系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
28(6) (2008, 6), 747–750

Banach 空间中线性算子的度量右逆*

倪 仁 兴

(绍兴文理学院数学系， 绍兴 312000)

摘要 对无自反性假定的 Banach 空间，运用 Banach 空间几何方法，得到了闭稠定满射的线性算子 (可以无界) 的度量右逆的表达式，并给出了该度量右逆的存在性和连续性的充要条件. 多方面拓广了 Aubin J P 和王玉文等人的相应结果.

关键词 度量右逆，广义正交分解， Chebyshev 子空间，正规对偶映射.

MR(2000) 主题分类号 46B20, 47H04

1 引言与预备

线性算子的右逆是矩阵右逆的直接拓广，在最优化理论、控制论、数理经济中均有重要应用 [1−3]. 对于 Hilbert 空间中有界线性算子的正交投影右逆 Aubin J P[4] 给出其表达式，王玉文等人 [1] 将其拓广至自反 Banach 空间中，对于闭稠定满射的线性算子集值度量右逆给出表示. 本文对无自反性假定的一般 Banach 空间得到闭稠定满射的线性算子 (可以无界) 的度量右逆的表达式，并给出了该度量右逆的存在性和连续性的充要条件，从而多方面拓广了 [1, 4] 中的相应结果.

若没有特别说明，本文总设 X 和 Y 是 Banach 空间， T 是从 X 到 Y 的一线性算子， X^* 为 X 的对偶空间， $\langle x^*,\ x\rangle$ 表示泛函 $x^*(\in X^*)$ 在 $x(\in X)$ 上的值. X 的正规对偶映射 $F: X\to 2^{X^*}$ 记为 $F_X(\cdot)$[5]. 用 $D(T)$, $R(T)$, $N(T)$ 分别表示线性算子 T 的定义域、值域和零空间.

定义 1[6] 设 $G\subset X$, 集值映射 $P_G: X\to 2^G$ 定义为 $P_G(x)=\{y\in G, \|y-x\|=\inf\limits_{z\in G}\|z-x\|\}\,(x\in X)$, 称其为从 X 到 G 上的度量投影算子；若 $\forall x\in X, P_G(x)\neq\emptyset$, 则称 G 为 X 中存在性集；若 $\forall x\in X, P_G(x)$ 为单点集，则称 G 为 X 中 Chebyshev 集.

由文 [6] 可知， X 为自反空间当且仅当 X 中每个闭凸集 G 均为存在性集；自反严格凸 Banach 空间中的闭凸集均是 Chebyshev 集，反之未必.

定义 2[1] 设 $T: X\to Y$ 是线性算子，如果度量投影 $P_{\overline{N(T)}}(\cdot): X\to 2^{\overline{N(T)}}$ 存在且齐性映射 $T^+: Y\to 2^{D(T)}$ 满足 i) $TT^+=I_Y$; ii) $T^+T=I_{D(T)}-P_{\overline{N(T)}}(\cdot)$. 则称映射 T^+ 为 T 的度量右逆. 其中 $I_{D(T)}$ 是 $D(T)$ 上的恒等算子.

* 国家自然科学基金 (10271025), 浙江省自然科学基金 (Y606717) 和浙江省教育厅重点科研计划资助项目.
收稿日期：2005-03-25.

引理 1[7] 设 G 为 X 中存在性子空间，则 $\forall x\in X$, 有广义正交分解 $x=x_1+x_2$, $x_1\in G$, $x_2\in F_X^{-1}(G^{\perp})$, 此时记为 $X=G+F_X^{-1}(G^{\perp})$; 如果 G 为 X 中 Chebyshev 子空间，则分解唯一且 $x=P_Gx+x_2$, $x_2\in F_X^{-1}(G^{\perp})$, 此时记为 $X=G\oplus F_X^{-1}(G^{\perp})$. 其中 $G^{\perp}=\{x^*\in X^*;\langle x^*,x\rangle=0,\forall x\in G\}$.

引理 2[7] 设 G 为 X 中子空间，$x\in X\setminus\overline{G}$, $x_0\in G$, 则 $x_0\in P_G(x)\Leftrightarrow F_X(x-x_0)\cap G^{\perp}\neq\emptyset$.

命题 1[8] 设 X 是自反、严格凸和有 H 性质的 Banach 空间，Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 为闭稠定满射线性算子，则 $T^+:Y\to D(T)$ 连续.

