系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(3) (2009, 3), 425–432

广义度量方程的改进及其应用 (I)*

杨 定 华

(四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610066)

摘要 众所周知, 度量方程作为距离几何的基本内容和工具之一, 在几何约束求解中扮演着主要的角色. 改进了杨定华关于 n 维欧氏空间中两个等数量有限基本元素构成集合的广义度量方程, 建立了更为一般意义的、应用方便的广义度量方程, 作为其初步应用, 导出了两个单形之间的一些有趣的矩阵恒等式关系. 特别地, 将其两边取行列式, 可以简洁得到关于联系两个单形的几何恒等式.

关键词 高维欧氏空间, 单形, 体积, 基本元素, 广义度量方程, 矩阵恒等式.

MR(2000) 主题分类号 51K05

1 引言及主要结果

众所周知, 度量方程作为著名的 Cayley-Menger 代数的推广, 成为距离几何研究最主要的对象之一, 也是我们理解距离几何最有力的工具之一, 越来越扮演着主要的角色. 它联系着距离空间中点、超平面和超球等基本元素之间重要的度量关系. 杨路和张景中 [1] 关于抽象距离空间的一般性度量方程的建立, 标志着距离几何新纪元的到来和研究的对象从具体空间到一般抽象空间的根本转变, 结论的普适性从原来的个别或特殊情况转向现在的类别或一般情况. 特别地, 非正定距离几何成为主要的研究对象, 当然其结论也适用于正定距离几何. 因此这个一般性度量方程成为现代距离几何最基础性的定理, 是达到比较深刻结果的必不可少的阶梯.

当然, 试图推广杨路和张景中建立的一般性度量方程, 还有很多工作要作, 特别是要克服本质的距离非交换性. 在我们近期的一些工作中, 文 [2] 已经将杨路和张景中关于高维欧氏空间 E^n 中的特殊而重要的度量方程 [3] 推广到 n 维欧氏空间 E^n 中的两个等数量的基本图形的集合中, 获得较为一般的、应用比较广泛的广义度量方程. 事实上, 它也有很多缺陷, 例如它要求两个等数量的基本图形的集合中都有一个假想元素 ϕ, 而实际上, 并不总能满足这一不算苛刻的条件, 这样就大大限制了广义度量方程的应用.

为了克服这个缺陷, 充分体现这个广义度量方程的应用价值和美学价值, 使它成为形式更为优美、结构更为完善的结论. 在本文中, 我们改进了文 [2] 关于高维欧氏空间 E^n 中两个等数量有限基本元素构成的集合的广义度量方程, 获得更为一般意义的、应用方便的广义度量方程. 即, 如果 $\Sigma(e) = \{e_0, e_1, \cdots, e_N\}$ 和 $\Sigma(e') = \{e'_0, e'_1, \cdots, e'_N\}$ 为 n 维欧氏空间 E^n

* 四川省教育厅重点自然科学基金 (07ZA087) 资助课题.
收稿日期: 2006-09-23.

中的基本元素：点，$(n-1)$ 维超平面和假想元素 ϕ 所构成的两个等数量有限集合，并且每个集合中至多有一个假想元素 ϕ, e_i 和 e'_i 不一定同时或为点、或为 $(n-1)$ 维超平面、或为假想元素 ϕ, 那么文 [2] 的定理 1 中的结论仍然是成立的．作为其初步应用，导出了两个单形之间的一些有趣的几何关系．特别地，我们得到了非常一般的矩阵恒等式，这样的结果在距离几何是非常少见的．一个应用上的例子是：将这个矩阵恒等式两边取行列式，就非常简洁导出了文 [4] 的主要结果．

