系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
25(5) (2005, 10), 533–542

Banach 空间中极大单调算子扰动的值域*

任 卫 云

(南开大学数学科学学院， 天津 300071)

何 震

(河北大学数学与计算机学院， 河北 071002)

摘要 设 X 为实 Banach 空间， $T : D(T) \subset X \to 2^{X^*}$ 为极大单调算子， $C : D(T) \subset X \to X^*$ 为有界算子 (未必连续)，而 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子. 本文在上述假设条件下，通过附加一定的边界条件应用 Leray-Schauder 度理论研究了下述包含关系： $0 \in \overline{(T+C)(D(T) \cap B_Q(0))}$， $0 \in (T+C)(D(T) \cap B_Q(0))$; 以及 $S \subset \overline{R(T+C)}$, $\mathrm{int}S \subset \mathrm{int}R(T+C)$(其中 $S \subset X^*$);$B+D \subset \overline{R(T+C)}$， $\mathrm{int}(B+D) \subset \mathrm{int}R(T+C)$(其中 $B \subset X^*, D \subset X^*$) 的可解性，得出了一些新的结论.

关键词 极大单调算子，强单调算子，全连续算子， Leray-Schauder 度理论.

MR(2000) 主题分类号 47H05, 47H14, 47H11.

1 引言及预备知识

设 X 为自反 Banach 空间， X^* 为其对偶空间，由 Trojanski 定理存在 X 的等价范数使 X 和 X^* 均为局部一致凸的. 因此我们对空间的讨论均是在 X 为自反 Banach 空间且 X 和 X^* 均为局部一致凸空间的假设下进行.

记 $\Gamma = \{\beta | R^+ \to R^+ | \beta(r) \to 0, r \to \infty\}$; 对给定的子集 $A \subset X$, 记 $|A| = \inf\{\|y\| : y \in A\}$.

$\{x_n\} \subset X$ 为一序列，我们记 $x_n \to x_0$ 为强收敛， $x_n \rightharpoonup x_0$ 为弱收敛.

空间 X 的多值算子 $J : X \to 2^{X^*}$ 称为正规对偶映射，定义为

$$J(x) = \{f \in X^* | (f, x) = \|x\|^2 = \|f\|^2\},$$

当 X 为自反 Banach 空间且 X 和 X^* 均为局部一致凸空间时， J 为单值，双方连续，严格单调算子 [1].

映射 $T : D(T) \subset X \to 2^{X^*}$ 称为全连续的，如果 T 是从 X 的弱拓扑到 X^* 的强拓扑连续的.

* 国家自然科学基金 (10271060) 和高校博士点基金 (20010055013) 资助课题.
收稿日期：2003-11-10, 收到修改稿日期：2004-12-31.

算子 $T:X\to X^*$ 称为 demi- 连续的，如果对任何序列 $\{x_n\}\subset D(T)$, 当 $x_n\to x$ 于 X 时，得出 $Tx_n\rightharpoonup Tx$ 于 X^*.

集 $M\subset X\times X^*$ 称为 demi- 闭的，如果由 $x_n\to x$ 于 X, $f_n\rightharpoonup f$ 于 X^* 或者 $x_n\rightharpoonup x$ 于 X, $f_n\to f$ 于 X^* 以及 $[x_n,f_n]\in M$ 得出 $[x,f]\in M$.

映射 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为紧的，如果 T 是连续的，且映 $D(T)$ 中的有界集为 X^* 中的相对紧集.

映射 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为单调的，如果对每一 $x,y\in D(T),u\in Tx,v\in Ty$, 有 $(u-v,x-y)\geq 0$.

映射 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为强单调的，如果对每一 $x,y\in D(T),u\in Tx,v\in Ty$, 有 $(u-v,x-y)\geq\alpha\|x-y\|(\alpha>0)$.

映射 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 称为极大单调的，如果 T 是单调的且对每一 $\lambda>0$ 有 $R(T+\lambda J)=X^*$ 。即对每一 $x\in D(T),u\in Tx$, 当 $(u-u_0,x-x_0)\geq 0$ 时, 可以推得 $x_0\in D(T)$ 且 $u_0\in Tx_0$.

