系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
29(7) (2009, 7), 962–970

2×2 阶上三角型算子矩阵的 Moore-Penrose 谱*

海国君 阿拉坦仓

(内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特 010021)

摘要 设 H_1 和 H_2 是无穷维可分 Hilbert 空间. 用 M_C 表示 $H_1\oplus H_2$ 上的 2×2 阶上三角型算子矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 对给定的算子 $A\in\mathcal{B}(H_1)$ 和 $B\in\mathcal{B}(H_2)$, 描述了集合 $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$ 与 $\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$, 其中 $\sigma_M(\cdot)$ 表示 Moore-Penrose 谱.

关键词 2×2 阶上三角型算子矩阵， Moore-Penrose 可逆， Moore-Penrose 谱.

MR(2000) 主题分类号 47A55, 15A09, 47A10

1 引 言

设 H_1 和 H_2 为无穷维可分 Hilbert 空间. $\mathcal{B}(H_i,H_j)$ $(i,j=1,2)$ 表示从 H_i 到 H_j 的所有有界线性算子构成的 Banach 空间. $\mathcal{B}(H_i,H_i)$ 简记为 $\mathcal{B}(H_i)$. 若 $T\in\mathcal{B}(H_i,H_j)$, 用 T^*, $R(T)$ 和 $N(T)$ 表示算子 T 的共轭算子，值域空间与零空间. $n(T)$ 和 $d(T)$ 分别表示 $N(T)$ 和 $N(T^*)$ 的维数，即 $n(T)=\dim N(T)$ 且 $d(T)=\dim N(T^*)$. 如果 $R(T)$ 闭且 $d(T)<\infty$, 则 T 称为下 (右) 半 Fredholm 算子； T^* 称为上 (左) 半 Fredholm 算子. 若 $A\in\mathcal{B}(H_1)$ 和 $B\in\mathcal{B}(H_2)$ 是给定的算子，用 M_C 表示 2×2 阶上三角型算子矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}: H_1\oplus H_2 \longrightarrow H_1\oplus H_2,$$

其中 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 为任意的.

对于 $T\in\mathcal{B}(H_1)$, 若存在算子 $S\in\mathcal{B}(H_1)$ 满足下面的四个算子方程

$$\begin{cases} TST=S, \\ STS=T, \\ TS=(TS)^*, \\ ST=(ST)^*, \end{cases}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金 (20070126002) 和国家自然科学基金 (10562002) 资助课题.
收稿日期：2007-11-16

则 T 称为 Moore-Penrose 可逆， S 称为 T 的 Moore-Penrose 逆并且记为 T^+. 容易发现， T 是 Moore-Penrose 可逆当且仅当 $R(T)$ 是闭的. 此外，如果 T 为 Moore-Penrose 可逆，则 T 的 Moore-Penrose 逆是唯一的 [1]. 以下用 λ 表示复数， I 表示单位算子. 对于 $T \in \mathcal{B}(H_1)$, 记 $\sigma(T)$ 为 T 的谱集. 算子 T 的 Moore-Penrose 谱 $\sigma_M(T)$ 定义为

$$\sigma_M(T) = \{\lambda : T - \lambda I \text{ 不是 Moore-Penrose 可逆}\}.$$

显然， $\lambda \in \sigma_M(T)$ 当且仅当 $R(T-\lambda I)$ 不闭.

我们知道，算子矩阵是以算子为元素的矩阵，而缺项算子矩阵就是一些元素是已知的，其余元素是未知的算子矩阵. 研究缺项算子矩阵 $\begin{pmatrix} A & D \\ ? & B \end{pmatrix}$ 的过程中，李绍宽在文 [2] 中引入了固有谱与可能谱的概念，其中称

$$\bigcap_{X\in\mathcal{B}(H_1,H_2)} \sigma\begin{pmatrix} A & D \\ X & B \end{pmatrix} \text{ 和 } \bigcup_{X\in\mathcal{B}(H_1,H_2)} \sigma\begin{pmatrix} A & D \\ X & B \end{pmatrix}$$

为该缺项算子矩阵的固有谱和可能谱. 对于缺项算子矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & ? \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 本文中分别称 $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_M(M_C)$ 和 $\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_M(M_C)$ 为 M 的固有 Moore-Penrose 谱和可能 Moore-Penrose 谱.

