系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(10) (2008, 10), 1288–1296

Hamilton 非二部图的弱泛圈性*

何 方 国
(华中科技大学系统工程研究所, 武汉 430074)
胡 智 全
(华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430074)

摘要 图 G 称为弱泛圈图是指 G 包含了每个长为 $l(g(G)\le l\le c(G))$ 的圈, 其中 $g(G), c(G)$ 分别是 G 的围长与周长. 1997 年 Brandt 提出以下猜想：边数大于 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+5$ 的 n 阶非二部图为弱泛圈图. 1999 年 Bollobás 和 Thomason 证明了边数不小于 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+59$ 的 n 阶非二部图为弱泛圈图. 作者证明了如下结论：设 G 是 n 阶 Hamilton 非二部图, 若 G 的边数不小于 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12$, 则 G 为弱泛圈图.

关键词 非二部图, Hamilton 图, 圈, 弱泛圈图.

MR(2000) 主题分类号 05C90

1 引 言

令 G 是一个简单无向图, $E(G)$ 与 $V(G)$ 分别为 G 的边集与顶点集, $e(G)=|E(G)|$, 顶点 x 的开邻域定义为 $N(x)=\{y: yx\in E(G)\}$, x 在图 G 中的次记为 $d_G(x)$ 或 $d(x)$, G 中长度为 k 的圈记作 k- 圈或 C_k . 对于 n 阶图 G , 如果 G 含长度是 n 的圈, 则称 G 是 Hamilton 图. 若对任一整数 $k(3\le k\le n)$, G 都包含长度为 k 的圈, 则称 G 是泛圈图. 图 G 称为弱泛圈图是指 G 包含了每个长为 $l(g(G)\le l\le c(G))$ 的圈, 其中 $g(G)$, $c(G)$ 分别是 G 的围长与周长. 设 C 是图 G 中的圈, 我们将用 u^+ 来表示 u 在 C 上的后继点, u^- 来表示 u 在 C 上的前继点, $u^{++}=(u^+)^+$, $u^{--}=(u^-)^-$. 设 $x\in V(G)\backslash V(C)$, 若存在 $u\in V(C)$, 使得 xu, $xu^+\in E(G)$, 即 x 在圈 C 上有相继邻点, 则称顶点 x 在 C 上可插. 用 $\lfloor a\rfloor$ 表示不大于 a 的最大整数, 其他未定义的概念及术语见文献 [1].

关于图的泛圈性及弱泛圈性, 一些学者已经给出了许多结论 [2−8], 特别是按照边数给出了一些充分条件. 1971 年 Bondy 证明了边数不小于 $\frac{n^2}{4}$ 的 n 阶 Hamilton 图是泛圈图或二部图 [2], 随后 Häggkvist(1981) 等人证明了边数大于 $\frac{(n-1)^2}{4}+1$ 的 n 阶 Hamilton 图是泛圈图或二部图 [3]. 1997 年 Brandt 证明了下述结果.

* 国家自然科学基金 (10371048) 资助项目.
收稿日期：2006-03-28, 收到修改稿日期：2007-09-17.

定理 1.1[4]　设 G 为 n 阶非二部图，如果 $e(G) \geq \frac{(n-1)^2}{4}+1$, 则 G 是弱泛圈图.

更进一步， Brandt 认为条件还可以减弱，他在文章中提出了下述猜想.

猜想 1.2[4]　设 G 为 n 阶非二部图，如果 $e(G) > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 5$, 那么 G 是弱泛圈图.

1999 年 Bollobás 和 Thomason 证明了一个接近 Brandt 猜想的结论.

定理 1.3[5]　设 G 是 n 阶非二部图，如果 $e(G) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 59$, 那么 G 是弱泛圈图.

本文在假定图 G 为 Hamilton 图的前提下，对上述结果作出改进. 本文的主要结果为：

定理 1.4　设 G 是阶为 n 的 Hamilton 非二部图，如果 $e(G) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12$, 则 G 包含了每个长为 $l\,(4 \leq l \leq n)$ 的圈.

该定理的条件所确定的界不一定是最好的，根据猜想 1.2, 我们认为最好的界可能为 $e(G) > \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 5$. 因为对任意 $r \geq 3$, 由完全二部图 $K_{r-1,r}$ 和一个长为 4 的圈 C_4 构成的 $2r+1$ 阶 Hamilton 图 (C_4 的一边和较大部类的两个点关联) 不含长为 $2r$ 的圈，这是一类极值图.