对带紧扰动的极大单调算子的零点和映象问题已有诸多研究结果，特别是 Kartsatos[2] 曾经证明了如下结果.

定理 K 设 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子，而 $C:D(T)\subset X\to X^*$ 为紧算子，假设 $\exists\beta\in\Gamma,Q>0$, 使得 $\forall x\in D(T),\|x\|\geq Q$ 以及 $\forall v^*\in Tx$, 有

$$\langle v^*+Cx,x\rangle\geq-\beta(\|x\|)\|x\|^2,$$

则 $R(T+C+\epsilon J)=X^*,\forall\epsilon\in(0,1)$ 。而且，假设

$$\liminf_{\substack{\|x\|\to\infty\\ x\in D(T)}}\frac{|Tx+Cx|}{\|x\|}>0,$$

则 $\overline{R(T+C)}=X^*$.(进一步) 设下列条件之一成立

(a) $C:\overline{D(T)}\to X^*$ 是全连续的；

(b) 取代 C 的紧性假设，设 $C:\overline{D(T)}\to X^*$ 连续有界而 $(T+J)^{-1}$ 为紧的；

则 $R(T+C)=X^*$.

一个自然的问题是当算子 $C:D(T)\to X^*$ 缺乏连续性条件时，上述定理 K 是否成立？本文的目的之一就是要研究并解决这个问题. 换言之我们研究算子方程

$$Tx+Cx\ni s$$

($s\in X$ 固定) 的可解性, 其中 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子, 而 $C:D(T)\subset X\to X^*$ 为有界算子 (未必连续)，但 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子. 在 T 和 C 满足一定边界条件的假设下，我们获得了 T 和 C 的零点定理和映象定理，改进了以前的相关结果.

下面的引理在本文中起了重要的作用.

引理 1[3] 设 X 为自反 Banach 空间，X^* 为严格凸的，若 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调的，令 $x_0\in D(T),J_{x_0}(x)=J(x-x_0)$, 则对每一 $\lambda>0$, 算子 $(T+\lambda J_{x_0})^{-1}:X^*\to D(T)$ 是处处定义的，单值的， demi- 连续的和有界的. 更进一步地，若 X 是局部一致凸的，则 $(T+\lambda J_{x_0})^{-1}$ 也是连续的.

引理 2 设 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子， $C:D(T)\subset X\to X^*$ 为有界算子， $J:X\to X^*$ 为正规对偶映射，若 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子，则 $C(\lambda T+\mu J)^{-1}$ 亦为紧算子 $(\forall\lambda>0,\forall\mu>0)$.

证　首先证明预解方程 $C(\lambda J+T)^{-1}-C(\mu J+T)^{-1}=(\mu-\lambda)C(\lambda J+T)^{-1}J(\mu J+T)^{-1}$ 成立.

采用递推法，两边右乘 $\mu J+T$ 得 $C(\lambda J+T)^{-1}(\mu J+T)-C=(\mu-\lambda)C(\lambda J+T)^{-1}J$

两边左乘 C^{-1}, 得 $(\lambda J+T)^{-1}(\mu J+T)-I=(\mu-\lambda)(\lambda J+T)^{-1}J$

两边左乘 $\lambda J+T$, 得 $\mu J+T-\lambda J-T=(\mu-\lambda)J$, 成为恒等式，故上式成立.

在所证明的预解方程中令 $\lambda=1$, 则有下式

$$\begin{aligned}C(\mu J+T)^{-1}&=C(J+T)^{-1}-(\mu-1)C(J+T)^{-1}J(\mu J+T)^{-1}\\&=C(J+T)^{-1}[I-(\mu-1)J(\mu J+T)^{-1}],\end{aligned}$$

由引理 1 知， $(\mu J+T)^{-1}$ 和 J 均为有界连续算子，故 $C(\mu J+T)^{-1}$ 连续，且对任何有界集 $\{u\},[I-(\mu-1)J(\mu J+T)^{-1}]u$ 有界，由 $C(J+T)^{-1}$ 紧，可知 $C(\mu J+T)^{-1}$ 紧。由关系式 $C(\lambda T+\mu J)^{-1}(x)=C(T+\frac{\mu}{\lambda}J)^{-1}(\frac{1}{\lambda}x)$ 知， $C(\lambda T+\mu J)^{-1}$ 紧 $(\forall\lambda>0,\forall\mu>0)$.