本文的主要结果是

定理 1 设 $\Sigma(e)=\{e_0,e_1,\cdots,e_N\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_0,e'_1,\cdots,e'_N\}$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的基本元素：点，$(n-1)$ 维超平面和假想元素 ϕ 所构成的两个等数量有限集合，并且每个集合中至多有一个假想元素 ϕ, e_i 和 e'_i 不一定同时或为点、或为 $(n-1)$ 维超平面、或为假想元素 ϕ, 令

$$g(e_i,e'_j)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\rho^2(e_i,e'_j), & \text{如果 } e_i,e'_j \text{ 都是点}, \rho \text{ 表示欧氏距离;} \\ \cos\widehat{e_ie'_j}, & \text{如果 } e_i,e'_j \text{ 都是超平面}, \widehat{e_ie'_j} \text{ 表示夹角;} \\ d(e_i,e'_j), & \text{如果 } e_i,e'_j \text{ 一个是点，另一个是面}, d \text{ 表示带号距离;} \\ 1, & \text{如果} e_i,e'_j \text{ 一个是点，另一个是假想元素 } \phi; \\ 0, & \text{如果} e_i,e'_j \text{ 一个是非点，另一个是假想元素 } \phi, \end{cases}$$

记 $(N+1)$ 阶矩阵 $G=[g(e_i,e'_j)](i,j=0,1,\cdots,N)$, 当 $N>n+1$ 时，则有

$$\det[G]=\det[g(e_i,e'_j)]=0,\quad i,j=0,1,\cdots,n+1. \tag{1}$$

为方便，我们仍然称度量方程 (1) 为 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的广义度量方程．

2 定理 1 的证明

定理 1 的证明 现在只需要证明 $(N+1)$ 阶矩阵 $G=[g(e_i,e'_j)]$ 的秩为 $(n+2)$ 即可．

我们已经在文 [2] 证明了两个有限基本元素构成的集合 $\Sigma(e)=\{e_0,e_1,\cdots,e_N\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_0,e'_1,\cdots,e'_N\}$ 中都只有一个假想元素 ϕ 的情形．

现在我们考虑 $\Sigma(e)=\{e_0,e_1,\cdots,e_N\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_0,e'_1,\cdots,e'_N\}$ 中都没有假想元素 ϕ 的情形．先证明矩阵 G 的秩不小于 $(n+2)$, 取 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的两个非退化而且重合的 n 维单形，由文 [1] 中的例 1.7 可知矩阵 G 的秩不小于 $(n+2)$.

再证明矩阵 G 的秩不大于 $(n+2)$. 当 $N>n+1$, 下面要证明 (1) 式成立，仍然采用文 [2] 的记号：设 $e_0,e_1,\cdots,e_m$; $e'_0,e'_1,\cdots,e'_l$ 为面，$e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_N$; $e'_{l+1},e'_{l+2},\cdots,e'_N$ 为点，这里 $1\le l,m\le N$. 方便地取 e_N 为笛卡尔坐标原点，设 e_i,e'_j 的单位法向量分别为 $\overline{e}_k,\overline{e}'_k(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,l)$, 由 e_N 向面 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 所引的垂直向量分别为 $\overline{h}_0,\overline{h}_1,\cdots,\overline{h}_m$, 由 e'_N 向面 $e'_0,e'_1,\cdots,e'_l$ 所引的垂直向量分别为 $\overline{h}'_0,\overline{h}'_1,\cdots,\overline{h}'_l$, 记由 e_N 向点 $e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_N$ 所引的向量分别为 $\overline{e}_{m+1},\overline{e}_{m+2},\cdots,\overline{e}_N$, 而由 e'_N 向点 $e'_{l+1},e'_{l+2},\cdots,e'_N$ 所引的向量分别为 $\overline{e}'_{l+1},\overline{e}'_{l+2},\cdots,\overline{e}'_N$, 令 e_N 向点 e'_N 所引的向量为 $\overline{e}$, 则

1) 当 $0\le i\le m, 0\le j\le l$ 时，$g(e_i,e'_j)=\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j$;

2) 当 $0\le i\le m, l<j\le N$ 时，$g(e_i,e'_j)=\overline{e}_i\cdot(\overline{e}'_j-\overline{h}_i+\overline{e})$;

3)　当 $m<i\le N, 0\le j\le l$ 时，　$g(e_i,e'_j)=\overline{e}'_j\cdot(\overline{e}_i-\overline{h}'_j+\overline{e}')$;

4)　当 $m<i\le N, l<j\le N$ 时，　$g(e_i,e'_j)=-\frac{1}{2}(\overline{e}_i-\overline{e}'_j-\overline{e})^2$.