下面的命题 2 是文 [1] 中的主要结果之一.

命题 2[1] 设 X 为自反 Banach 空间，Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 为闭稠定满射线性算子，则唯一存在 T 的度量右逆 $T^+:Y\to 2^{D(T)}$ 且 $T^+(y)=P_{T^{-1}(y)}(\theta)$, $y\in Y$.

2 主要结果

定理 1 设 X,Y 是 Banach 空间，$T:X\to Y$ 为满射的线性算子，$\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，则存在 T 的度量右逆 $T^+\Leftrightarrow D(T)=N(T)\oplus C(T)$. 其中 $C(T)=\{x\in D(T);F_X(x)\cap N(T)^{\perp}\neq\emptyset\}=D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$.

证 “$\Rightarrow$”设 T 由定义 2 给定的度量右逆为 T^+, 则由 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，$\forall\ x\in D(T)$, 由定义 2 中的 i), 有 $TT^+Tx=Tx$, 因此 $T^+Tx\in D(T)$. 而由定义 2 中的 ii), 有 $P_{\overline{N(T)}}x=x-T^+Tx\in D(T)$, 这样有 $T(P_{\overline{N(T)}}x)=T(x-T^+Tx)=Tx-TT^+Tx=0$, 即 $P_{\overline{N(T)}}x\in N(T)$, $\forall\ x\in D(T)$. 因 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，由引理 1 得 $\forall x\in D(T)\subset X$, 存在唯一分解 $x=P_{\overline{N(T)}}x+x_2$, $x_2\in F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$, 因此 $x_2=x-P_{\overline{N(T)}}x\in D(T)$, $x_2\in D(T)\cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})=C(T)$, 这样 $D(T)=N(T)+C(T)$. 而 $\forall x\in N(T)\cap C(T)$, 有 $F_X(x)\cap N(T)^{\perp}\neq\emptyset$, 令 $x^*\in F_X(x)\cap N(T)^{\perp}$, 则 $0=\langle x^*,\ x\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2$, 这意指 $x=0$, 因此 $D(T)=N(T)\oplus C(T)$.

“$\Leftarrow$”先证 $T:C(T)\to Y$ 为一双射. 事实上，$\forall y\in Y=R(T)$, 则 $\exists x\in D(T)$ 使得 $y=Tx$, 而已知 $D(T)=N(T)\oplus C(T)$ 意味着 $x=x_1+x_2$, $x_1\in N(T)$, $x_2\in C(T)$, 因此 $y=Tx=Tx_2$, 即 T 是从 $C(T)$ 到 Y 上的一满射；而 $\forall x_1,x_2\in C(T)$, 若 $Tx_1=Tx_2$, 则 $x_1-x_2\in N(T)\subset\overline{N(T)}$, 但由 $C(T)$ 的定义可得 $F_X(x_i)\cap N(T)^{\perp}\neq\emptyset\,(i=1,2)$, 即 $F_X(x_1-\theta)\cap\overline{N(T)}^{\perp}\neq\emptyset, F_X(x_1-(x_1-x_2))\cap\overline{N(T)}^{\perp}\neq\emptyset$, 注意到 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，这样结合引理 2 有 $\theta=x_1-x_2=P_{\overline{N(T)}}(x_1)$, 故 $x_1=x_2,T:C(T)\to Y$ 是一双射.

令 $T|_{C(T)}$ 表示算子 T 在集合 $C(T)$ 上的限制. 由对偶映射 $F_X(\cdot)$ 的齐性得集合 $C(T)$ 是齐性的，$(T|_{C(T)})^{-1}$ 也是从 Y 到 $C(T)$ 的齐性算子. 定义算子 T^+ 如下