引理 3[3]　设 X 为 Banach 空间， $\{x_n\}\subset X$, $\{\alpha_n\}$ 为正实数列，且当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$, 给定 $r>0$, 假定对每一个 $h\in X^*$ 和 $\|h\|\le r$ ，存在一个常数 C_h, 使得 $(h,x_n)\le\alpha_n\|x_n\|+C_h$ 对所有 n 成立，则序列 $\{x_n\}$ 是有界的.

2　主要结果

定理 1　设 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子， $C:D(T)\subset X\to X^*$ 为有界算子，且 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子. 假设 $\forall x\in D(T),\|x\|\ge Q>0$ 以及 $\forall u^*\in Tx$, 有

$$\langle u^*+Cx,x\rangle\ge 0 \tag{1}$$

成立，则 $0\in\overline{(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))}$. 进一步，若下列条件之一成立

(a) $C:\overline{D(T)}\to X^*$ 为全连续的；

(b) $(T+J)^{-1}$ 为紧的；

(c) T 为强单调的且 C 为闭的；

则 $0\in(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))$.

证　不失一般性，可假定 $0\in D(T)$ 和 $0\in T0$, 否则取定 $x_0\in D(T),v_0^*\in Tx_0$, $\forall x\in D(\widetilde{T})=D(T)-x_0$, 定义 $\widetilde{T}x=T(x+x_0)-v_0^*,\widetilde{C}x=C(x+x_0)+v_0^*$, 则 $0\in D(\widetilde{T}),0\in\widetilde{T}0$. 易验证 $\widetilde{T}:D(\widetilde{T})\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子， $\widetilde{C}:D(\widetilde{T})\to X^*$ 为有界算子， $\widetilde{C}(\widetilde{T}+J)^{-1}$ 为紧算子. 边界条件 (1) 变为， $\forall x\in D(\widetilde{T})$, 有

$$\langle u^*+\widetilde{C}x,x\rangle\ge 0,\quad\forall u^*\in\widetilde{T}x.$$

考虑同伦方程 $u^*+H(t,u^*)=0$, 其中 $H(t,u^*)=t[C(t^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}tu^*],t\in(0,1],u^*\in X^*$. 定义 $H(0,u^*)=0,\forall u^*\in X^*$.

由假设 $C(T+J)^{-1}$ 为紧的，由引理 2 知， $C(\lambda T+\mu J)^{-1}$ 亦为紧算子 $(\forall\lambda>0,\forall\mu>0)$.

为了应用 Leray-Schauder 度理论，我们必须证明

(i) $H:[0,1]\times X^*\to X^*$ 为连续的；

(ii) $\forall r>0,H([0,1],\overline{B_r(0)})$ 为相对紧集；

(iii) $\exists r>0, \forall t\in[0,1], 0\overline{\in}(I+H(t,\cdot))(\partial B_r(0))$.

一旦 (i)–(iii) 获证，依 Leray-Schauder 度理论

$$d(I+H(1,\cdot),B_r(0),0)=d(I+H(0,\cdot),B_r(0),0)=d(I,B_r(0),0)=1,$$

从而方程 $u^*+H(1,u^*)=0$ 对每一个 $n=1,2,\cdots$ 都是可解的. 设 u_n^* 为其解，并令 $x_n=(T+\frac{1}{n}J)^{-1}u_n^*$, $n=1,2,\cdots$, 则 $Tx_n+Cx_n+\frac{1}{n}Jx_n\ni 0$, $n=1,2,\cdots$, 由边界条件 (1) 知 $x_n\in B_Q(0)$. 从而 $0\in\overline{(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))}$.