于是可以得到

$$\det[g(e_i,e'_j)]=\det\begin{pmatrix} \underbrace{\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j}_{0\le i\le m,\ 0\le j\le l} & \underbrace{\overline{e}_i\cdot(\overline{e}'_j-\overline{h}_i+\overline{e})}_{0\le i\le m,\ l<j\le N} \\ \underbrace{\overline{e}'_j\cdot(\overline{e}_i-\overline{h}'_j+\overline{e}')}_{m<i\le N,\ 0\le j\le l} & -\frac{1}{2}\underbrace{(\overline{e}_i-\overline{e}'_j-\overline{e})^2}_{m<i\le N,\ l<j\le N} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

对 (2) 式中的行列式加边，有

$$\det[g(e_i,e'_j)]=-\det\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \underbrace{\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j}_{0\le i\le m,\ 0\le j\le l} & & & \underbrace{\overline{e}_i\cdot(\overline{e}'_j-\overline{h}_i+\overline{e})}_{0\le i\le m,\ l<j\le N} & 0 \\ 0 & & & & & \vdots \\ 1 & & & & & 0 \\ \vdots & \underbrace{\overline{e}'_j\cdot(\overline{e}_i-\overline{h}'_j+\overline{e}')}_{m<i\le N,\ 0\le j\le l} & & & -\frac{1}{2}\underbrace{(\overline{e}_i-\overline{e}'_j-\overline{e})^2}_{m<i\le N,\ l<j\le N} & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

全文约定：行列式的行列号由 0 算起．现在对 (3) 式右边的行列式作如下的初等变换

1)　当 $0\le i\le m$ 时，把第 0 行乘以 $\overline{e}_i\cdot(\overline{h}_i-\overline{e})$ 加到第 i 行上；

2)　当 $0\le j\le l$ 时，把第 0 列乘以 $\overline{e}'_j\cdot(\overline{h}'_j-\overline{e}')$ 加到第 j 列上；

3)　当 $m<i\le N$ 时，把第 0 行乘以 $\frac{1}{4}\overline{e}\cdot\overline{e}-\overline{e}\cdot\overline{e}_i+\frac{1}{2}\overline{e}_i\cdot\overline{e}_i$ 加到第 i 行上；

4)　当 $l<j\le N$ 时，把第 0 列乘以 $\frac{1}{4}\overline{e}\cdot\overline{e}-\overline{e}\cdot\overline{e}'_j+\frac{1}{2}\overline{e}'_j\cdot\overline{e}'_j$ 加到第 j 列上．又因为 $\overline{e}_N=\overline{e}'_N=\mathbf{0}_n$($n$ 维零向量), 再通过交换行列式的行或列，于是得到

$$\det[g(e_i,e'_j)]=-\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 1 & * & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 1 & * & 0 & & & & & \\ 0 & * & 0 & & & \overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & * & 0 & & & & & \end{pmatrix}, \tag{4}$$

这里的 “$*$” 表示未写出的代数式，而且不一定相等．现在对 (4) 式右边的行列式作如下的初等变换

1)　把第 2 行乘以 -1 加到第 $k(k=3,4,\cdots,N+2)$ 行上；

2) 把第 2 列乘以 -1 加到第 $k(k=3,4,\cdots,N+2)$ 列上. 于是可以得到

$$\det[g(e_i,e'_j)]=-\det\begin{pmatrix}0&1&*&0&\cdots&0\\1&0&1&0&\cdots&0\\ *&1&0&*&\cdots&*\\0&0&*&&&\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j&\\0&0&*&&&\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}*&*&\cdots&*\\ *&&&\\ \vdots&&\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j&\\ *&&&\end{pmatrix}. \tag{5}$$