2　主要引理

为了便于讨论，我们对本文定理 1.4 中的 n 进行限制. 由定理 1.1, 我们可以假定 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12 \leq \frac{(n-1)^2}{4} + 1$, 即 $n \geq 22$. 在本文的证明中要用到以下一些结论，显然将文 [5] 中引理 14,15 的条件换成 $e(G) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12$ 也是成立的，我们将这两个引理合并为引理 2.1.

引理 2.1[5]　设 G 是 n 阶非二部图， $e(G) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12$, 若 $ab \in E(G)$, 使得 $d(a)+d(b) \geq n-3$ 并且 $V(G)-\{a,b\}$ 是 Hamilton 图，则 G 含 $(n-1)$- 圈.

引理 2.2[6]　设 $C=(1,2,\cdots,n,1)$ 是图 G 的 Hamilton 圈，如果 $d(1)+d(n) \geq n$ 且 G 不含 $(n-1)$ - 圈，则有 $d(n-2)$, $d(n-1)$, $d(2)$, $d(3) < \frac{n}{2}$.

引理 2.3[9]　设 $C = x_1x_2x_3\cdots x_kx_1$ 为图 G 中的圈， $P = y_1y_2\cdots y_t (t \geq 2)$ 为 G 中的路，如果 P 中所有点都在 C 上可插，则 $G[V(C) \cup V(P)]$ 中含长为 $k+t$ 的圈.

引理 2.4[10]　设 G 为 n 阶图，如果 G 中不含 C_4 , 那么 $e(G) \leq \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$.

引理 2.5[5]　设 G 是 $2k+1$ 阶非二部图， $e(G) \geq k^2-k+10$, 如果存在点 $x \in V(G)$, 使得 $G-x$ 是 Hamilton 二部图，则 G 是弱泛圈图.

引理 2.6　令 H 是 n 阶 Hamilton 图，$e\,(H) \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12$, 那么 H 含 $(n-1)$ - 圈或含 $(n-2)$ - 圈，并且 H 含 $(n-2)$ - 圈时，圈外的点 x, y 满足 $xy \in E(H)$ 且 $d\,(x)+d(y) \geq n-3$.

证　设 Hamilton 圈上顶点依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 定义 $A_i = N(x_i)$, $d_i = |A_i|$, 其中 $1 \leq i \leq n$. 设 $A \subseteq V(H)$, 定义 $A^+ = \{x_{i+1} : x_i \in A\}$, $A^{++} = (A^+)^+$. 显然 $|A| = |A^+| = |A^{++}|$, 我们用反证法证明引理 2.6.

假设引理 2.6 不成立，则 H 不含 $(n-1)$- 圈，因此有

$$A_i^{++} \cap A_{i+1} = A_i^+ \cap A_{i+2} = \emptyset.$$

注意到 $A_i^{++} \cup A_{i+1} \subseteq V\,(H)$, $A_i^{+} \cup A_{i+2} \subseteq V\,(H)$, 故有

$$|V(H)| \geq \left|A_i^{++} \cup A_{i+1}\right| = \left|A_i^{++}\right| + |A_{i+1}| - \left|A_i^{++} \cap A_{i+1}\right| = d_i + d_{i+1},$$

同理可得

$$|V(H)| \geq d_i + d_{i+2}.$$

由于 $|V(H)| = n$, 因此得出

$$d_i + d_{i+1} \leq n, \quad d_i + d_{i+2} \leq n, \tag{1}$$

对于 $A, B, C \subseteq V(H)$ 及 $X \subseteq C \backslash (A \cup B)$ 显然有

$$|A \cap B| \geq |A \cap C| + |B \cap C| - |C| + |X|, \tag{2}$$

由容斥原理 [11], 对于 $A, B, C \subseteq V(H)$, 由于 $|A \cup B \cup C| \leq |V(H)| = n$, 则有

$$|A \cap B| \geq |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| - n. \tag{3}$$