现假设 (a) 成立，由 X 为自反的， $\{x_n\}\subset D(T)\cap B_Q(0)$ 为有界序列，可设 $x_n\rightharpoonup x_0\in\overline{D(T)}$, 因而 $Cx_n\to Cx_0(n\to\infty)$,$Tx_n\to -Cx_0(n\to\infty)$, 由 T 的极大单调性知 $G(T)$ 为 demi- 闭的，故 $[x_0,-Cx_0]\in G(T)$, 即 $x_0\in D(T), -Cx_0\in Tx_0$, 且 $0\in Tx_0+Cx_0$, 有 $0\in(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))$.

假设 (b) 成立，注意到 $x_n=(T+J)^{-1}[(1-\frac{1}{n})Jx_n-Cx_n]$, 因 $(T+J)^{-1}$ 为紧的， $\{x_n\}$ 和 $\{Cx_n\}$ 为有界序列，可设 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 又 $Cx_n=C(T+J)^{-1}[(1-\frac{1}{n})Jx_n-Cx_n]$, 而 $C(T+J)^{-1}$ 为紧的，可设 $Cx_n\to y(n\to\infty)$, 由 X 为局部一致凸的，知 J 为连续的，故 $Jx_n\to Jx_0$, 从而 $y=C(T+J)^{-1}(Jx_0-y)=Cx_0, x_0=(T+J)^{-1}(Jx_0-Cx_0)$, 即 $0\in(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))$.

假设 (c) 成立，从关系式 $Cx_n=C(T+J)^{-1}[(1-\frac{1}{n})Jx_n-Cx_n]$ 知 $\{Cx_n\}$ 有一个收敛子列，不妨设 $Cx_n\to y(n\to\infty)$, 从而存在 $v_n^*\in Tx_n$ 使得 $v_n^*\to -y(n\to\infty)$ 。因 T 为强单调的，所以

$$\|Tx_n-Tx_m\|\|x_n-x_m\|\geq\langle Tx_n-Tx_m,x_n-x_m\rangle\geq\alpha\|x_n-x_m\|^2,\quad \alpha>0,$$

即 $\alpha\|x_n-x_m\|\leq\|Tx_n-Tx_m\|\to\|-y-(-y)\|=0(n,m\to\infty)$, 故 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，不妨设 $x_n\to x_0(n\to\infty)$, 因 T 和 C 均为闭算子，有 $x_0\in D(T), -y\in Tx_0$ 且 $y=Cx_0$, 即 $0\in(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))$.

现在我们转向 (i)–(iii) 的证明

$\forall r>0$, $B=B_r(0)$, 先证明 $W=\bigcup\limits_{t\in[0,1]}[(t^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}t\overline{B}]$ 为有界集. 设 $\{t_m\}\subset[0,1], \{u_m^*\}\subset\overline{B}$, 令

$$x_m=\left(t_m^2T+\frac{1}{n}J\right)^{-1}t_mu_m^*,\quad n=1,2,\cdots,$$

则 $\exists v_m^*\in Tx_m$, 使得

$$t_m^2v_m^*+\frac{1}{n}Jx_m=t_mu_m^*,\quad n=1,2,\cdots,$$

有

$$\left\langle t_m^2v_m^*+\frac{1}{n}Jx_m,x_m\right\rangle=\langle t_mu_m^*,x_m\rangle,$$

即

$$\langle t_m^2v_m^*,x_m\rangle+\left\langle\frac{1}{n}Jx_m,x_m\right\rangle=\langle t_mu_m^*,x_m\rangle,$$

而由 T 单调，且 $0\in D(T), 0\in T0$ 知 $\langle v_m^*,x_m\rangle\geq 0$, 故 $\langle\frac{1}{n}Jx_m,x_m\rangle\leq\langle t_mu_m^*,x_m\rangle$,$\frac{1}{n}\|x_m\|\leq\|u_m^*\|$, 这说明 $\{x_m\}$ 是有界的. 从而 $C(t^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}(tu^*)$ 关于 $t\in[0,1]$ 对 $u^*\in\overline{B}$ 是一致有界的。注意到 $\|H(t,u^*)\|\leq t\|C(t^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}tu^*\|$, 立知 $H(t,u^*)\to 0=H(0,u^*)(t\to$