在 (5) 式矩阵中的 $i,j=0,1,\cdots,N-1$, 由于向量 $\overline{e}_i,\overline{e}'_j$ 均为 n 维向量, 所以 N 阶方阵 $E_N=(\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j)$ 的秩不大于 n, 因此当 $N>(n+1)$ 时, E_N 是 $(n+2)$ 阶而秩不大于 n 的方阵, 展开 (5) 式中的行列式, 容易知道其值为 0. 亦即

$$\det[g(e_i,e'_j)]=\det\begin{pmatrix}*&*&\cdots&*\\ *&&&\\ \vdots&&\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j&\\ *&&&\end{pmatrix}=0. \tag{6}$$

最后我们考虑 $\Sigma(e)=\{e_0,e_1,\cdots,e_N\}$ 和 $\Sigma(e')=\{e'_0,e'_1,\cdots,e'_N\}$ 中只有一个集合有一个假想元素 ϕ 的情形. 不妨元素 $e_0,e_1,\cdots,e_N$ 和 $e'_0,e'_1,\cdots,e'_N$ 中只有 $e_0=\phi$ 其余元素非 ϕ.

先证明矩阵 G 的秩不小于 $(n+2)$, 取 $\Omega=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中非退化的 n 维单形, 其体积, 外接超球半径和棱长分别为 V,R,a_{ij}, e'_0 为外接超球球心 O, e_i,e'_i 都为 A_i, 这里 $i=1,2,\cdots,n+1$, 所以得到

$$\det(G)=\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\R&&&\\ \vdots&&-\frac12a_{ij}^2&\\R&&&\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}0&1&\cdots&1\\R&&&\\ \vdots&&-\frac12a_{ij}^2&\\R&&&\end{pmatrix}$$

$$+\det\Big(-\frac12a_{ij}^2\Big)=-(n!)^2V^2R-(n!)^2V^2R^2=-(n!)^2V^2R(1-R), \tag{7}$$

在 (7) 式中, 当 $R\neq1$ 时得到

$$\det[g(e_i,e'_j)]\neq0,\ \ (i,j=0,1,\cdots,n+1). \tag{8}$$

由此可见矩阵 G 的秩不小于 $(n+2)$.

下面, 再证明矩阵 G 的秩不大于 $(n+2)$, 仍然按上文记号, 将行列式 $\det[g(e_i,e'_j)]$ 写成

$$\det[g(e_i,e'_j)]=\det\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&0&1&\cdots&1&0\\ \vdots&&\underbrace{\overline{e}_i\cdot\overline{e}'_j}_{1\le i\le m,\ 0\le j\le l}&&&\underbrace{\overline{e}_i\cdot(\overline{e}'_j-\overline{h}_i+\overline{e})}_{1\le i\le m,\ l<j\le N}&&\vdots\\0&&&&&&&0\\1&&&&&&&0\\ \vdots&&\underbrace{\overline{e}'_j\cdot(\overline{e}_i-\overline{h}'_j+\overline{e}')}_{m<i\le N,\ 0\le j\le l}&&&-\frac12\underbrace{(\overline{e}_i-\overline{e}'_j-\overline{e})^2}_{m<i\le N,\ l<j\le N}&&\vdots\\1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}, \tag{9}$$

现在对 (9) 式右边的行列式作如下初等变换

1) 当 $1 \le i \le m$ 时，把第 0 行乘以 $\overline{e}_i \cdot (\overline{h}_i - \overline{e})$ 加到第 i 行上；

2) 当 $1 \le j \le l$ 时，把第 0 列乘以 $\overline{e}'_j \cdot (\overline{h}'_j - \overline{e}')$ 加到第 j 列上；