1920 年， Moore 首先提出了广义逆矩阵，但没有引起人们的注意. 直到 1955 年， Penrose 以矩阵方程的形式给出了 Moore 广义逆矩阵的定义后，广义逆矩阵的研究才得到发展. Hilbert 空间中线性算子的 Moore-Penrose 逆是矩阵 Moore-Penrose 逆的推广，它在众多领域，如矩阵理论、统计理论等，有着重要的应用. 对于有限维空间中的线性算子 (矩阵), 其 Moore-Penrose 可逆性在许多文章中讨论过 (见 [3, 4] 及其中的参考文献). 但对于无穷维 Hilbert 空间中算子矩阵的 Moore-Penrose 可逆性问题的讨论还比较少.

算子理论的研究中缺项算子矩阵的补问题有着重要意义. 最近，由于插值理论及控制论中某些问题的刺激，这一问题已被许多学者从多个不同方向进行了研究，其中一个重要方向是谱补问题. 所谓谱补问题就是研究缺项算子矩阵的补之谱以及谱的分布等方面的问题. 众所周知，如果 T 是 Hilbert 空间上的有界线性算子且存在非平凡的不变子空间，则该算子可分解为 2×2 阶上三角型算子矩阵的形式. 因此 2×2 阶上三角型算子矩阵的研究吸引了很多学者. 例如，对给定的 $A \in \mathcal{B}(H_1)$ 和 $B \in \mathcal{B}(H_2)$, 文 [5] 中给出了 M_C 的谱之交集，即缺项算子矩阵 M 的固有谱. 之后，人们对 M_C 的各种谱的交集都进行了研究 (见 [6–8] 及其中所列的参考文献), 但未见文献给出 M_C 的 Moore-Penrose 谱之交集与并集. 所以本文的目的是为缺项算子矩阵 M 的固有 Moore-Penrose 谱和可能 Moore-Penrose 谱做出刻画.

2　预备知识

首先回顾关于线性算子的一些基本知识.

引理 2.1[9] 如果 $T \in \mathcal{B}(H_1 \oplus H_2)$ 具有矩阵形式 $T = \begin{pmatrix} A & \star \\ 0 & B \end{pmatrix} : H_1 \oplus H_2 \longrightarrow H_1 \oplus H_2$,

且 A 的值域在 H_1 中稠密， $B \neq 0$. 则 $\gamma(T) \leq \gamma(B)$. 这里

$$\gamma(T) = \begin{cases} \min\{\|Tx\| : \mathrm{dist}(x, N(T)) = 1\}, & \text{如果 } T \neq 0, \\ 0, & \text{如果 } T = 0. \end{cases}$$

对于 Banach 空间上的有界线性算子 T, $\gamma(T) > 0$ 当且仅当 $R(T)$ 闭 [9]. 因此，利用引理 2.1 容易得出下面的推论.

推论 2.1 设 $A \in \mathcal{B}(H_1)$, $B \in \mathcal{B}(H_2)$ 和 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 为给定的算子且 $\overline{R(A)} = H_1$. 如果 $R(M_C)$ 闭，则 $R(B)$ 也闭.

引理 2.2 [10] 设 H 为 Hilbert 空间. 如果 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是上 (下) 半 Fredholm 算子且 $K \in \mathcal{B}(H)$ 为紧算子，那么 $T + K$ 也是上 (下) 半 Fredholm 算子.

引理 2.3 设 H 是 Hilbert 空间且 $T \in \mathcal{B}(H)$. 则 T 是 Moore-Penrose 可逆当且仅当 T^* 是 Moore-Penrose 可逆.

证 T 是 Moore-Penrose 可逆当且仅当 $R(T)$ 闭，而 $R(T)$ 闭可逆当且仅当 $R(T^*)$ 闭，即 T^* 是 Moore-Penrose 可逆. 因此 T 是 Moore-Penrose 可逆当且仅当 T^* 是 Moore-Penrose 可逆.

3 主要结果

下面两个定理是本文的主要结果.