$0), u^* \in \overline{B}$. 特别地， H 在 $(0, u^*)$ 是连续的. 现证 H 在任意 $(t_0, u^*) \in (0,1] \times \overline{B}$ 也是连续的. 设 $(t_m, u_m^*) \in (0,1] \times \overline{B}, (t_m, u_m^*) \to (t_0, u_0^*)(m \to \infty)$, 要证明当 $(t_m, u_m^*) \to (t_0, u_0^*)$ 时, $H(t_m, u_m^*) \to H(t_0, u_0^*)$, 只要证

$$C\Big(t_m^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} t_m u_m^* \to C\Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} t_0 u_0^*$$

即可。令 $y_m = (t_m^2 T + \frac{1}{n} J)^{-1} t_m u_m^*$, $y_0 = (t_0^2 T + \frac{1}{n} J)^{-1} t_0 u_0^*$, 选取 $v_m^* \in T y_m, v_0^* \in T y_0$, 使得

$$t_m^2 v_m^* + \frac{1}{n} J y_m = t_m u_m^*, \tag{2}$$

$$t_0^2 v_0^* + \frac{1}{n} J y_0 = t_0 u_0^*, \tag{3}$$

因 $\{y_m\}$ 和 $\{u_m^*\}$ 均为有界序列，故 $t_m^2 v_m^*$ 也为有界的，由于

$$\begin{aligned} y_m &= \Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} [t_m u_m^* - (t_m^2 - t_0^2) v_m^*] \\ &= \Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} \Big[t_m u_m^* - \frac{(t_m^2 - t_0^2)}{t_m^2} t_m^2 v_m^*\Big], \end{aligned}$$

当 $(t_m, u_m^*) \to (t_0, u_0^*)$ 时，有

$$C y_m = C\Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} \Big[t_m u_m^* - \frac{(t_m^2 - t_0^2)}{t_m^2} t_m^2 v_m^*\Big] \to C\Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} (t_0 u_0^*) = C y_0.$$

这就证明了 $H: [0,1] \times \overline{B} \to X^*$ 在任意 $t_0 u_0^* \in (0,1] \times \overline{B}$ 为连续的，从而 (i) 获证.

为证 (ii), 令 $K = \{tC(t^2 T + \frac{1}{n} J)^{-1} t u^* : u^* \in \overline{B}, t \in (0,1]\} \bigcup \{0\}$, 则 $\overline{K}$ 为紧集。事实上，设 $\{y_m\} \subset K$, 则 $\exists \{t_m\} \subset (0,1], \{u_m^*\} \subset \overline{B}$, 使得

$$y_m = t_m C\Big(t_m^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} t_m u_m^*,$$

令 $x_m = (t_m^2 T + \frac{1}{n} J)^{-1} t_m u_m^*$, 则

$$t_m^2 v_m^* + \frac{1}{n} J x_m = t_m u_m^*, \quad v_m^* \in T x_m. \tag{4}$$

因 $\{t_m u_m^*\}$ 为有界的, 故 $\{x_m\}$ 必为有界的, 若存在某子列 $\{t_{m_j}\} \subset \{t_m\}$, 使 $t_{m_j} \to 0 (j \to \infty)$, 则存在某子列 $\{y_{m_j}\} \subset \{y_m\}$, 使 $y_{m_j} \to 0 (j \to \infty)$, 因此，我们可以假设 $\tau = \inf\limits_{m \geq 0} \{t_m\} > 0$ 。由 (4) 知 $\{t_m^2 v_m^*\}$ 为有界序列，今取定 $t_0 \in (0,1]$, 得

$$t_0^2 v_m^* + \frac{1}{n} J x_m = t_m u_m^* - (t_m^2 - t_0^2) v_m^*.$$

从而

$$x_m = \Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} [t_m u_m^* - (t_m^2 - t_0^2) v_m^*],$$

$$C x_m = C\Big(t_0^2 T + \frac{1}{n} J\Big)^{-1} [t_m u_m^* - (t_m^2 - t_0^2) v_m^*].$$

因 $\{t_m^2u_m^*\}$ 和 $\{t_m^2v_m^*\}$ 均为有界序列，注意到 $\frac{|t_m^2-t_0^2|}{t_m^2}\le\frac{2}{\tau^2}$, 故 $\{\frac{|t_m^2-t_0^2|}{t_m^2}t_m^2v_m^*\}$ 为有界序列，且 $C(t_0^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}$ 为紧算子，故有子列 $\{Cx_{m_j}\}\subset\{Cx_m\}$, 使 $Cx_{m_j}\to y(j\to\infty)$, 从而有子列 $\{y_{m_j}\}\subset\{y_m\}$, 使 $y_{m_j}\to y_1(j\to\infty)$, 即 $\overline{K}$ 为紧集.

