lambda', \varepsilon)) \to 0(\lambda' \to \lambda,\ \varepsilon \to 0)$.

(3)　因为 Λ 是完备度量空间，而 Q 是 Λ 中的一个稠密 G_δ 集，它必是第 2 纲的．因此，在 Baire 分类意义上，对大多数的参数值 λ, M 在 λ 是结构稳定的，在 λ 对 ε- 平衡是鲁棒的，换句话说，少量的有限理性，对平衡点集没有较大的影响．因为 Q 是第 2 纲的，临界参数值的集合就必是第 1 纲的，在 Baire 分类意义上，它很少很少，这是 [1] 中没有涉及的，因为 [1] 只是肯定临界参数值是存在的．注意到在 Baire 分类意义上的大多数与测度论意义上的几乎处处是两个不同的概念，不能从其中一个成立推出另一个成立，具体的例子见 [15].

参　考　文　献

[1] Anderlini L and Canning D. Structural stability implies robustness to bounded rationality. *J. of Economic Theory*, 2001, **101**: 395–422.

[2] Yu C and Yu J. On structural stability and robustness to bounded rationality. *Nonlinear Analysis TMA*, 2006, **65**: 583–592.

[3] Yu C and Yu J. Bounded rationality in multiobjective games. *Nonlinear Analysis TMA*, 2007, **67**: 930–937.

[4] Blum E and Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Student*, 1994, **63**: 123–145.

[5] Tan K K, Yu J and Yuan X Z . The stability of Ky Fan's points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, **123**: 1511–1519.

[6] Fan K. A Minimax Inequality and Applications. New York, Academic Press, 1972.

[7] Yu J and Xiang S W. On essential components of the set of Nash equilibrium points. *Nonlinear Analysis TMA*, 1999, **38**: 259–264.

[8] Kohlberg E and Mertens J F. On the strategic stability of equilibria. *Econometrica*, 1986, **54**: 1003–1037.

[9] 王红雷，俞建．有限理性与多目标问题解的稳定性．运筹学学报， 2008, **12**: 104–108.

[10] 俞建著，博弈论与非线性分析．北京，科学出版社， 2008.

[11] Aubin J P and Frankowska H. Set-Valued Analysis. Boston, Birkhauser, 1990.

[12] Klein E and Thompson A. Theory of Correspondences. New York, Wileg, 1984.

[13] Hildenbrand W and Kirman A P. Equilibrium Analysis. Amsterdam, North-Holland, 1988.

[14] Yu J. Essential equilibria of n-person noncooperative games. *J. of Math. Economics*, 1999, **31**: 361–372.

[15] 俞建． Nash 平衡的存在性与稳定性．系统科学与数学， 2002, **22**(3): 296–311.

[16] Rubinstein A 著，倪晓宁译．有限理性建模．北京：中国人民大学出版社， 2005.

BOUNDED RATIONALITY AND STABILITY OF SOLUTIONS OF SOME EQUILIBRIUM PROBLEMS

YU Jian

(*Department of Mathematics,Guizhou University, Guiyang,* 550025)

Abstract In this paper, first rationality functions for Ky Fan's points problems are defined, and then it is proven that most of the Ky Fan's points problems (in the sense of Baire category) are structurally stable and robust to ε-equilibria. Finally, as applications, the stability results on Nash equilibrium problems and variational inequality problems are given.

Key words Bounded rationality, Ky Fan's points problems, stability.