定理 3.1 设 $A \in \mathcal{B}(H_1)$ 和 $B \in \mathcal{B}(H_2)$ 为给定的算子. 则

$$\bigcap_{C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)} \sigma_M(M_C) = \{\lambda \in \sigma_M(A) : n(B - \lambda I) < \infty\} \bigcup \{\lambda \in \sigma_M(B) : d(A - \lambda I) < \infty\}. \quad (3.1)$$

证 先证 (3.1) 式右端包含于左端. 设

$$\lambda \in \{\lambda \in \sigma_M(A) : n(B - \lambda I) < \infty\} \bigcup \{\lambda \in \sigma_M(B) : d(A - \lambda I) < \infty\}.$$

如果 $\lambda \in \sigma_M(B)$ 且 $d(A - \lambda I) < \infty$, 那么对任意的 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$, $M_C - \lambda I$ 不是 Moore-Penrose 可逆的. 用反证法，假设存在 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 使得 $M_C - \lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆的. 因为 $M_C - \lambda I$ 作为 $N(A - \lambda I) \oplus N(A - \lambda I)^{\perp} \oplus N(B - \lambda I) \oplus N(B - \lambda I)^{\perp}$ 到 $\overline{R(A - \lambda I)} \oplus R(A - \lambda I)^{\perp} \oplus \overline{R(B - \lambda I)} \oplus R(B - \lambda I)^{\perp}$ 的算子有如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此 $M_C - \lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆，即 $R(M_C - \lambda I)$ 闭当且仅当

$$M' = \begin{pmatrix} A_{12}(\lambda) & C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}$$

作为 $N(A - \lambda I)^{\perp} \oplus N(B - \lambda I) \oplus N(B - \lambda I)^{\perp}$ 到 $\overline{R(A - \lambda I)} \oplus R(A - \lambda I)^{\perp} \oplus \overline{R(B - \lambda I)}$ 的算子是 Moore-Penrose 可逆，即 $R(M')$ 为闭的. 容易知道， $A_{12}(\lambda)$ 作为 $N(A - \lambda I)^{\perp}$

到 $\overline{R(A-\lambda I)}$ 的算子，其值域是稠密的．根据推论 2.1, $R\begin{pmatrix} C_3 & C_4 \\ 0 & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}$ 是闭的．注意 $d(A-\lambda I)<\infty$, 故 $\begin{pmatrix} C_3 & C_4 \\ 0 & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}$ 是下半 Fredholm 算子并且 C_3 和 C_4 均为紧算子．利用引理 2.2 可得 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{12}(\lambda) \end{pmatrix}$ 也是下半 Fredholm 算子．于是 $R(B_{12}(\lambda))=R(B-\lambda I)$ 为闭的，即 $\lambda\notin\sigma_M(B)$. 矛盾．这就证明了对任意的 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $M_C-\lambda I$ 不是 Moore-Penrose 可逆的．所以 $\lambda\in\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$.

如果 $\lambda\in\sigma_M(A)$ 且 $n(B-\lambda I)<\infty$, 那么 $\overline{\lambda}\in\sigma_M(A^*)$ (引理 2.3) 且 $d(B^*-\overline{\lambda}I)<\infty$. 用上面的证明方法和引理 2.3 可证 $\lambda\in\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$.

现在证明 (3.1) 式左端包含于右端．设 $\lambda\in\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$. 用反证法，假设

$$\lambda\notin\{\lambda\in\sigma_M(A):n(B-\lambda I)<\infty\}\bigcup\{\lambda\in\sigma_M(B):d(A-\lambda I)<\infty\},$$

那么

$$\begin{aligned}\lambda\in&\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(B),\lambda\notin\sigma_M(A)\}\bigcup\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(A),d(A-\lambda I)=\infty\}\\&\bigcup\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(B),n(B-\lambda I)=\infty\}\bigcup\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}.\end{aligned}$$

下面分 4 种情况来考虑．

情况 1　考虑 $\lambda\in\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(B),\lambda\notin\sigma_M(A)\}$ 的情况．

此时, $A-\lambda I$ 和 $B-\lambda I$ 均为 Moore-Penrose 可逆．取 $C=0$, 那么 $M_C-\lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆．因此 $\lambda\notin\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$. 矛盾．

情况 2　$\lambda\in\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(A),d(A-\lambda I)=\infty\}$ 的情况．

如果 $\lambda\notin\sigma_M(B)$, 由情况 1 的讨论可知存在 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 使得 $M_C-\lambda I$ 是 Moore-Penrose 可逆的．如果 $\lambda\in\sigma_M(B)$, 则 $R(B-\lambda I)$ 不闭．这蕴涵着 $\dim N(B-\lambda I)^{\perp}=\infty$. 设 J 为 $N(B-\lambda I)^{\perp}$ 到 $R(A-\lambda I)^{\perp}$ 的酉算子．由于 $\lambda\notin\sigma_M(A)$, 即 $R(A-\lambda I)$ 闭，因此算子 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 可定义为

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}:N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^{\perp}\longrightarrow R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^{\perp}.$$