3) 当 $m < i \le N$ 时，把第 0 行乘以 $\frac{1}{4}\overline{e} \cdot \overline{e} - \overline{e} \cdot \overline{e}_i + \frac{1}{2}\overline{e}_i \cdot \overline{e}_i$ 加到第 i 行上；

4) 当 $l < j \le N$ 时，把第 0 列乘以 $\frac{1}{4}\overline{e} \cdot \overline{e} - \overline{e} \cdot \overline{e}'_j + \frac{1}{2}\overline{e}'_j \cdot \overline{e}'_j$ 加到第 j 列上．又因为 $\overline{e}_N = \overline{e}'_N = \mathbf{0}_n$, 于是得到

$$\det[g(e_i, e'_j)] = -\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j & & & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

将 (10) 式中的行列式按第 0 行展开得

$$\det[g(e_i, e'_j)] = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j & & & 0 \\ 1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \tag{11}$$

现在对 (11) 式右边的行列式作如下的初等变换

1) 当 $m < i \le N-2$ 时，把第 $N-1$ 行乘以 -1 加到第 i 行上；

2) 当 $l < j \le N-1$ 时，把第 N 列乘以 -1 加到第 j 列上．于是整理得到

$$\det[g(e_i, e'_j)] = -\det \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j & \\ 0 & & & \\ 1 & * & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j & \\ 0 & & & \\ 0 & * & \cdots & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \cdot \overline{e}'_0 & \cdots & \overline{e}_1 \cdot \overline{e}'_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e}_{N-1} \cdot \overline{e}'_j & \cdots & \overline{e}_{N-1} \cdot \overline{e}'_{N-1} \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}, \tag{12}$$

在 (12) 式矩阵中的 $i = 1, 2, \cdots, N-1; j = 0, \cdots, N-1$, 由于向量 $\overline{e}_i, \overline{e}'_j$ 均为 n 维向量，所以 $(N-1) \times N$ 矩阵 $E_N = (\overline{e}_i \cdot \overline{e}'_j)$ 的秩不大于 n, 因此 (12) 式矩阵中最末一个矩阵的秩不大于

$(n+1)$, 所以当 $N>(n+1)$ 时，其行列式值为 0. 亦即

$$\det[g(e_i,e_j')]=-\det\begin{pmatrix}\overline{e}_1\cdot\overline{e}_0' & \cdots & \overline{e}_1\cdot\overline{e}_{N-1}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{e}_{N-1}\cdot\overline{e}_j' & \cdots & \overline{e}_{N-1}\cdot\overline{e}_{N-1}' \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}=0. \tag{13}$$

由此可见矩阵 G 的秩不大于 $(n+2)$. 综上可知 (1) 式成立. 从而定理 1 证毕.

3 一点应用

在本节中，我们将利用广义度量方程 (1) 导出两个单形的一些有趣的几何关系. 特别地，我们得到了很一般的矩阵恒等式，将这个矩阵恒等式两边取行列式，就非常简洁导出了文 [4] 的主要结果. 为了叙述方便，我们先约定一些记号.

