系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(4) (2009, 4), 567–576

Stampacchia 广义向量拟均衡问题 II*

王三华 傅俊义

(南昌大学数学系，南昌 330031)

摘要 通过引进锥对角拟凸概念，讨论了 Stampacchia 广义向量拟均衡问题解的存在性. 由于该问题包含了许多形式的变分不等式与均衡问题作为特例，所得解的存在性结果推广和发展了近期的一些研究结果，主要有以下两个方面： 1) 放宽了对连续性的要求； 2) 由数值型推广到了向量型.

关键词 广义向量拟均衡问题，局部凸空间， C- 对角拟凸，连续选择，不动点.

MR(2000) 主题分类号 49J27

1 引 言

设 X 为非空子集，实值函数 $f: X\times X\to R$ 满足 $f(x,x)\geq 0$, $\forall x\in X$. 所谓均衡问题 (简记为 EP) 为：求 $\overline{x}\in X$ 使得

$$\text{(EP)} \qquad f(\overline{x},x)\geq 0,\quad \forall x\in X.$$

均衡问题是变分不等式的推广，在许多方面都有广泛的应用，如数学规划、偏微分方程、博奕论、自动控制、经济等，因而被许多数学工作者所关注、研究. 如今，均衡问题已被推广到了向量形式，并得到了丰富的解的存在性结果 (见近期论文集 [1–2] 及其他文献).

设 X 为拓扑线性空间 E 中的非空凸子集， C 为另一拓扑线性空间 Z 中以原点 O 为顶点的闭凸锥，且其内部 $\mathrm{int}C\neq\emptyset$. 给定映射 $f: X\times X\to Z$. 向量均衡问题 (简记为 VEP) 有两种基本类型. 第一型向量均衡问题为：求 $\overline{x}\in X$, 使得

$$\text{(VEP 1)} \qquad f(\overline{x},x)\notin -\mathrm{int}C,\quad \forall x\in X;$$

第二型向量均衡问题为：求 $\overline{x}\in X$, 使得

$$\text{(VEP 2)} \qquad f(\overline{x},x)\notin -C\backslash\{0\},\quad \forall x\in X.$$

众所周知，目前大多数的研究是限于 (VEP 1) 解的存在性问题以及解集的性质，而对 (VEP 2) 的研究还是比较少，主要是因为在通常情况下 $C\backslash\{0\}$ 既非开集又非闭集，给研究工作带来了较大困难.

---

* 国家自然科学基金 (10561007), 江西省自然科学基金 (2007GZS2120) 和南昌大学校基金 (Z03363) 资助课题.

收稿日期：2006-07-13.

本文要讨论比上面的 (VEP) 更为一般的向量均衡问题.

设 X,E,C,Z 如上所述，又设 D 为又一拓扑线性空间 W 中的一个非空子集. 给定集值映射 $K:X\to 2^X$, $F:X\to 2^D$ 和单值映射 $f:X\times D\times X\to Z$. 我们要研究下面两类广义向量拟均衡问题 (简记为 GVQEP). 第一型广义向量拟均衡问题为：求 $\overline{x}\in X$ 以及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得 $\overline{x}\in K(\overline{x})$ 且

$$\text{(GVQEP 1)}\qquad f(\overline{x},\overline{y},x)\notin -\mathrm{int}C,\quad \forall x\in K(\overline{x});$$

第二型广义向量拟均衡问题为：求 $\overline{x}\in X$ 以及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得 $\overline{x}\in K(\overline{x})$ 且

$$\text{(GVQEP 2)}\qquad f(\overline{x},\overline{y},x)\notin -C\backslash\{0\},\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

按 Giannessi[2] 的说法，我们将上述 (GVQEP 2) 称为 Stampacchia 广义向量拟均衡问题 (简记为 SGVQEP). 据我们所知，目前这类问题的研究还比较少.

本文主要解决 (SGVQEP) 解的存在性，是文献 [3] 的继续，但采用的方法与文献 [3] 是不同的. 本文采用连续选择定理和 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理，在适当条件下得出了解的存在性结果. 该方法允许我们放宽对连续性的要求. 由于本文讨论的问题是许多形式的变分问题与均衡问题的推广，因而本文所得结果推广和发展了近期的一些研究结果.

2 预备知识

在这节里，我们将给出文中要用到的一些定义和引理.