令 $R = \{i : d_i + d_{i+1} \geq n-3\}$, 显然 $R \neq \emptyset$, 若不然, 则 $\forall i$ 有 $d_i + d_{i+1} \leq n-4$, 那么有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i + d_{i+1}) \leq n(n-4)$, 即 $e(H) \leq \frac{n^2}{4} - n$, 与已知矛盾, 故 R 不空. 如果存在 $i \in R$ 使 $H - \{x_i, x_{i+1}\}$ 含 $(n-2)$ - 圈, 则引理 2.6 已经成立. 因此假设对任何 $i \in R$ 都有 $H - \{x_i,\ x_{i+1}\}$ 不含 $(n-2)$ - 圈. 设 $2 \in R$, 因 $H - \{x_2, x_3\}$ 不含 $(n-2)$ - 圈, 那么 $A_1^+ \cap A_4 = \{x_3\}$. 考虑到 $A_1^+ \cap A_3 = \emptyset$, 在 (3) 式中取 $A = A_3, B = A_4, C = A_1^+$ 得

$$|A_3 \cap A_4| \geq d_1 + d_3 + d_4 - 1 - n.$$

又由于 $A_2^{++} \cap A_4^+ = A_2^+ \cap A_4 = \emptyset$, $A_2^{++} \cap A_3 = \emptyset$, 在 (3) 中取 $A = A_3$, $B = A_4^+$, $C = A_2^{++}$ 得

$$\left|A_3 \cap A_4^+\right| \geq d_3 + d_4 + d_2 - n.$$

现在有 $\left|A_3^+ \cap A_4^+\right| = |A_3 \cap A_4|$, 运用 (2) 式并令 $A = A_3$, $B = A_3^+$, $C = A_4^+$ 及 $X = \emptyset$ 故

$$\left|A_3 \cap A_3^+\right| \geq d_1 + d_2 + 2d_3 + d_4 - 2n - 1. \tag{4}$$

由对称性可得

$$\left|A_2 \cap A_2^+\right| \geq d_1 + 2d_2 + d_3 + d_4 - 2n - 1. \tag{5}$$

再在 (2) 式中取 $A = A_4, B = A_4^+, C = A_3, X = \{x_2\}$, 则有

$$\left|A_4 \cap A_4^+\right| \geq d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4 - 2n. \tag{6}$$

下面分 2 种情况证明

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \leq \frac{5n+1}{3}. \tag{7}$$

情况 1 $A_2 \cap A_2^+$ 与 $A_3 \cap A_3^+$ 都是空集.

根据 (4) 式与 (5) 式, 我们有

$$d_1 + d_2 + 2d_3 + d_4 \leq 2n+1, \quad d_4 + d_3 + 2d_2 + d_1 \leq 2n+1.$$

因此可以得出

$$3(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) \leq 4n + 2 + (d_1 + d_4).$$

又因为 $x_2, x_4 \notin A_1^+ \cup A_4$ 且 $A_1^+ \cap A_4 = \{x_3\}$, 所以

$$d_1 + d_4 = \left|A_1^+\right| + |A_4| = \left|A_1^+ \cup A_4\right| + \left|A_1^+ \cap A_4\right| \leq n - 1.$$

因而可以推出 (7) 式成立.

情况 2　$A_2^+\cap A_2$ 与 $A_3\cap A_3^+$ 至少有一个不是空集.

不妨设 $A_2\cap A_2^+\neq\emptyset$. 首先可以断言

$$A_1^{++}\cap A_3=\{x_2,x_4\}. \tag{8}$$

因为若不然, 设 $x_i\in A_1^{++}\cap A_3$, 由于 $A_1^{++}\cap A_2=A_2^{++}\cap A_3=\emptyset$, 从而导出 $\{x_{i-2},x_i\}\cap A_2=\emptyset$. 根据 $A_2\cap A_2^+\neq\emptyset$ 可得 x_2 在 $(n-2)$- 圈 $(x_3x_4\cdots x_{i-2}x_1x_n\cdots x_ix_3)$ 上有相继邻点，我们可将 x_2 插入到其相继邻点之间得到 G 中的 $(n-1)$- 圈，这样将与假设产生矛盾. 由条件 $A_2\cap A_2^+\neq\emptyset$ 还可以得出 $x_3x_n\notin E(G)$, 否则将 x_2 插入后也得 $(n-1)$- 圈，这样 $x_1\notin A_3^+$. 则 $A_1^{++}\cup A_3\cup A_3^+\subseteq V(H)-\{x_1\}$, 因而 $\left|A_1^{++}\cup A_3\cup A_3^+\right|\leq n-1$, 由该式可以得出

$$\begin{aligned}\left|A_3^+\cap A_3\right| &\geq \left|A_3^+\right|+|A_3|+\left|A_1^{++}\right|-\left|A_1^{++}\cap A_3\right|-\left|A_1^{++}\cap A_3^+\right|+\left|A_1^{++}\cap A_3\cap A_3^+\right|\\ &\geq 2d_3+d_1-2-(n-1)\\ &=2d_3+d_1-n-1.\end{aligned} \tag{9}$$