$$T^+y=(T|_{C(T)})^{-1}y,\quad y\in Y,\tag{1}$$

则 T^+ 是从 Y 到 $C(T)$ 的一齐性算子. $\forall y\in Y$, 由 (1) 得 $TT^+y=T(T|_{C(T)})^{-1}y=y$, 即在 Y 上 $TT^+=I_Y$. 而 $\forall x\in X$, 由 $D(T)=N(T)\oplus C(T)$, 则 x 有唯一分解 $x=x_1+x_2,x_1\in N(T),x_2\in C(T)$, 又由引理 1, x 有唯一分解 $x=P_{\overline{N(T)}}x+x',x'\in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^{\perp})=F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$, 这样由分解的唯一性得 $x_1=P_{\overline{N(T)}}x\in N(T)$, 因此 $x=P_{\overline{N(T)}}x+x_2,x_2\in C(T)$. 于是 $T^+Tx=T^+T(P_{\overline{N(T)}}x+x_2)=T^+Tx_2=(T|_{C(T)})^{-1}Tx_2=x_2=(I_{D(T)}-P_{\overline{N(T)}})x$, 即在 $D(T)$ 上 $T^+T=I_{D(T)}-P_{\overline{N(T)}}(\cdot)$, 从而 T^+ 是 T 的度量右逆.

定理 2 设 X, Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 为满射的线性算子，若 T 的度量右逆 T^+ 存在，则 T^+ 在 Y 上唯一且 $T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y$, $y \in Y$.

证　因已知 T 的度量右逆 T^+ 存在，则由定理 1 得 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 其中 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$. 由定理 1 的充分性的证明得 T 的度量右逆 $T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y\,(y \in Y)$ 是从 Y 到 $C(T)$ 的一齐性算子．设 T^+ 是 T 的任意度量右逆，$\forall y \in Y$, 下证

$$T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y. \tag{2}$$

事实上，由定义 2 中的 i),$\forall y \in Y$ 有

$$TT^+ y = y. \tag{3}$$

因 $T^+ y \in D(T)$, 由 (3) 和定义 2 中的 ii) 有 $T^+ y = T^+ T T^+ y = T^+ y - P_{\overline{N(T)}} T^+ y$, 得

$$P_{\overline{N(T)}} T^+ y = 0. \tag{4}$$

另一方面，因 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，则由引理 1, $T^+ y (\in D(T))$ 有唯一分解 $T^+ y = P_{\overline{N(T)}} T^+ y + x_2, x_2 \in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^{\perp})$, 这样，由 (4) 得 $T^+ y = x_2 \in F_X^{-1}(\overline{N(T)}^{\perp}) \cap D(T) = C(T)$. 而由定理 1 的充分性的证明得 $T: C(T) \to Y$ 是一双射，因此由 (3) 得 $T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y$, $\forall y \in Y$. 故 (2) 成立．证毕.

推论 1 设 X, Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 为满射的线性算子，$N(T)$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，则唯一存在 T 的度量右逆 T^+ 且 $T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y$, $\forall y \in Y$.

证　因已知 $N(T)$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，则由引理 1 得 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 其中 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$, 注意到 Chebyshev 子空间必是闭集，这样由定理 1 和 2 得 T 的度量右逆 T^+ 唯一存在且 $T^+ y = (T|_{C(T)})^{-1} y$, $\forall y \in Y$.

注 1　推论 1 是文 [1] 中主要结果之一 - 定理 1(即命题 2) 的多方面的拓广，这里 X 无自反性假定，线性算子 T 无需闭稠定的条件.

定理 3 设 X 是自反、严格凸和有 H 性质的 Banach 空间，Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 为稠定且满射的线性算子, 则存在一连续的度量右逆 $T^+: Y \to C(T)$ 使得 $\overline{N(T)} \subset D(T) \Leftrightarrow T$ 是闭算子.

证　“$\Leftarrow$” 若 T 是闭稠定满射线性算子，则 $\overline{N(T)} = N(T) \subset D(T)$, 由推论 1, 唯一存在 T 度量右逆 T^+, 至于 $T^+: Y \to C(T)$ 是连续的由命题 1 可得.

“$\Rightarrow$” 设存在一连续的度量右逆 T^+ 满足 $\overline{N(T)} \subset D(T)$, 设 $\{x_n\} \subset D(T)$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ 满足 $x_n \to x_0$, $Tx_n \to y_0 (n \to \infty)$. 记 $y_n = Tx_n$, 则 $y_n \in R(T) = Y$, 则由 T^+ 的连续性得 $\overline{x_n} = T^+ y_n \to \overline{x} = T^+ y_0 (n \to \infty)$. 因 T^+ 存在，则由定理 1 有 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, 其中 $C(T) = D(T) \cap F_X^{-1}(N(T)^{\perp})$. 易见 $\overline{N(T)}$ 是 X 中 Chebyshev 子空间，则由引理 1 和 $D(T) = N(T) \oplus C(T)$, $\forall x \in D(T), x$ 有唯一分解