定义 2.1[4] 设 E,Z 为两个拓扑空间， $F:E\to 2^Z$ 为集值映射.

i) 称 F 在 $x\in E$ 为上半连续 (简写为 u.s.c.), 如果对包含 $F(x)$ 的每一开集 V, 存在包含 x 的开集 U, 使得 $\forall t\in U$, 有 $F(t)\subset V$; 称 F 在 E 上为 u.s.c., 如果 F 在 E 上的每一点为 u.s.c.;

ii) 称 F 在 $x\in E$ 为下半连续 (简写为 l.s.c.), 如果对每一开集 V 且 $F(x)\cap V\neq\emptyset$, 存在包含 x 的开集 U, 使得 $\forall t\in U$, 有 $F(t)\cap V\neq\emptyset$; 称 F 在 E 上为 l.s.c., 如果 F 在 E 上的每一点为 l.s.c.;

iii) 称 F 在 E 上为连续的，如果 F 在 E 上为 u.s.c. 且 l.s.c.

定义 2.2(文 [5] 中的第 530 页) 设 E,Z 为 Hausdorff 拓扑线性空间， $X\subset E$ 为非空闭子集， $C\subset Z$ 为顶点在原点 O 的闭凸点锥，且 $\mathrm{int}C\neq\emptyset$. 映射 $f:X\to Z$.

i) 称 f 为 C-l.s.c., 如果 $\forall a\in Z$, 水平集

$$L(a)=\{x\in X:\ f(x)-a\notin \mathrm{int}C\}$$

在 X 中闭;

ii) 称 f 为 C-u.s.c., 如果 $\forall a\in Z$, 水平集

$$U(a)=\{x\in X:\ f(x)-a\notin -\mathrm{int}C\}$$

在 X 中闭.

注 2.1 1) 由上述定义知 f 为 C-l.s.c. $\Longleftrightarrow -f$ 为 C-u.s.c.;

2) 当 $Z=R, C=R_+=[0,+\infty)$ 时, 上面的 C-l.s.c. (C-u.s.c.) 就是通常函数的 l.s.c.(u.s.c.).

设 Z 为一 Hausdorff 拓扑线性空间， Z^* 为其拓扑对偶空间， $C\subset Z$ 为顶点在原点 O 的闭凸点锥，且 $\mathrm{int}C\neq\emptyset$. 我们用 C^* 表示 C 的对偶锥，即

$$C^*=\{\ell\in Z^*:\ \ell(x)\geq 0,\ \forall x\in C\},$$

并用 $C^\#$ 表示 C^* 的拟内部，即

$$C^\#=\{\ell\in Z^*:\ \ell(x)>0,\ \forall x\in C\backslash\{0\}\}.$$

由文献 [6] 中的推论 3.19 知，若 Z 为实局部凸空间， $C\subset Z$ 为凸锥且有基，则 $C^\#\neq\emptyset$.

引理 2.1(文 [5] 中的引理 2.4)　若 $f: X\to Z$ 为 C-l.s.c., $\xi\in C^*$, 则 $\xi\circ f$ 为 l.s.c.

定义 2.3 设 X 为拓扑线性空间 E 中的非空凸子集， Z 为另一拓扑线性空间， $C\subset Z$ 为顶点在原点 O 的闭凸点锥. 映射 $f:\ X\times X\to Z$.

i) 称 $f(x,y)$ 关于 y 为 C- 对角凸，如果对任一有限子集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset X$ 及任一 $y_\lambda\in \mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ $\Big($即 $y_\lambda=\sum\limits_{j=1}^m\lambda_jy_j,\ \lambda_j\geq 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^m\lambda_j=1\Big)$, 有

$$\sum_{j=1}^m\lambda_jf(y_\lambda,y_j)\in C;$$

ii) 称 $f(x,y)$ 关于 y 为 C- 对角拟凸，如果对任一有限子集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset X$ 及任一 $y_\lambda\in \mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$, 存在某 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得

$$f(y_\lambda,y_j)\in C;$$

iii) 称 $f(x,y)$ 关于 y 为 C- 对角 (拟) 凹，如果 $-f(x,y)$ 关于 y 为 C- 对角 (拟) 凸.

下面的例子说明了 C- 对角凸与 C- 对角拟凸之间不具有蕴涵关系.