假设 (iii) 不成立，则存在 $\{t_m\}\subset(0,1],\{u_m^*\}\subset X^*,\|u_m^*\|\to\infty$ 使得

$$u_m^*=-t_m\Big[C\Big(t_m^2T+\frac{1}{n}J\Big)^{-1}t_mu_m^*\Big],\tag{5}$$

令 $x_m=(t_m^2T+\frac{1}{n}J)^{-1}t_mu_m^*$ 则存在 $v_m^*\in Tx_m$, 使得

$$t_m^2v_m^*+\frac{1}{n}Jx_m=t_mu_m^*,\tag{6}$$

由 (5) 及 (6) 得

$$t_m^2v_m^*+\frac{1}{n}Jx_m+t_m^2Cx_m=0.\tag{7}$$

因 $\|u_m^*\|\le\|Cx_m\|$, C 为有界算子，故 $\{x_m\}$ 必为无界序列，不妨设 $\|x_m\|\to\infty(m\to\infty)$，从而 $\exists m_0$, 当 $m\ge m_0$ 时， $\|x_m\|\ge Q$, 由 (7) 及边界条件 (1) 得

$$0=\Big\langle t_m^2v_m^*+\frac{1}{n}Jx_m+t_m^2Cx_m,x_m\Big\rangle=t_m^2\langle v_m^*+Cx_m,x_m\rangle+\frac{1}{n}\|x_m\|^2\ge\frac{1}{n}\|x_m\|^2\to\infty.$$

$(m\to\infty)$ 矛盾！此矛盾表明存在某 $r>0$, 使得 $\forall t\in[0,1],0\overline{\in}(I+H(t,\cdot))(\partial B_r(0))$. 这就完成了 (iii) 的证明. 从而定理 1 证毕.

推论 1 T 和 C 如定理 1 所述，但满足边界条件 (h): 假设 $\exists\beta\in\Gamma,Q>0$, 使得 $\forall x\in D(T),\|x\|\ge Q$ 以及 $\forall v^*\in Tx$, 有

$$\langle v^*+Cx,x\rangle\ge-\beta(\|x\|)\|x\|^2\tag{8}$$

成立，则 $R(T+C+\epsilon J)=X^*,\forall\epsilon\in(0,1)$ 。而且若进一步假设

$$\liminf_{\substack{\|x\|\to\infty\\x\in D(T)}}\frac{|Tx+Cx|}{\|x\|}>0,\tag{9}$$

则 $\overline{R(T+C)}=X^*$ 。若定理 1 的 (a)(b)(c) 之一成立，则 $R(T+C)=X^*$.

证 $\forall\epsilon\in(0,1)$, 令 $S=T+\epsilon J$, 则 $S:D(S)=D(T)\to2^{X^*}$ 为极大单调的，且 $C(S+J)^{-1}$ 为紧的.

设 $p\in X^*$ 给定，则 $\exists Q_1\ge Q>0$ 和 $\beta\in\Gamma$, 使得 $\forall x\in D(S),\|x\|\ge Q_1$ 以及 $\forall v^*\in Sx$, 有

$$\langle v^*+Cx-p,x\rangle=\langle u^*+Cx-p+\epsilon Jx,x\rangle\ge(\epsilon-\beta(\|x\|))\|x\|^2-\|p\|\|x\|\ge0,$$