可以证明 $M_C-\lambda I$ 是 Moore-Penrose 可逆的．事实上， $M_C-\lambda I$ 作为 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^{\perp}\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^{\perp}$ 到 $R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^{\perp}\oplus\overline{R(B-\lambda I)}\oplus R(B-\lambda I)^{\perp}$ 的算子有如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $J:N(B-\lambda I)^{\perp}\longrightarrow R(A-\lambda I)^{\perp}$ 是酉算子，因此

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -B_{12}(\lambda)J^* & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易看出

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -B_{12}(\lambda)J^* & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

是 $R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^\perp\oplus\overline{R(B-\lambda I)}\oplus R(B-\lambda I)^\perp$ 上的可逆算子并且

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的值域为闭 (因为 $R(A_{12}(\lambda))=R(A-\lambda I)$ 且 $\lambda\notin\sigma_M(A)$). 故 $R(M_C-\lambda I)$ 是闭的, 即 $M_C-\lambda I$ 是 Moore-Penrose 可逆的. 这意味着

$$\lambda\notin\bigcap_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C).$$

矛盾.

情况 3 如果 $\lambda\in\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(B),n(B-\lambda I)=\infty\}$, 用引理 2.3 和情况 2 的证明方法可证存在 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 使得 $M_C-\lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆. 故 $\lambda\notin\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$. 矛盾.

情况 4 现在讨论 $\lambda\in\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}$ 的情形.

如果 $A-\lambda I$ 和 $B-\lambda I$ 中至少有一个是 Moore-Penrose 可逆的, 则由上面的讨论可知存在 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 使得 $M_C-\lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆的. 下面假设 $A-\lambda I$ 与 $B-\lambda I$ 均不是 Moore-Penrose 可逆. 因此 $R(A-\lambda I)$ 和 $R(B-\lambda I)$ 都不闭. 于是

$$\dim\overline{R(A-\lambda I)}=\dim N(B-\lambda I)^\perp=\infty.$$

设 J_1 和 J_2 分别是从 $N(B-\lambda I)$ 到 $\overline{R(A-\lambda I)}$ 和 $N(B-\lambda I)^\perp$ 到 $R(A-\lambda I)^\perp$ 的酉算子. 算子 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 定义为

$$C=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}:N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^\perp\longrightarrow\overline{R(A-\lambda I)}\oplus R(A-\lambda I)^\perp,$$

则 $R(M_C-\lambda I)$ 是闭的. 事实上, $M_C-\lambda I$ 作为 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^\perp\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^\perp$ 到 $\overline{R(A-\lambda I)}\oplus R(A-\lambda I)^\perp\oplus\overline{R(B-\lambda I)}\oplus R(B-\lambda I)^\perp$ 的算子有如下矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 J_1 和 J_2 都是酉算子, 因此存在

$$U=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -B_{12}(\lambda)J_2^* & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad 和 \quad V=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -J_1^*A_{12}(\lambda) & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

使得

$$U\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}V=\begin{pmatrix} 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易看出 U 和 V 分别是 $\overline{R(A-\lambda I)}\oplus R(A-\lambda I)^{\perp}\oplus\overline{R(B-\lambda I)}\oplus R(B-\lambda I)^{\perp}$ 和 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^{\perp}\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^{\perp}$ 上的可逆算子并且 $U(M_C-\lambda I)V$ 的值域是闭的．于是 $R(M_C-\lambda I)$ 也闭．显然，$M_C-\lambda I$ 为 Moore-Penrose 可逆．所以 $\lambda\notin\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$．矛盾．证毕．

定理 3.2 设 $A\in\mathcal{B}(H_1)$ 和 $B\in\mathcal{B}(H_2)$ 为给定的算子．则

$$\bigcup_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)=\sigma_M(A)\bigcup\sigma_M(B)\bigcup\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}. \tag{3.2}$$

证　先证 (3.2) 式右端包含于左端．设 $\lambda\in\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$. 因此存在 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 使得 $\lambda\in\sigma_M(M_C)$. 用反证法，假设

$$\lambda\notin\sigma_M(A)\bigcup\sigma_M(B)\bigcup\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}.$$

则

$$\lambda\in\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(A),\lambda\notin\sigma_M(A),\min\{n(B-\lambda I),d(A-\lambda I)\}<\infty\}.$$