例 2.1 设 $E=R, X=[0,1], Z=R^2, C=R^2_+$. $\forall(x,y)\in X\times X$, 令

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x-y\\ y-x\end{pmatrix},\qquad g(x,y)=\begin{pmatrix}\min\{x,y\}-x\\ y-\min\{x,y\}\end{pmatrix},$$

则 $f,g: X\times X\to Z$. 对任一有限子集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset X$ 及任一 $y_\lambda\in \mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ $\Big($即 $y_\lambda=\sum\limits_{j=1}^m\lambda_jy_j,\ \lambda_j\geq 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^m\lambda_j=1\Big)$, 有

$$\sum_{j=1}^m\lambda_jf(y_\lambda,y_j)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^m\lambda_j(y_\lambda-y_j)\\ \sum\limits_{j=1}^m\lambda_j(y_j-y_\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_\lambda-y_\lambda\\ y_\lambda-y_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in C.$$

又 $y_\lambda\in \mathrm{co}\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$, 故必存在某 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$, 使得 $y_j\geq y_\lambda$, 从而

$$g(y_\lambda,y_j)=\begin{pmatrix}\min\{y_\lambda,y_j\}-y_\lambda\\ y_j-\min\{y_\lambda,y_j\}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_\lambda-y_\lambda\\ y_j-y_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ y_j-y_\lambda\end{pmatrix}\in C.$$

因此 f 为 C- 对角凸， g 为 C- 对角拟凸.

另一方面，由于 $\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\}\subset X$, $y_\lambda=\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{2}\in \mathrm{co}\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\}$. 但是

$$f\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\Big)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{12}\\[2mm] -\dfrac{1}{12}\end{pmatrix}\notin C;\quad f\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\Big)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{6}\\[2mm] \dfrac{1}{6}\end{pmatrix}\notin C;$$

$$\frac{2}{3}g\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{3}g\Big(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\Big)=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{18}\\[2mm] \dfrac{1}{18}\end{pmatrix}\notin C,$$

所以 f 非 C- 对角拟凸，g 非 C- 对角凸.

定义 2.4[7] 设 E,Z 为两个拓扑空间，$T:E\to 2^Z$ 为集值映射.

i) $\forall y\in Z$, $\quad T^{-1}(y)=\{x\in E: y\in T(x)\}$ 称为 T 的下截口；

ii) 称 T 有局部交性质，如果对任一 $x\in E$, $T(x)\neq\emptyset$, 则存在包含 x 的开集 $N(x)$, 使得 $\bigcap\limits_{z\in N(x)}T(z)\neq\emptyset$.

注 2.2 若 T 有开的下截口，则 1) T 有局部交性质； 2) T 为 l.s.c.

证 1) 见文献 [7] 中第 63 页注 1.

2) 任取 $x\in E$. 对任一开集 V 且 $T(x)\cap V\neq\emptyset$, 任意取定 $y\in T(x)\cap V$, 则 $x\in T^{-1}(y)$. 因为 T 有开的下截口，所以 $T^{-1}(y)$ 为开集. 取 $U=T^{-1}(y)$, 则 U 为包含 x 的开集. 从而 $\forall z\in U=T^{-1}(y)$, 有 $y\in T(z)$. 又 $y\in V$, 故 $y\in T(z)\cap V$, $\forall z\in U$. 因此 T 在 x 点为 l.s.c. 再由 x 的任意性知，T 在 E 上为 l.s.c.

下面的几个引理是我们的重要工具.

引理 2.2[8] 设 E,Z 为两个拓扑空间. 假若映射 $G,K:E\to 2^Z$ 有开的下截口，则映射 $\theta:E\to 2^Z$, 定义为 $\theta(x)=G(x)\cap K(x)$, $\forall x\in E$, 有开的下截口.

引理 2.3[8] 设 E 为拓扑线性空间，D 为另一拓扑线性空间中的非空凸子集. 假若映射 $G:E\to 2^D$ 有开的下截口，则映射 $F:E\to 2^D$, 定义为 $F(x)=\mathrm{co}G(x)$, $\forall x\in E$, 有开的下截口.

引理 2.4(文 [8] 中的连续选择定理 1) 设 E 为非空仿紧的 Hausdorff 拓扑线性空间，Z 为另一拓扑线性空间. 假若映射 $F:E\to 2^Z$ 有非空凸值且有开的下截口，则 F 有连续选择，即存在连续映射 $f:E\to Z$, 满足 $f(x)\in F(x)$, $\forall x\in E$.

引理 2.5(文 [9] 中的 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理) 设 E 为局部凸的 Hausdorff 拓扑线性空间，X 为 E 中的非空紧凸集. 若 $T:X\to 2^X$ 为有非空闭凸值的 u.s.c. 映射，则 T 在 X 中存在不动点，即 $\exists\,\overline{x}\in X$, 使得 $\overline{x}\in T(\overline{x})$.