其中 $u^*\in Tx$. 依定理 1 知 $p\in(S+C)(D(S)\cap B_{Q_1}(0))$, 即 $R(T+C+\epsilon J)=X^*$， $\forall\epsilon\in(0,1)$ 。取 $\epsilon=\frac{1}{n}$, 则 $\exists x_n\in D(T)$, 使得 $Tx_n+Cx_n+\frac{1}{n}Jx_n\ni p$, 从而对某 $v_n^*\in Tx_n,v_n^*+Cx_n+\frac{1}{n}Jx_n=p$. 若条件 (9) 满足，则

$$\begin{aligned}\alpha&=\liminf_{\substack{\|x\|\to\infty\\x\in D(T)}}\frac{|Tx+Cx|}{\|x\|}\le\liminf_{\|x_n\|\to\infty}\frac{|Tx_n+Cx_n|}{\|x_n\|}\le\liminf_{\|x_n\|\to\infty}\frac{\|v_n^*+Cx_n\|}{\|x_n\|}\\&=\liminf_{\|x_n\|\to\infty}\frac{\|p-\frac{1}{n}Jx_n\|}{\|x_n\|}\le\liminf_{\|x_n\|\to\infty}\Big[\frac{1}{n}+\frac{\|p\|}{\|x_n\|}\Big]=0.\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 必为有界序列，从而 $\frac{1}{n}Jx_n \to 0(n\to\infty)$, 因此， $p\in\overline{R(T+C)}$, 即 $\overline{R(T+C)}=X^*$. 其余部分证明类似于定理 1 相应部分的证明，从略.

定理 2　设 $T:D(T)\subset X\to 2^{X^*}$ 为极大单调算子， $C:D(T)\subset X\to X^*$ 为有界算子，且 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子。 $S\subset X^*$ 满足：当 $\|x\|$ 充分大时，对每一 $s\in S$, 存在 $x_s\in D(T), K(s)>0$, 和 $\beta=\beta_s\in \varGamma$ 使得

$$(v^*+Cx-s,x-x_s)\geq -K(s)-\beta(\|x\|)\|x\| \tag{10}$$

$\forall x\in D(T),\forall v^*\in Tx$ 成立，则 $S\subset\overline{R(T+C)}$. 更进一步地，若下列条件之一成立

(a) $C:\overline{D(T)}\to X^*$ 为全连续的；

(b) $(T+J)^{-1}$ 为紧的；

(c) T 为强单调的且 C 为闭的；

则 $\mathrm{int}S\subset\mathrm{int}R(T+C)$.

证　给定 $s\in S,\exists x_s\in D(T)$ 使得 (10) 成立。考虑下列包含关系

$$Tx+Cx+\frac{1}{n}J(x-x_s)\ni s \tag{11}$$

或等价地

$$y+C(T+\frac{1}{n}J_{x_s})^{-1}y-s=0. \tag{12}$$

由假设 $C(T+J)^{-1}$ 为紧的，由引理 2 知， $C(\lambda T+\mu J)^{-1}$ 亦为紧算子 $(\forall\lambda>0,\forall\mu>0)$ 。依 Leray-Schauder 度理论，若方程 $y+t[C(T+\frac{1}{n}J_{x_s})^{-1}y-s]=0$ 的所有解 $\forall t\in[0,1]$ 是一致有界的，则 (11) 及 (12) 是可解的．假设不成立，则存在序列 $\{y_m\}\subset X^*,\{t_m\}\subset(0,1]$, 使得 $y_m+t_m[C(T+\frac{1}{n}J_{x_s})^{-1}y_m-s]=0$ 且 $\|y_m\|\to\infty$, 令 $x_m=(T+\frac{1}{n}J_{x_s})^{-1}y_m$, 则 $\exists v_m^*\in Tx_m$ 使得 $y_m=v_m^*+\frac{1}{n}J(x_m-x_s)$, 则 $v_m^*+\frac{1}{n}J(x_m-x_s)+t_mCx_m-t_ms=0$, 则 $\|y_m\|=\|t_m(Cx_m-s)\|\leq\|Cx_m\|+\|s\|$, 由于 C 是有界的， $\|y_m\|\to\infty$ 意味着 $\|x_m\|\to\infty$, 由 $\frac{1}{n}J(x_m-x_s)=-v_m^*-t_mCx_m+t_ms$, 利用 T 的单调性及 (10) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\|x_m-x_s\|^2&=-t_m(v_m^*+Cx_m-s,x_m-x_s)-(1-t_m)(v_m^*,x_m-x_s)\\&\leq K(s)+\beta(\|x_m\|)\|x_m\|-(1-t_m)(v_m^*,x_m-x_s)\\&\leq K(s)+\beta(\|x_m\|)\|x_m\|+\|v_m^*\|\|x_m-x_s\|.\end{aligned}$$