设 $\Omega=\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$ 和 $\Omega'=\{A_0',A_1',\cdots,A_n'\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的两个非退化的 n 维单形，其 n 维有向体积分别是 V 和 V', Ω(或 Ω') 中与顶点 A_i(或 A_i') 所对应的侧面 Ω_i(或 Ω_i') 的 $n-1$ 维体积为 V_i(或 V_i'), Ω(或 Ω') 的顶点 A_i(或 A_i') 到 Ω'(或 Ω) 的侧面 Ω_j'(或 Ω_j) 的有向距离为 h_{ij}(或 h_{ij}'), 这里 $i,j=0,1,\cdots,n$. 记 $H_1=(h_{ij})$, $H_2=(h_{ij}')$ 分别表示以 h_{ij}, h_{ij}' 为元素的 $(n+1)$ 阶方阵， $H=\mathrm{diag}(h_0,h_1,\cdots,h_n)$, $H'=\mathrm{diag}(h_0',h_1',\cdots,h_n')$, 其中 h_i(或 h_i') 是 Ω(或 Ω') 的侧面 Ω_i(或 Ω_i') 上所对应的高. 记侧面 Ω_i(或 Ω_i') 所在的 $n-1$ 维超平面为 P_i(或 P_i'), 设 $n-1$ 维超平面为 P_i 与 P_j' 所成的二面角为 θ_{ij}, 点 A_i 与 A_j' 点的欧氏距离为 ρ_{ij}. 记 $\Xi=(\cos\theta_{ij})$, $D_0=(-\frac{1}{2}\rho_{ij}^2)$, $D=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{1}_{n+1} \\ \mathbf{1}_{n+1}^\tau & D_0\end{pmatrix}$, 这里 $\mathbf{0}_{n+1}$ 是 $n+1$ 维行 0 向量， $\mathbf{0}_{n+1}^\tau$ 是 $n+1$ 维列 0 向量，这里 τ 表示转置；类似地， $\mathbf{1}_{n+1}$ 表示元素均为 1 的 $n+1$ 维行向量， $\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)}$ 表示 $n+1$ 阶 0 矩阵.

本节的主要结果是

定理 2 沿用上述记号，则有

$$H'=H_1H^{-1}H_2. \tag{14}$$

在 (14) 式两边取行列式整理即得

推论 1 沿用上述记号，则有

$$\det(H_1)\det(H_2)=\det(H)\det(H')=\frac{n^{2(n+1)}(V(A)V(A'))^{(n+1)}}{\pm\prod\limits_{i=0}^{n}V_i(A)V_i'(A)}. \tag{15}$$

注 1 推论 1 便是文 [4] 的主要结果.

定理 3 沿用上述记号，则有

$$\Xi=(\cos\theta_{ij})=(\mathbf{0}_{n+1}^\tau;H)(D^{-1})^\tau(\mathbf{0}_{n+1}^\tau;H')^\tau=(\mathbf{0}_{n+1}^\tau;H_2)D^{-1}(\mathbf{0}_{n+1}^\tau;H_1)^\tau. \tag{16}$$

下面应用两组初等欧氏图形的广义度量方程 (1) 非常简洁地给出定理 2 和 3 的证明.

定理 2 的证明 设 $\Sigma(e)=\{\phi,A_0,A_1,\cdots,A_n,A'_0,A'_1,\cdots,A'_n\}$, $\Sigma(e')=\{O,P_0,P_1,\cdots,P_n,P'_0,P'_1,\cdots,P'_n\}$, 应用广义度量方程，可以知道 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的度量矩阵

$$G=g(e_i,e'_j)=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{a}_{n+1} & \boldsymbol{b}_{n+1}\\ \mathbf{0}^\tau_{n+1} & H & H_1\\ \mathbf{0}^\tau_{n+1} & H_2 & H'\end{pmatrix}\tag{17}$$

的秩不大于 $(n+2)$, $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 和 $\boldsymbol{b}_{n+1}$ 均是 $n+1$ 阶行向量，由于 H 可逆，对 (17) 式中的矩阵作初等变换：将由第 $1,2,\cdots,n+1$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+3)$ 矩阵右乘 "$-H^{-1}H_2$" 加到由第 $n+2,n+2,\cdots,2n+2$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+3)$ 矩阵，得到

$$G'=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{a}_{n+1} & \boldsymbol{b}_{n+1}\\ \mathbf{0}^\tau_{n+1} & H & H_1\\ \mathbf{0}^\tau_{n+1} & \mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)} & H'-H_1H^{-1}H_2\end{pmatrix}.\tag{18}$$

由于初等变换不改变矩阵的秩, 所以 G' 的秩不大于 $(n+2)$, 又因为矩阵 G' 的第 $0,1,\cdots,n+1$ 行和列上的 $(n+2)$ 阶顺序主子阵可逆，所以有

$$H'-H_1H^{-1}H_2=\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)}.\tag{19}$$

整理 (19) 式即得 (14) 式，定理 2 证毕.