3 主要结果

定理 3.1 设 X,D 分别为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E,W 中的非空紧凸子集，C 为另一 Hausdorff 拓扑线性空间 Z 中的以原点 O 为顶点的闭凸点锥且 $\mathrm{int}C\neq\emptyset, C^{\#}\neq\emptyset$. 假设

i) $K:X\to 2^X$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值及开的下截口；

ii) $F : X \to 2^D$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值；

iii) $f : X \times D \times X \to Z$ 为单值映射，且 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 C-u.s.c., 关于 z 为 C- 对角拟凸；

则 (SGVQEP) 有解.

证　我们采用文献 [10] 的证法. 任取 $\xi \in C^{\#}$, 令

$$\phi(x,y,z) = -\xi f(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in X \times D \times X.$$

我们要证 $\exists \overline{x} \in X$ 及 $\overline{y} \in F(\overline{x})$, 使得 $\overline{x} \in K(\overline{x})$ 且

$$\phi(\overline{x},\overline{y},x) \le 0, \quad \forall x \in K(\overline{x}). \tag{1}$$

定义集值映射 $P, G : X \times D \to 2^X$ 如下， $\forall (x,y) \in X \times D$,

$$P(x,y) = \{z \in X : \phi(x,y,z) > 0\};$$
$$G(x,y) = K(x) \cap \mathrm{co}P(x,y).$$

先证 $\exists \overline{x} \in K(\overline{x})$ 及 $\overline{y} \in F(\overline{x})$, 使得 $G(\overline{x},\overline{y}) = \emptyset$.

令 $U = \{(x,y) \in X \times D : G(x,y) \ne \emptyset\}$.

1) 若 $U = \emptyset$, 则 $\forall x \in X,\ y \in D,\ G(x,y) = \emptyset$. 此时，只需证明 $(K(x), F(x))$ 有不动点 $(\overline{x},\overline{y})$ 即可. 而这由条件 i), ii) 及 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理即可得.

2) 若 $U \ne \emptyset$.

已知 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 C-u.s.c., 由注 2.1 及引理 2.1, $\phi(x,y,z)$ 关于 x,y 为 l.s.c. 从而， $\forall z \in X,\ P^{-1}(z) = \{(x,y) \in X \times D : \phi(x,y,z) > 0\}$ 为开集，即 P 有开的下截口. 再由引理 2.3, co$P$ 有开的下截口. 又 K 有开的下截口，由引理 2.2, G 有开的下截口，从而映射 $G|_U : U \to 2^X$ 有开的下截口. 又 K 有非空凸值，所以 $G|_U$ 在 U 上有非空凸值. 由于 X, D 是紧的，从而是仿紧的. 因此由连续选择定理 1, $G|_U$ 有连续选择： $g : U \to X$, 满足 $g(x,y) \in G(x,y),\ \forall (x,y) \in U$. 由于映射 G 有开的下截口，从而为 l.s.c., 因此 U 为开集. 定义映射 $M : X \times D \to 2^{X \times D}$ 如下

$$\forall (x,y) \in X \times D, \quad M(x,y) = \begin{cases} (g(x,y), F(x)), & (x,y) \in U; \\ (K(x), F(x)), & \text{其他}. \end{cases}$$

则由已知条件，易知 M 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值. 因此由 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理， $\exists (\overline{x},\overline{y}) \in X \times D$, 使得 $(\overline{x},\overline{y}) \in M(\overline{x},\overline{y})$.

若 $(\overline{x},\overline{y}) \in U$, 则 $\overline{x} = g(\overline{x},\overline{y}) \in G(\overline{x},\overline{y}) \subset \mathrm{co}P(\overline{x},\overline{y})$, 这是不可能的.

事实上， $\forall x \in X, \forall y \in D, x \notin \mathrm{co}P(x,y)$. 假若不真，则 $\exists x_\lambda \in X, y \in D$, 使得 $x_\lambda \in \mathrm{co}P(x_\lambda, y)$. 从而 $\exists x_1, x_2, \cdots, x_m \in X$ 及 $\lambda_j \ge 0,\ \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j = 1$, 使得 $x_\lambda = \sum\limits_{j=1}^m \lambda_j x_j$ 且

$$x_j \in P(x_\lambda, y), \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

即 $\phi(x_\lambda, y, x_j) = -\xi f(x_\lambda, y, x_j) > 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m$. 因为 $\xi \in C^{\#}$, 所以 $f(x_\lambda, y, x_j) \notin C,\ j = 1, 2, \cdots, m$. 但这与 $f(x,y,z)$ 关于 z 为 C- 对角拟凸相矛盾.

所以 $(\overline{x},\overline{y}) \notin U$, 从而 $\overline{x} \in K(\overline{x}), \overline{y} \in F(\overline{x})$ 且 $G(\overline{x},\overline{y}) = \emptyset$.