情况 2.1　若 $A_3^+\cap A_3=\emptyset$. 根据 (9) 式得 $d_1+2d_3\leq n+1$. 如果 $A_4\cap A_4^+=\emptyset$, 则由 (6) 式得出 $d_1+d_2+d_3+2d_4\leq 2n$, 因此有

$$\begin{aligned}3\left(d_1+d_2+d_3+d_4\right) &= (d_1+2d_3)+(d_1+d_2+d_3+2d_4)+(d_1+d_2)+(d_2+d_4)\\ &\leq (n+1)+2n+2n\\ &=5n+1,\end{aligned}$$

$$d_1+d_2+d_3+d_4\leq\frac{5n+1}{3}.$$

下设 $x_{i+1}\in A_4\cap A_4^+$, 则 $i\neq 3,4,5$. 因 G 无 $(n-1)$- 圈，则 $x_2x_n,x_4x_6\notin E(G)$, 并且类似于 (8) 的证明我们可以得出 $x_1x_4,x_2x_5\notin E(G)$. 因此 $A_2^+\cup A_4\subseteq V(H)-\{x_1,x_6\}$, 所以

$$d_2+d_4=\left|A_2^+\cup A_4\right|+\left|A_2^+\cap A_4\right|\leq n-2.$$

由于 $d_2+d_3\geq n-3$, 那么

$$\begin{aligned}3(d_1+d_2+d_3+d_4) &= 2(d_1+2d_3)+(d_1+d_2)+3(d_2+d_4)-(d_2+d_3)\\ &\leq 2(n+1)+n+3(n-2)-(n-3)\\ &<5n+1,\end{aligned}$$

$$d_1+d_2+d_3+d_4\leq\frac{5n+1}{3}.$$

情况 2.2　若 $A_3^+\cap A_3\neq\emptyset$. 我们可以断言：$A_1^{++}\cap A_4=\emptyset$, 若不然令 $x_i\in A_1^{++}\cap A_4$, 则有 $x_2x_{i-1}\notin E(H)$, 否则有 $(n-1)$- 圈 $(x_ix_{i+1}\cdots x_1x_2x_{i-1}x_{i-2}\cdots x_4x_i)$. 同理 $x_3x_{i-1}\notin E(H)$. 考虑到条件 $A_2\cap A_2^+\neq\emptyset$ 及 $A_3^+\cap A_3\neq\emptyset$, 这样 x_2 及 x_3 在圈 $(x_ix_{i+1}\cdots x_1x_{i-2}x_{i-3}\cdots x_4x_i)$

上都有相继邻点，即路 x_2x_3 上的所有点在该 $(n-3)$- 圈上可插，由引理 2.3 得出 H 中含有 $(n-1)$- 圈，矛盾．故 $A_1^{++}\cap A_4=\emptyset$. 这样由 (3) 式可得

$$\begin{aligned}\left|A_1^+\cap A_3^+\right| &= \left|A_1^{++}\cap A_3^{++}\right|\\ &\geq \left|A_1^{++}\right|+\left|A_4\right|+\left|A_3^{++}\right|-\left|A_1^{++}\cap A_4\right|-\left|A_3^{++}\cap A_4\right|-n\\ &= d_1+d_3+d_4-n,\end{aligned}$$

再由 (2) 式及 (9) 式可得

$$\begin{aligned}\left|A_1^+\cap A_3\right| &\geq \left|A_1^+\cap A_3^+\right|+\left|A_3\cap A_3^+\right|-\left|A_3^+\right|+\left|\{x_5\}\right|\\ &= (d_1+d_3+d_4-n)+(d_1+2d_3-n-1)-d_3+1\\ &= 2d_1+2d_3+d_4-2n,\end{aligned}$$

因为 $A_1^+\cap A_3=\emptyset$, 所以 $2d_1+2d_3+d_4\leq 2n$, 对称的有 $2d_4+2d_2+d_1\leq 2n$. 因而得到

$$\begin{aligned}&3d_1+2d_2+2d_3+3d_4\leq 4n,\\ &d_1+d_2+d_3+d_4\leq \frac{4n+(d_2+d_3)}{3}<\frac{5n+1}{3}.\end{aligned}$$