定理 3 的证明 设 $\Sigma(e)=\{\phi,A_0,A_1,\cdots,A_n;P'_0,P'_1,\cdots,P'_n\}$, $\Sigma(e')=\{\phi,A'_0,A'_1,\cdots,A'_n;P_0,P_1,\cdots,P_n\}$, 应用广义度量方程，可以知道 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的度量矩阵

$$G=g(e_i,e'_j)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{1}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1}\\ \mathbf{1}^\tau_{n+1} & D_0 & H\\ \mathbf{0}^\tau_{n+1} & H' & \varXi^\tau\end{pmatrix}\tag{20}$$

的秩不大于 $(n+2)$, 容易知道 $\Sigma(e)$ 和 $\Sigma(e')$ 的 $(n+2)$ 阶 Sylvester-Blumenthal 矩阵 (即 G 的第 $0,1,\cdots,n+1$ 行和列上的 $(n+2)$ 阶顺序主子阵) 可逆，再对 (20) 式中的矩阵作初等变换：将由第 $1,2,\cdots,n+1$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+3)$ 矩阵右乘 " $-D^{-1}(\mathbf{0}^\tau_{n+1};H')^\tau$ " 加到由第 $n+2,n+3,\cdots,2n+2$ 行组成的 $(n+1)\times(2n+3)$ 矩阵，得到

$$G'=\begin{pmatrix}D & (\mathbf{0}^\tau_{n+1};H)^\tau\\ \mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)} & \varXi^\tau-(\mathbf{0}^\tau_{n+1};H)^\tau(D^{-1})^\tau(\mathbf{0}^\tau_{n+1};H')\end{pmatrix},\tag{21}$$

由于初等变换不改变矩阵的秩，所以 G' 的秩不大于 $(n+2)$, 又因为矩阵 G' 的 $(n+2)$ 阶子阵 D 可逆，所以有

$$\varXi^\tau-(\mathbf{0}^\tau_{n+1};H)^\tau(D^{-1})^\tau(\mathbf{0}^\tau_{n+1};H')=\mathbf{0}_{(n+1)\times(n+1)},\tag{22}$$

整理即得 (16) 式前一等式.

设 $\Sigma(e)=\{\phi,A_0,A_1,\cdots,A_n;P_0,P_1,\cdots,P_n\}$, $\Sigma(e')=\{\phi,A'_0,A'_1,\cdots,A'_n;P'_0,P'_1,\cdots,P'_n\}$, 同理应用广义度量方程可得 (16) 式后一等式. 从而定理 3 证毕.

事实上，广义度量方程 (1) 还有广泛的应用，限于篇幅，我们将另行文叙及.

参 考 文 献

[1] 杨路，张景中．抽象距离空间的秩的概念．中国科学技术大学学报， 1980, **10**(4): 52–65.
[2] 杨定华．高维欧氏空间中的广义度量方程及其应用．数学进展， 2005, **34**(5): 584–590.
[3] 杨路，张景中．关于有限点集的一类几何不等式．数学学报， 1980, **23**(5): 740–749.
[4] 尹景尧，陈奉孝．关于联系两个单形的几何恒等式及其应用．数学进展， 1992, **21**(3): 325–328.

THE IMPROVEMENT OF GENERALIZED METRIC EQUATIONS AND APPLICATIONS (I)

YANG Dinghua

(*College of Mathematics and Software Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu* 610066)

Abstract It is well known that metric equations are one of the basic contents and tools in distance geometry, and play a center role in solving the problems of geometric constraints. In this paper, the generalized metric equations involving two finite sets of elementary material in higher dimensional Euclidean space given by Yang D H is improved, it is more convenient to research the relations of two simplexes by using the new generalized metric equations. As its applications, some funny geometric relations involving two simplexes are given, especially, the geometric identity involving two simplexes given by Yin J Y and Chen F J is infered.

Key words Higher dimension Euclidean space, simplex, volume, elementary material, generalized metric equation, matrix identity.