再证 (1) 式成立.

由于 $G(\overline{x},\overline{y})=\emptyset$, 即 $K(\overline{x})\cap \mathrm{co}P(\overline{x},\overline{y})=\emptyset$, 从而 $K(\overline{x})\cap P(\overline{x},\overline{y})=\emptyset$. 故 $\forall x\in K(\overline{x})$, $x\notin P(\overline{x},\overline{y})$, 即 $\forall x\in K(\overline{x})$, $\phi(\overline{x},\overline{y},x)\le 0$.

最后证明结论成立.

由 (1) 式得

$$-\xi f(\overline{x},\overline{y},x)\le 0,\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

又 $\xi\in C^{\#}$, 因此

$$f(\overline{x},\overline{y},x)\notin -C\backslash\{0\},\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

注 3.1 由注 2.1 可看出，上述定理对 f 的连续性要求是比较弱的，只需 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 C-u.s.c. 即可.

由定理 3.1 可得下面的定理.

定理 3.2 设 X,D 分别为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E,W 中的非空紧凸子集. 假设

i) $K:X\to 2^X$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值及开的下截口；

ii) $F:X\to 2^D$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值；

iii) 函数 $f:X\times D\times X\to R$, 满足 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 l.s.c, 关于 z 为 γ- 对角拟凹 (见文献 [10] 中的第 754 页);

则 $\exists\overline{x}\in X$ 及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得 $\overline{x}\in K(\overline{x})$ 且

$$f(\overline{x},\overline{y},x)\le\gamma,\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

证 令

$$\phi(x,y,z)=\gamma-f(x,y,z),\quad \forall (x,y,z)\in X\times D\times X.$$

由 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 l.s.c, 知 $\phi(x,y,z)$ 关于 x,y 为 u.s.c. 从而 $\forall a\in R$, 水平集

$$U(a)=\{(x,y)\in X\times D:\phi(x,y,z)\ge a\}=\{(x,y)\in X\times D:\phi(x,y,z)-a\ge 0\}$$

为闭集.

又 $f(x,y,z)$ 关于 z 为 γ- 对角拟凹的，即对任一有限子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset X$, 对任一 $x_\lambda\in \mathrm{co}\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$, 有 $\min\limits_j f(x_\lambda,y,x_j)\le\gamma$. 所以 $\exists j$, 使得 $f(x_\lambda,y,x_j)\le\gamma$. 从而 $\gamma-f(x_\lambda,y,x_j)\ge 0$. 即 $\exists j$, 使得

$$\phi(x_\lambda,y,x_j)\ge 0.$$

若取 $Z=R,C=[0,+\infty)$, 则 $\phi(x,y,z)$ 关于 x,y 为 C-u.s.c., 关于 z 为 C- 对角拟凸. 因此，在定理 3.1 中，若取 $Z=R$, $C=[0,+\infty)$, 并用 ϕ 代替 f, 则易知定理 3.1 的条件全部成立. 从而由定理 3.1 知， $\exists\overline{x}\in X$ 及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得 $\overline{x}\in K(\overline{x})$ 且

$$\phi(\overline{x},\overline{y},x)\ge 0,\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

即 $\gamma-f(\overline{x},\overline{y},x)\ge 0$, $\forall x\in K(\overline{x})$. 也即

$$f(\overline{x},\overline{y},x)\le\gamma,\quad \forall x\in K(\overline{x}).$$

推论 3.1 设 X,D 分别为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E,W 中的非空紧凸子集， C 为另一 Hausdorff 拓扑线性空间 Z 中的以原点 O 为顶点的闭凸点锥且 $\mathrm{int}C\ne\emptyset$, $C^{\#}\ne\emptyset$. 假设

i) $F: X \to 2^D$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值；

ii) $f: X \times D \times X \to Z$ 为单值映射，且 $f(x,y,z)$ 关于 x,y 为 C-u.s.c., 关于 z 为 C- 对角拟凸；

则 $\exists \overline{x} \in X$ 及 $\overline{y} \in F(\overline{x})$, 使得

$$f(\overline{x},\overline{y},x) \notin -C\backslash\{0\}, \quad \forall x \in X.$$

证　定义映射 $K: X \to 2^X$ 如下

$$\forall x \in X, \quad K(x) \equiv X.$$

从而在定理 3.1 的证明过程中，令 $G(x,y) = \mathrm{co}P(x,y)$ 即可得结论.