$$x = P_{\overline{N(T)}} x + x', \tag{5}$$

其中 $P_{\overline{N(T)}} x \in N(T)$, $x' \in C(T)$. 因此，对 $x_n \in D(T)$, 有

$$x_n = P_{\overline{N(T)}} x_n + x_n', \tag{6}$$

其中 $P_{\overline{N(T)}}x_n \in N(T)$, $x'_n \in C(T)$ $(n=1,2,3\cdots)$. 由定理 1 的充分性的证明得 $T|_{C(T)}: C(T) \to Y$ 是一双射，这样由 (6) 有 $y_n = Tx_n = Tx'_n = T|_{C(T)}x'_n$ $(n=1,2,3\cdots)$. 另一方面，我们有 $y_n = TT^+y_n = T\overline{x_n} = T|_{C(T)}\overline{x_n}$, $n=1,2,3\cdots$, 因此 $x'_n = \overline{x_n}$ $(n=1,2,3\cdots)$.

$$x'_n = T^+y_n \to T^+y_0 = \overline{x} \quad (n\to\infty), \tag{7}$$

和 $\overline{x} \in C(T)$. 综合 (6) 和 (7) 有 $P_{\overline{N(T)}}x_n = x_n - x'_n \to x_0 - T^+y_0 \quad (n\to\infty)$, 因 $P_{\overline{N(T)}}x_n \in N(T)$ $(n=1,2,\cdots)$, 这样 $x_0 - T^+y_0 \in \overline{N(T)}$, 记 $x''' = x_0 - T^+y_0$, 有

$$x_0 = x''' + T^+y_0, \tag{8}$$

其中 $x''' \in \overline{N(T)}$ 和 $T^+y_0 \in C(T)$, 由条件 $\overline{N(T)} \subset D(T)$ 得 $x_0 \in D(T)$. 由在 (5) 中的分解唯一性 (用 x_0 代替 x) 和 (8) 得 $x_0 = P_{\overline{N(T)}}x_0 + T^+y_0$, 其中 $P_{\overline{N(T)}}x_0 \in N(T)$, 因此 $Tx_0 = T(P_{\overline{N(T)}}x_0 + T^+y_0) = TT^+y_0 = y_0$, 即 T 是闭算子.

注 2 定理 3 说明在一定条件下命题 1 的逆命题也成立，同时借助于度量右逆的概念给出了一线性算子为闭算子的一等价刻划.

参 考 文 献

[1] 王玉文，王辉，王润杰． Banach 空间中线性算子的集值度量右逆的表示及应用．应用泛函分析学报， 1999, **1**(3): 255–260.

[2] 王玉文，王辉． Banach 空间中最小范数控制问题．系统科学与数学， 1991, **11**(1): 1–6.

[3] 唐洋，王玉文．数理经济中一类纯交换经济的需求映射及应用．数学的实践与认识， 2001, **31**(4): 459–463.

[4] Aubin J P. Applied Functional Analysis. New York: Wiley Interscience, 1979.

[5] 王玉文，潘少荣． Banach 空间中线性算子的 (集值) 度量广义逆及其齐性单值选择．数学学报，2003, **46**(3): 431–438.

[6] 徐士英，李冲，杨文善． Banach 空间中的非线性逼近理论 (现代数学基础丛书)．北京：科学出版社， 1998.

[7] 王玉文，王辉．Banach 空间中广义正交分解定理与广义正交可补子空间．数学学报，2001, **44**(6): 1045–1050.

[8] 王玉文，李志伟． Banach 空间中 Moore-Penrose 广义逆与不适定边值问题．系统科学与数学， 1995, **15**(2): 175–185.

THE METRIC RIGHT INVERSE OF LINEAR OPERATOR IN BANACH SPACE

NI Renxing

(*Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang* 312000)

Abstract For Banach space without reflexive assumption, by means of the geometric method geometry of Banach space, the representation of the metric right inverse of closed linear surjective operator with dense domain (may be unbounded) is obtained, and the necessary and sufficient conditions for existence, continuity of the metric right inverse of linear operator are given. The obtained results extend and improve the corresponding results obtained by Aubin J P, Wang Yu-wen and others.

Key words Metric right inverse, generalized orthogonal decomposition, Chebyshev subspace, normalized duality mapping.