综上所述， $2\in R$ 时， $d_1+d_2+d_3+d_4\leq\frac{5n+1}{3}$. 同理 $i\in R$ 时，可得

$$d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2}\leq\frac{5n+1}{3}. \tag{10}$$

下证 $i\notin R$ 必有

$$d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2}\leq 2n-2. \tag{11}$$

假设 $(d_{i-1}+d_i)+(d_{i+1}+d_{i+2})\geq 2n-1$. 因为 $d_{i-1}+d_i\leq n, d_{i+1}+d_{i+2}\leq n$, 不妨设 $d_{i-1}+d_i=n$, $d_{i+1}+d_{i+2}\geq n-1$. 由引理 2.2 可得 d_{i+1}, $d_{i+2}<\frac{n}{2}$, 因此有 $d_{i+1}=d_{i+2}=\frac{n-1}{2}$. 由于 $d_{i+1}+d_{i-1}\leq n$, 故

$$\begin{aligned}&d_{i-1}\leq n-d_{i+1}\leq\frac{n+1}{2},\\ &d_i=n-d_{i-1}\geq n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2},\\ &d_i+d_{i+1}\geq n-1>n-3.\end{aligned}$$

这样 $i\in R$, 与 $i\notin R$ 矛盾．因此对 $R=\{i:d_i+d_{i+1}\geq n-3\}$, (11) 式成立.

另一方面，因为 $\sum\limits_{x\in V(G)}d(x)=2e(G)$, 所以

$$\begin{aligned}8e\left(G\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2}\right)\\ &= \sum_{i\in R}\left(d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2}\right)+\sum_{i\notin R}\left(d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2}\right)\\ &\leq |R|\cdot\frac{5n+1}{3}+\left(n-|R|\right)\left(2n-2\right).\end{aligned}$$

令 $r=|R|$, 并考虑 $e(G)\geq\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12$, 因此有

$$8\Big(\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12\Big)\leq\frac{(5n+1)\,r}{3}+(2n-2)\,(n-r)\,,$$

即

$$(r-18)(n-7)+162\leq 0. \tag{12}$$

由于 $n\geq 22$, 则 $r<18$. 如果 $n\leq\frac{7r}{3}$, 那么根据 (12) 式可以得出 $(r-18)\,(\frac{7}{3}r-7)+162\leq 0$ 即 $(r-\frac{21}{2})^2+\frac{369}{28}\leq 0$, 矛盾. 如果 $n>\frac{7}{3}r$, 则有

$$\begin{aligned}8e\,(G)&=\sum_{i=1}^{n}(d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2})\\&=\sum_{i\in R}(d_{i-1}+d_i+d_{i+1}+d_{i+2})+\sum_{i\notin R}(d_{i-1}+d_i)+\sum_{i\notin R}(d_{i+1}+d_{i+2}),\end{aligned}$$

对 $\sum\limits_{i\notin R}(d_{i-1}+d_i)$ 而言，最多有 r 项使得 $i-1\in R$, 此时剩下的 $n-2r$ 项使 $i-1\notin R$, 因而

$$\sum_{i\notin R}(d_{i-1}+d_i)\leq rn+(n-2r)\,(n-4)\,.$$

同理

$$\sum_{i\notin R}(d_{i+1}+d_{i+2})\leq rn+(n-2r)\,(n-4)\,,$$

因此得到

$$8\Big(\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12\Big)\leq 8e\,(G)\leq\frac{r\,(5n+1)}{3}+2\,[rn+(n-2r)\,(n-4)]\,,$$

即

$$r\,(n-49)+288\leq 0.$$

考虑到 $n>\frac{7}{3}r$, 故 $r(\frac{7}{3}r-49)+288\leq 0$ 即 $(r-\frac{21}{2})^2+\frac{369}{28}\leq 0$, 矛盾. 引理得证.

引理 2.7 令 G 是 $n=2k+1$ 阶非二部图， $e(G)\geq\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12$, C 是 G 中长为 $2k-1$ 的圈， $a,b\in V(G-C)$ 且 $ab\in E(G)$, 若 $d(a)=d(b)=k$, 则 G 是弱泛圈图.