因为 $\lambda\notin\sigma_M(A)\cap\sigma_M(B)$, 所以 $R(A-\lambda I)$ 和 $R(B-\lambda I)$ 均闭．于是对任意的 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $M_C-\lambda I$ 可表示为从 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^{\perp}\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^{\perp}$ 到 $R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^{\perp}\oplus R(B-\lambda I)\oplus R(B-\lambda I)^{\perp}$ 的算子矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知 $A_{12}(\lambda):N(A-\lambda I)^{\perp}\longrightarrow R(A-\lambda I)$ 和 $B_{12}(\lambda):N(B-\lambda I)^{\perp}\longrightarrow R(B-\lambda I)$ 是可逆算子．因此存在 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^{\perp}\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^{\perp}$ 上的可逆算子

$$V=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -A_{12}(\lambda)^{-1}C_1 & -A_{12}(\lambda)^{-1}C_2 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

与 $R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^{\perp}\oplus R(B-\lambda I)\oplus R(B-\lambda I)^{\perp}$ 上的可逆算子

$$U=\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -C_4B_{12}(\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

使得

$$U\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}V=\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $\min\{n(B-\lambda I),d(A-\lambda I)\}<\infty$, 从而 $\dim R(C_3)<\infty$. 这蕴涵着 $R(C_3)$ 是闭的. 进而 $U(M_C-\lambda I)V$ 的值域是闭的. 利用 U 和 V 的可逆性可得 $R(M_C-\lambda I)$ 为闭. 所以 $\lambda\notin\sigma_M(M_C)$. 以上证明了对任意的 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $\lambda\notin\sigma_M(M_C)$. 矛盾.

其次证明 (3.2) 式左端包含于右端. 设

$$\lambda\in\sigma_M(A)\bigcup\sigma_M(B)\bigcup\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}.$$

当 $\lambda\in\sigma_M(A)\bigcup\sigma_M(B)$ 时, 取 $C=0$, 则 $\lambda\in\sigma_M(M_C)$. 故 $\lambda\in\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$ 成立;

当 $\lambda\in\{\lambda:n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}\backslash(\sigma_M(A)\bigcup\sigma_M(B))=\{\lambda:\lambda\notin\sigma_M(A),\lambda\notin\sigma_M(B),n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty\}$ 时, 因为 $n(B-\lambda I)=d(A-\lambda I)=\infty$, 因此 $N(B-\lambda I)$ 和 $R(A-\lambda I)^\perp$ 都是无穷维的. 不妨设 $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ 和 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 分别为 $N(B-\lambda I)$ 和 $R(A-\lambda I)^\perp$ 的规范正交基. 定义算子 $S:N(B-\lambda I)\longrightarrow R(A-\lambda I)^\perp$ 为

$$S(g_i)=\frac{1}{i}f_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots.$$

容易证明 $R(S)$ 不闭. 取算子 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 为

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S & 0 \end{pmatrix}:N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^\perp\longrightarrow R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^\perp.$$

则 $M_C-\lambda I$ 可表示为从 $N(A-\lambda I)\oplus N(A-\lambda I)^\perp\oplus N(B-\lambda I)\oplus N(B-\lambda I)^\perp$ 到 $R(A-\lambda I)\oplus R(A-\lambda I)^\perp\oplus R(B-\lambda I)\oplus R(B-\lambda I)^\perp$ 的算子矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{12}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意 $R(S)$ 不闭, 进而 $R(M_C-\lambda I)$ 不闭. 因此 $\lambda\in\sigma_M(M_C)$. 这表明 $\lambda\in\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)$. 证毕.

注 1 如果 $A\in\mathcal{B}(H_1)$ 和 $B\in\mathcal{B}(H_2)$ 为给定的算子, 则对任意的 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, 有 $\sigma(M_C)\subset\sigma(A)\cup\sigma(B)$(见 [5, 8]). 但对于 Moore-Penrose 谱来说 $\sigma_M(M_C)\not\subset\sigma_M(A)\cup\sigma_M(B)$(见下面的例 1). 事实上, 若对任意的 $C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$, $\sigma_M(M_C)\subset\sigma_M(A)\cup\sigma_M(B)$ 成立, 那么 $\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)}\sigma_M(M_C)\subset\sigma_M(A)\cup\sigma_M(B)$. 这与定理 3.2 的结论矛盾.

最后, 举两个算例来说明我们结果的正确性.

4　例　子

以下我们总假设 $H_1 = H_2 = \ell_2$.