下面放宽对映射 K 的 “有开的下截口 ” 的要求. 为此，我们先引入

定义　3.1　设 E,W,Z 为拓扑空间， $P: E \times W \to 2^Z$, $K: E \to 2^Z$ 为集值映射. 称 P 关于 K 有局部交性质，如果对任一 $(x,y) \in E \times W$, $P(x,y) \cap K(x) \neq \emptyset$, 则存在包含 (x,y) 的开集 $N(x,y)$, 使得 $\bigcap\limits_{(u,v)\in N(x,y)} (P(u,v) \cap K(u)) \neq \emptyset$.

引理　3.1(文 [7] 中的连续选择定理 2)　设 X 为一 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空仿紧子集， D 为另一 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空子集. 假若映射 $S,T:\ X \to 2^D$ 满足

i) $\forall x \in X$, $S(x)$ 非空且 $\mathrm{co}S(x) \subset T(x)$;

ii) S 有局部交性质；

则 T 有连续选择.

定理　3.3　设 X,D 分别为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E,W 中的非空紧凸子集， C 为另一 Hausdorff 拓扑线性空间 Z 中的以原点 O 为顶点的闭凸点锥. 假设

i) $K: X \to 2^X$ 为连续映射，且有非空的闭凸值；

ii) $F: X \to 2^D$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值；

iii) $f: X \times D \times X \to Z$ 为单值映射，满足 $f(x,y,z)$ 关于 z 为 C- 对角拟凸；

iv) 映射 $P: X \times D \to 2^X$, 定义为 $\forall (x,y) \in X \times D$, $P(x,y) = \{z \in X: f(x,y,z) \in -C\backslash\{0\}\}$, 满足 $\mathrm{co}P$ 为 l.s.c. 且关于 K 有局部交性质；

则 (SGVQEP) 有解.

证　定义映射 $G: X \times D \to 2^X$ 如下

$$\forall (x,y) \in X \times D, \quad G(x,y) = K(x) \cap \mathrm{co}P(x,y).$$

下证 $\exists \overline{x} \in K(\overline{x})$ 及 $\overline{y} \in F(\overline{x})$ 使得 $G(\overline{x},\overline{y}) = \emptyset$.

令 $U = \{(x,y) \in X \times D: G(x,y) \neq \emptyset\}$.

1) 若 $U = \emptyset$, 则 $\forall x \in X$, $y \in D$, $G(x,y) = \emptyset$. 此时，只需证明 $(K(x), F(x))$ 有不动点 $(\overline{x},\overline{y})$ 即可. 而这由 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理即可得.

2) 若 $U \neq \emptyset$.

由于 K 有非空凸值，所以在 U 上， G 有非空凸值. 又由条件 iv), $\mathrm{co}P$ 关于 K 有局部交性质，从而在 U 上， G 有局部交性质. 由于 X,D 是紧的，从而是仿紧的，故 $G = X \times D$ 是仿紧的. 因此由连续选择定理 2, $G|_U$ 有连续选择 $g: U \to X$, 满足

$$g(x,y) \in G(x,y), \quad \forall (x,y) \in U.$$

由于映射 $K, \mathrm{co}P$ 为 l.s.c., 所以 $G(x,y) = K(x) \cap \mathrm{co}P(x,y)$ 为 l.s.c. 因此 U 为开集. 定义映射 $M: X \times D \to 2^{X\times D}$ 如下

$$\forall (x,y) \in X \times D, \quad M(x,y) = \begin{cases} (g(x,y), F(x)), & (x,y) \in U; \\ (K(x), F(x)), & \text{其他}. \end{cases}$$

则由已知条件, 易知 M 为 u.s.c. 映射, 且有非空的闭凸值. 因此由 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理, $\exists (\overline{x}, \overline{y}) \in X \times D$, 使得 $(\overline{x}, \overline{y}) \in M(\overline{x}, \overline{y})$.

类似于定理 3.1 中的讨论知, $(\overline{x}, \overline{y}) \notin U$. 从而 $\overline{x} \in K(\overline{x})$, $\overline{y} \in F(\overline{x})$ 且 $G(\overline{x}, \overline{y}) = \emptyset$.

因此 $K(\overline{x}) \cap \mathrm{co}P(\overline{x}, \overline{y}) = \emptyset$, 从而 $K(\overline{x}) \cap P(\overline{x}, \overline{y}) = \emptyset$. 所以 $\forall x \in K(\overline{x})$, $x \notin P(\overline{x}, \overline{y})$, 也即

$$f(\overline{x}, \overline{y}, x) \notin -C\backslash\{0\}, \quad \forall x \in K(\overline{x}).$$

下面的例子说明满足定理 3.3 中条件 iv) 的 f 是存在的.