证　由于 $e(G)\geq\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-n+12>\frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$, 由引理 2.4 知， G 含 C_4 . 又根据引理 2.1 可知 G 含 $(n-1)$- 圈. 假设 G 不是弱泛圈图，则存在 $l\,(3\leq l\leq 2k-4)$, 使得 G 不含 $(l+2)$- 圈，我们在图 G 中定义

$$e(x,y)=\begin{cases}1, & xy\in E(G),\\[2ex] 0, & xy\notin E(G).\end{cases}$$

令 $C=(1,2,\cdots,2k-1)$, 显然，对于 C 上的两点 i 与 $i+l$ 一定有 $e\,(a,i)+e\,(a,i+l)\leq 1$. 否则有 $e\,(a,i)+e\,(a,i+l)=2$, 那么一定存在 $(l+2)$- 圈 $(a,i,i+1\cdots i+l,a)$. 因此

$$2(k-1)=2d_C\,(a)=\sum_{i=1}^{2k-1}\,(e\,(a,i)+e\,(a,i+l)),$$

故和式 $\sum\limits_{i=1}^{2k-1}(e(a,i)+e(a,i+l))$ 的 $2k-1$ 项中，仅一项是 0, 其余均为 1. 我们在点集 $V(C)=\{1,2,\cdots 2k-1\}$ 上定义如下一个等价关系

$$i \text{ 与 } j \text{ 等价} \Longleftrightarrow \exists\lambda\in N, \text{使得 } i\equiv j+\lambda l(\bmod\ 2k-1).$$

其中 N 表示自然数，这样任一元素 j 的等价类 $[j]=\{j,j+l,\cdots j+nl\}(\text{mod}2k-1)$, 其中 $(n+1)l\equiv 0(\bmod 2k-1)$, 即每个等价类中有 $n+1$ 个元素. 由于每个等价类中元素个数相同, 且 $|V(C)|=2k-1$, 故每个等价类中有奇数个元素. 因此每个等价类中都存在两点 $ml,(m+1)\,l$ 使得

$$e\,(a,ml)+e\,(a,(m+1)\,l)=0.$$

故 $V(C)$ 上只有一个等价类,则 l 与 $(2k-1)$ 互素,记为 $(l,2k-1)=1$. 不妨设 $e\,(a,l)+e\,(a,2l)=0$, 所以得 $e\,(a,l)=0,\ e(a,2l)=0,\ e\,(a,3l)=1,\ e(a,4l)=0,\ e\,(a,5l)=1,\ \cdots e\,(a,(2k-1)l)=1$. 这样圈 C 上与 a 点相邻的点集为 $\{3l,5l,7l\cdots(2k-1)\,l\}\,(\bmod\ 2k-1)$.

同样 b 点与圈 C 上相邻的点集也为 $\{3l,5l,7l,\cdots,(2k-1)\,l\}\,(\text{mod}2k-1)$. 否则若 b 点与 $\{2l,4l,\cdots,(2k-2)\,l\}$ 相邻，那么 G 一定为弱泛圈图，矛盾. 若 b 点与 $\{l,3l,5l,\cdots,(2k-3)l\}$ 相邻，由 $(l,2k-1)=1$ 知，存在 t 使 $tl\equiv l-1(\text{mod}2k-1)$, 显然 $2\le t\le 2k-2$. 若 t 为偶数，则 $e\,(a,(t+1)\,l)=1$; 若 t 为奇数，则 $e\,(a,(2k-t)\,l)=1$. 而 $e(b,l)=1$, 两种情形 a,b 均分别与圈 C 上长为 $l-1$ 的路的两端点相邻，这样形成了 $(l+2)$ - 圈，与假设矛盾.

当 a 与 b 在圈 C 上有相同的邻点时，若 t 为偶数且 $t\ne 2k-2$ 时，由 $e\,(a,3l)=1$ 以及 $e(b,(t+3)l)=1$ 可得 $(l+2)$- 圈, 矛盾. 若 t 为奇数, 由 $e(a,3l)=1$ 及 $e\,(b,(2k+2-t)l)=1$ 也可得到 $(l+2)$- 圈, 又产生矛盾. 如果 $t=2k-2$, 即 $(2k-2)\ l=l-1$ 或 $2l-1\equiv 0\,(\bmod\ 2k-1)$ 时，则有 $l=k$, 那么圈 C 上与 a 及 b 相邻的点集为 $\{k+1,k+2,k+3,\cdots,2k-1\}$, 若点集 $\{k+1,k+2,\cdots,2k-1\}$ 中,除属于圈 C 上的边外,还有边相邻或者与点集 $\{k+1,k+2,\cdots,2k-1\}$ 中有边相邻 (除 C 上的边外), 则 G 一定为弱泛圈图，这样与假设矛盾. 否则