例 1　任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell_2$, 定义算子 $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$, $B \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 和 $C \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 为

$$Ax = (x_1, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, x_5, \cdots),$$

$$Bx = (x_1, x_3, x_5, x_7, \cdots),$$
$$Cx = \Big(0, 0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_6}{6}, \cdots\Big).$$

那么 $R(A)$ 和 $R(B)$ 均为闭的，而 $R(M_C)$ 不闭．所以 $0 \in \sigma_M(M_C)$, 但 $0 \notin \sigma_M(A) \cup \sigma_M(B)$. 这表明

$$\sigma_M(M_C) \not\subset \sigma_M(A) \bigcup \sigma_M(B).$$

例 2　定义算子 $A \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 和 $B \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 为

$$Ax = \Big(\frac{x_1}{1}, 0, \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \cdots\Big),$$

$$Bx = \Big(\frac{x_2}{2}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{6}, \frac{x_8}{8}, \cdots\Big).$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell_2$.

可以证明 $R(A)$ 与 $R(B)$ 均不闭， $d(A) = n(B) = \infty$. 因此，根据定理 3.1 和定理 3.2 可知 $0 \in \bigcup\limits_{C \in \mathcal{B}(\ell_2)} \sigma_M(M_C)$, 但 $0 \notin \bigcap\limits_{C \in \mathcal{B}(\ell_2)} \sigma_M(M_C)$. 事实上，取 $C_1 = 0$, 则 $0 \in \sigma_M(M_{C_1})$, 因此

$$0 \in \bigcup_{C \in \mathcal{B}(\ell_2)} \sigma_M(M_C);$$

取 $C_2 = I$, 那么 $0 \notin \sigma_M(M_{C_2})$, 所以

$$0 \notin \bigcap_{C \in \mathcal{B}(\ell_2)} \sigma_M(M_C).$$

注 2　对例 2 中的算子 A 和 B 来说， $R(A)$ 与 $R(B)$ 均不闭，但存在 $C \in \mathcal{B}(\ell_2)$ 使得 $R(M_C)$ 为闭的．这说明：对算子矩阵 M_C 而言， $R(B)$ 不闭或者 $R(A)$ 和 $R(B)$ 均不闭的情况下，也可能存在 $C \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ 使得 $R(M_C)$ 为闭的．

参　考　文　献

[1] Du Hongke and Deng Chunyan. The representation and characterization of Drazin inverse of operators on a Hilbert space. *Linear Algebra Appl.*, 2005, **407**: 117–124.

[2] 李绍宽．缺项算子矩阵的谱．数学年刊， 2000, **21**(5): 529–532.

[3] 章里程，廖祖华．分块算子矩阵的 Moore-Penrose 逆．数学的实践与认识， 2005, **35**(8): 168–172.
[4] Shao Jiayu and He Jinling. Matrices with doubly signed generalized inverse. *Linear Algebra Appl.*, 2002, **355**: 71–84.
[5] Du Hongke and Pan Jin. Perturbation of spectrums of 2×2 operator matrices. *Pro. Amer. Math. Soc.*, 1994, **121**(3): 761–766.
[6] Cao Xiaohong, Guo Maozheng and Meng Bin. Semi-Fredholm spectrum and Weyl's theorem for operator matrices. *Acta Mathematica Sinica*, 2006, **22**(1): 169–178.
[7] Li Yuan and Du Hongke. The intersection of essential approximate point spectra of operator matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **323**(2): 1171–1183.
[8] 侯国林，阿拉坦仓． 2×2 阶上三角算子矩阵的谱扰动．系统科学与数学， 2006, **26**(3): 257–263.
[9] Apostol C. The reduced minimum modulus. *Michigan Math. J.*, 1985, **32**: 279–294.
[10] Conway J B. A Course in Functional Analysis. New York: Springer-Verlag, 1990.

MOORE-PENROSE SPECTRUMS OF 2×2 UPPER TRIANGULAR OPERATOR MATRICES

HAI Guojun Alatancang

(*School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot* 010021)

Abstract Let H_1 and H_2 be infinite dimensional separable Hilbert spaces. Denote by M_C the 2×2 upper triangular operator matrix acting on $H_1 \oplus H_2$ of the form $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. For given operators $A \in \mathcal{B}(H_1)$ and $B \in \mathcal{B}(H_2)$, the sets $\bigcap\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_M(M_C)$ and $\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}(H_2,H_1)} \sigma_M(M_C)$ are characterized, where $\sigma_M(\cdot)$ denotes the Moore-Penrose spectrum.

Key words 2×2 upper triangular operator matrices, Moore-Penrose invertible, Moore-Penrose spectrum.