例 3.1 设 $E = W = R$, $X = D = [0,1]$, $Z = R^2$, $C = R^2_+$, $f_1, f_2 : D \to R$ 为两个连续函数, 且满足, 当 $y = 0$ 时, $f_i(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时, $f_i(y) > 0$ $(i = 1,2)$. 令 $T(y) = \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \end{pmatrix}, \forall y \in D$, 则 $T: D \to L(E,Z)$ 为连续算子 (这里 $L(E,Z)$ 表示由从 E 到 Z 的连续线性算子全体所构成的一个线性空间, $\forall \ell \in L(E,Z)$, $\forall x \in E$, 我们用 $\langle \ell, x\rangle$ 表示 ℓ 在 x 的值). $\forall (x,y,z) \in X \times D \times X$, 令 $f(x,y,z) = \langle Ty,\ z - x\rangle$, 则易知 $f(x,y,z)$ 关于 z 为 C- 对角拟凸的. 又经过简单的计算知, $\forall (x,y) \in X \times D$,

$$P(x,y) = \{z \in X : f(x,y,z) \in -C\backslash\{0\}\} = \begin{cases} \emptyset, & x = 0\,\text{或}\,y = 0; \\ [0,x), & \text{其他}. \end{cases}$$

从而

$$\mathrm{co}P(x,y) = \begin{cases} \emptyset, & x = 0\,\text{或}\,y = 0; \\ [0,x), & \text{其他}. \end{cases}$$

下证 $\mathrm{co}P$ 在 $X \times D$ 上为 l.s.c.

任取 $(x_0, y_0) \in X \times D$. 对任一开集 $V \subset E$ 且 $\mathrm{co}P(x_0,y_0) \cap V \neq \emptyset$, 则 $x_0, y_0 > 0$ 且 $\mathrm{co}P(x_0,y_0) \cap V = [0,x_0) \cap V \neq \emptyset$. 任意取定 $\overline{x}: 0 < \overline{x} < x_0$, 使得 $[0,\overline{x}] \cap V \neq \emptyset$, 则 $U(x_0,y_0) = (\overline{x}, 1] \times (0,1]$ 为 $X \times D$ 中的包含 (x_0,y_0) 的开集. 又 $\forall (\omega, t) \in U(x_0,y_0)$, 有 $\omega > \overline{x} > 0, t > 0$, 从而 $\mathrm{co}P(\omega,t) \cap V = [0,\omega) \cap V \supset [0,\overline{x}] \cap V \neq \emptyset$. 即 $\mathrm{co}P$ 在 $X \times D$ 上为 l.s.c.

令 $K(x) = [0,x], \forall x \in X$, 则映射 $K: X \to 2^X$ 连续且有非空的闭凸值. 但 $\forall z \in X$, $K^{-1}(z) = \{x \in X : z \in K(x) = [0,x]\} = [z,1]$ 在 X 中为闭集, 即 K 在 X 中不具有开的下截口.

下证 $\mathrm{co}P$ 关于 K 具有局部交性质.

任取 $(x_0,y_0) \in X \times D$, 使得 $\mathrm{co}P(x_0,y_0) \neq \emptyset$, 则 $x_0, y_0 > 0$. 从而 $U(x_0,y_0) = (\frac{x_0}{2}, 1] \times (\frac{y_0}{2}, 1]$ 为 $X \times D$ 中的包含 (x_0,y_0) 的开集. 又 $\forall (\omega,t) \in U(x_0,y_0)$, 有 $\omega > \frac{x_0}{2} > 0, t > \frac{y_0}{2} > 0$, 故 $\mathrm{co}P(\omega,t) = [0,\omega) \supset [0, \frac{x_0}{2}]$. 于是 $\bigcap\limits_{(\omega,t) \in U(x_0,y_0)} \mathrm{co}P(\omega,t) \supset [0, \frac{x_0}{2}] \neq \emptyset$. 因此 $\mathrm{co}P$ 有局部交性质.

又 $\forall(x,y)\in X\times D$,

$$\begin{aligned}\mathrm{co}P(x,y)\cap K(x)&=\begin{cases}\emptyset, & x=0\text{ 或 }y=0;\\ [0,x), & \text{其他}.\end{cases}\\ &=\mathrm{co}P(x,y).\end{aligned}$$

从而 $\mathrm{co}P$ 关于 K 有局部交性质.

由定理 3.3 可得下面的推论.