$$e\,(G)\le\begin{pmatrix}k+1\\2\end{pmatrix}+k-1=\frac{k^2+3k-2}{2},$$

与已知 $e\,(G)\ge k^2-k+11$ 矛盾. 故引理得证.

3 定理 1.4 的证明

为了利用归纳法证明定理 1.4, 我们必须考虑从 G 中取走一点 x 后，剩下图的边数是否仍满足定理 1.4 的条件，即要求

$$e(G-x)=e(G)-d(x)\ge\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor-(n-1)+12.$$

这样就有 $d(x)\le\frac{n}{2}-1$. 因此定义图 G 中满足 $d(x)\le\frac{n}{2}-1$ 的点 x 为低次点，$d(x)>\frac{n}{2}-1$ 的点 x 为高次点. 同时我们限定定理 1.4 中的最小次 $\delta(G)\ge 2$. 因为若 $\delta(G)\le 1$, 令 $d(u)=\delta(G)$, 那么 $G-u$ 仍为非二部图且 $e(G-u)\ge\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor-(n-1)+12$, 由归纳假设可以得到 G 是弱泛圈图，下面用归纳法证明定理 1.4.

证 因为 $c(G)=n$, 由引理 2.6 及引理 2.1 得出 G 一定含 $(n-1)$- 圈，令其为 C. 设 $x\in G-C$, 若 x 是低次点且 $G-x$ 不是二部图，则由归纳假设知 $G-x$ 是弱泛圈图，因而 G 也是弱泛圈图. 若 x 是低次点且 $G-x$ 为二部图，则 $(n-1)$ 为偶数，故 n 为奇数. 令 $n=2k+1$, 显然 $e(G)\geq k^2-k+10$, 由引理 2.5 可得 G 是弱泛圈图.

如果 $x\in G-C$ 是高次点，当 $n=2k+2$ 时以及 $n=2k+1$ 且 $d(x)\geq k+1$ 时，则 $\forall\, l(3\leq l\leq n)$, $\exists i$ 使得 $x_ix_{i+l-2}\in N(x)$, 这样 G 含长为 l 的圈 $xx_ix_{i+1}\cdots x_{i+l-2}x$, 此时 G 为泛圈图，因此以下仅考虑 $n=2k+1$ 且 $d(x)=k$ 的情况.

a) 如果 x 与 C 上的点交错相邻，则 C 上一定有一条偶弦，否则 G 为二部图，而此时 G 中一定存在每个长为 $l(3\leq l\leq n)$ 的圈，则 G 为弱泛圈图.

b) 如果 x 与 C 上的点不交错相邻，那么 G 一定含有长为 $(2k-1)$ 的圈 D , 若假设 G 不含 $(2k-1)$ - 圈. 令 $C=(1,2,\cdots,2k)$, 显然有 $e(x,i)+e(x,i+3)\leq 1$, 由于

$$2d(x)=2k=\sum_{i=1}^{2k}\left(e(x,i)+e(x,i+3)\right),$$

故对任意 i 都有 $e(x,i)+e(x,i+3)=1$. 由 $d_C(x)=\frac{|C|}{2}$ 以及 x 与 C 上的点不交错相邻可知， x 在 C 上一定有相继邻点. 不妨设 $\{1,2\}\subseteq N_C(x)$, 由于 $e(x,2k)+e(x,3)=1$, 不妨设 $e(x,3)=1$, 易知

$$N(x)=\{1,2,3,7,8,9,\cdots,2k-5,2k-4,2k-3\},$$

其中 $6\mid 2k$. 令 $\overline{N}(x)=V(C)-N(x)$. 如果对所有 $i\in\overline{N}(x)$ 都有 $d(i)=2$, 则

$$\sum_{y\in V(G)}d\left(y\right)\leq k+2k+k\left(k+1\right).$$

所以 $k^2-2k+22\leq 2e(G)\leq k+2k+k(k+1)$, 矛盾. 因此存在 $i\in\overline{N}(x)$, 使 $d(i)\geq 3$.