推论 3.2 设 X,D 分别为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间 E,W 中的非空紧凸子集， C 为另一 Hausdorff 拓扑线性空间 Z 中的以原点 O 为顶点的闭凸点锥. 假设

i) $F:X\to 2^D$ 为 u.s.c. 映射，且有非空的闭凸值；

ii) $f:X\times D\times X\to Z$ 为单值映射，满足 $f(x,y,z)$ 关于 z 为 C- 对角拟凸；

iii) 映射 $P:X\times D\to 2^X$, 定义为： $\forall(x,y)\in X\times D,\quad P(x,y)=\{z\in X:f(x,y,z)\in -C\backslash\{0\}\}$, 满足 $\mathrm{co}P$ 为 l.s.c. 且有局部交性质；

则 $\exists\overline{x}\in X$ 及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得

$$f(\overline{x},\overline{y},x)\notin -C\backslash\{0\},\quad \forall x\in X.$$

证 定义映射 $K:X\to 2^X$ 如下

$$\forall x\in X,\quad K(x)\equiv X.$$

则容易验证定理 3.3 的条件全部成立，从而由定理 3.3 即可得结论.

推论 3.3 假设推论 3.2 中除条件 iii) 之外的其他条件成立，而条件 iii) 被换为

iii)$'$ 映射 $P:X\times D\to 2^X$, 定义为 $\forall(x,y)\in X\times D$, $P(x,y)=\{z\in X:f(x,y,z)\in -C\backslash\{0\}\}$, 有开的下截口；

则 $\exists\overline{x}\in X$ 及 $\overline{y}\in F(\overline{x})$, 使得

$$f(\overline{x},\overline{y},x)\notin -C\backslash\{0\},\quad \forall x\in X.$$

证 由于 P 有开的下截口，由引理 2.3 知， $\mathrm{co}P$ 有开的下截口. 从而由注 2.2 知， $\mathrm{co}P$ 为 l.s.c. 且有局部交性质. 故推论 3.2 的条件全部成立. 因此由推论 3.2 知结论成立.

参 考 文 献

[1] Yang X Q, Yao J C. Special issue on vector variational inequalities. *J. Global Optim.*, 2005, **32**(4): 433–647.

[2] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria (Mathematical Theories). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] 王三华，熊九红，傅俊义．具单调性的 Stampacchia 广义向量拟均衡问题．南昌大学学报 (理科版), 2006, **30**(2): 114–117.
[4] Aubin J P and Ekeland L. Applied Nonlinear Analysis. John Wiley, New York, 1984.
[5] Bianchi M, Hadjisavvas N and Schaible S. Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions. *J. Optim. Theory Appl.*, 1997, **92**(3): 527–542.
[6] Jahn J. Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces. Verlag Peter Lang, New York, 1986.
[7] Wu X and Shen S K. A further generalization of Yannelis Prabhakar's continuous selection theorem and its application. *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, **197**: 61–74.
[8] Yannelis N C and Prabhakar N D. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces. *J. Math. Econom.*, 1983, **12**: 233–245.
[9] Glicksberg I. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1952, **3**(1): 170–174.
[10] Tian G Q. Generalized quasi-variational-like inequality problem. *Math. Oper. Res.*, 1993, **18**(3): 752–764.
[11] Fang Y P, Huang N J. Strong vector variational inequalities in Banach spaces. *Appl. Math. Lett.*, 2006, **19**: 362–368.
[12] Lee G M, Kim D S, Lee B S, Chen G Y. Generalized vector variational inequality and its duality for set-valued maps. *Appl. Math. Lett.*, 1998, **11**: 21–26.
[13] Chen G Y, Hou S H. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.
[14] Konnov I V, Yao J C. On the generalized vector variational inequality problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **206**: 42–58.
[15] Yang X Q. Vector variational inequality and its duality. *Nonlinear Anal.*, 1993, **95**: 729–734.
[16] Fu J Y. Symmetric vector quasi-equilibrium problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **285**: 708–713.
[17] Fu J Y, Wan A H. Generalized vector equilibrium problems with set-valued mappings. *Math. Meth. Oper. Res.*, 2002, **56**: 259–268.

STAMPACCHIA GENERALIZED VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEM II

WANG Sanhua FU Junyi

(*Department of Mathematics, Nanchang University, Nanchang* 330031)

Abstract In this article, the Stampacchia generalized vector quasi-equilibrium problem is introduced, and the existence of solution is studied by virtue of the new concept of C-diagonally quasi-convex. Since the problem includes many variational inequality problems and equilibrium problems as special cases, the existence theorems extend and improve some existing results in the recent references: 1) releasing the restriction to the continuity of the mapping; 2) extending the mapping from numeric type to vector type.

Key words Generalized vector quasi-equilibrium problem, locally convex space, C-diagonally quasi-convex, continuous selection, fixed point.