下设 $ij\in E(C)$, 其中 $j\neq i\pm 1$, 我们将构造存在 G 中的 $(2k-1)$- 圈. 显然如果 $j=i\pm 2$, G 中有 $(2k-1)$- 圈. 故以下考虑 $|i-j|\geq 3$.

1) 若 $j+1\in N(x)$, 由 $i+3\in N(x)$, 那么 G 中存在 $(2k-1)$- 圈 $(x,i+3,i+4,\cdots j,i,i-1\cdots j+1,x)$. 同理 $j-1\in N(x)$ 时，因为 $i-3\in N(x)$, 则 G 中存在 $(2k-1)$- 圈 $(x,i-3,i-4\cdots j,i,i+1\cdots j-1,x)$.

2) 若 $j+1\notin N(x), j-1\notin N(x)$. 由 $j-1\notin N(x)$ 得：$j\neq 2,3,4(\bmod 6)$, 由 $j+1\notin N(x)$ 则得：$j\neq 1,2,0(\bmod 6)$, 所以 $j\equiv 5(\bmod 6)$. 此时 $\{j-2,j+2\}\subseteq N(x)$. 又 $\{i-2,i+2\}\cap N(x)\neq\emptyset$, 不妨设 $i-2\in N(x)$, 则 G 含 $(2k-1)$- 圈 $(x,i-2,i-3\cdots j,i,i+1\cdots j-2,x\}$. 综上得出 G 中含有长为 $(2k-1)$ 的奇圈.

令 D 为 G 中长为 $(2k-1)$ 的奇圈， $x,y\in G-D$, 当 x 为低次点时，因为 $D\subset G-x$, 则 $G-x$ 为非二部图，由归纳假设 $G-x$ 为弱泛圈图可知， G 也是弱泛圈图. 当 $d(x)>k$ 时，若 $d_D(x)>k-1$, 此时 G 为弱泛圈图，若 $d(x)=d(y)=k$ 且 $xy\in E(G)$, 由引理 2.7 知 G 也是弱泛圈图. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bondy J A and Murty U S R. Graph Theory with Application. London: The Macmillan Press, 1976.
[2] Bondy J A. Pancyclic graphs. *J. Combin Theory*, 1971, **B**(11): 80–84.
[3] Häggkvist R, Faudree R J and Schelp R H. Pancyclic graphs-connected Ramsey number. *Ars Combin*, 1981, **11**: 37–49.
[4] Brandt S. A sufficient condition for all short cycles. *Discrete Applied Math.*, 1997, **79**: 63–66.
[5] Bollobás B and Thomason A. Weakly pancyclic graphs. *J. Combin Theory*, 1999, **B**(77): 121–137.
[6] Schmeichel E F and Hakimi S L. A cycle structure theorem for Hamiltonian graph. *J. Combin Theory*, 1988, **B**(45): 99–107.
[7] Ren H. Another cycle structure theorem for Hamiltonian graphs. *Discrete Math.*, 1999, **199**: 237–243.
[8] Jackson B and Wormald N C. Longest cycle in 3-connected planar graphs. *J. Combin Theory*, 1992, **B**(54): 291–321.
[9] Zhang C. Hamilton cycles in claw free graphs. *J. Graph Theory*, 1988, **12**: 209–216.
[10] Bollobás B. Modern Graph Theory. Beijing: The Press of Science, 2001, 113–114.
[11] 毛经中. 组合数学基础. 武汉：华中师范大学出版社， 1990.

A WEAKLY PANCYCLIC THEOREM FOR HAMILTONIAN NON-BIPARTITE GRAPHS

HE Fangguo

(*Institute of Systems Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan* 430074)

HU Zhiquan

(*School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Wuhan* 430074)

Abstract An n-vertex graph is called weakly pancyclic if it contains cycles of all lengths between its girth and circumference. In 1977, Brandt conjectured that an n-vertex non-bipartite graph with more than $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 5$ edges is weakly pancyclic. Bollobás and Thomason(1999) proved that every non-bipartite graph of order n and size at least $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 59$ is weakly pancyclic. In this paper, the following result is established: let G be a Hamiltonian non-bipartite graph of order n and size at least $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - n + 12$, then G is weakly pancyclic.

Key words Non-bipartite graph, Hamiltonian graph cycle, weakly pancyclic graph.