显然和 $\|x_m\|\to\infty$ 相矛盾。故 (11) 及 (12) 是可解的．令 $\{x_n\}$ 为 $Tx+\frac{1}{n}J(x-x_s)+Cx\ni s$ 的解，若 $\{x_n\}$ 是无界的，不妨设 $\|x_n\|\to\infty$ ，则由 (10)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(J(x_n-x_s),x_n-x_s)&=-(v_n^*+Cx_n-s,x_n-x_s)\\&\leq K(s)+\beta(\|x_n\|)\|x_n\|,\quad n=1,2,\cdots,\ v_n^*\in Tx_n,\end{aligned}$$

则 $\frac{1}{n}\|x_n-x_s\|\to 0(n\to\infty)$, 则 $s\in\overline{R(T+C)}$, 则 $S\subset\overline{R(T+C)}$.

下证 $\mathrm{int}S\subset\mathrm{int}R(T+C)$ 。给定 $s\in\mathrm{int}S$, 存在 $h\in\overline{B_r(0)}(r>0)$, 使得 $s+h\in S$, 设 x_n 为 $Tx+\frac{1}{n}J(x-x_s)+Cx\ni s$ 的解，则 $\exists v_n^*\in Tx_n$, 有

$$v_n^*+\frac{1}{n}J(x_n-x_s)+Cx_n-(s+h)=-h,$$

则 $(h, x_n - x_{s+h}) = -(v_n^* + Cx_n - (s+h), x_n - x_{s+h}) - \frac{1}{n}(J(x_n - x_s), x_n - x_{s+h})$ 假定 $\|x_n\| \to \infty (n \to \infty)$, 则

$$\begin{aligned}(h, x_n) =&(h, x_{s+h}) - (v_n^* + Cx_n - (s+h), x_n - x_{s+h}) \\ &- \frac{1}{n}(J(x_n - x_s), x_n - x_{s+h}) \\ \leq&(h, x_{s+h}) + K(s+h) + \beta(\|x_n\|)\|x_n\| \\ &- \frac{1}{n}(J(x_n - x_s), x_n - x_s + (x_s - x_{s+h})) \\ \leq&(h, x_{s+h}) + K(s+h) + \beta(\|x_n\|)\|x_n\| - \frac{1}{n}[\|x_n - x_s\|^2 \\ &- \frac{1}{2}(\|x_n - x_s\|^2 + \|x_s - x_{s+h}\|^2)] \\ \leq&(h, x_{s+h}) + K(s+h) + \beta(\|x_n\|)\|x_n\| + \frac{1}{2}\|x_s - x_{s+h}\|^2 \\ \leq&M(h) + \beta(\|x_n\|)\|x_n\|.\end{aligned}$$

其中 $M(h)$ 是仅依赖于 h 的常数，由引理 3 知，$\{x_n\}$ 是有界的，矛盾！故 $\{x_n\}$ 是有界的. 其余部分证明类似于定理 1 相应部分的证明，从略.

定理 3 设 $T: D(T) \to 2^{X^*}$ 为极大单调算子，$C: \overline{D(T)} \to X^*$ 为有界算子，且 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子。令 $\beta \in \Gamma, B \subset X^*, D \subset X^*, Q > 0$, 若当 $x \in D(T)$ 且 $\|x\| \geq Q$ 时，对每一 $(p,q) \in B \times D$ 存在一常数 $K(p,q) > 0$ 使得

$$\langle v^* - p, x\rangle \geq -K(p,q) - \beta(\|x\|)\|x\|,$$

$$\langle Cx - q, x\rangle \geq -K(p,q) - \beta(\|x\|)\|x\|.$$

$\forall x \in D(T), \forall v^* \in Tx$ 成立，则 $B + D \subset \overline{R(T+C)}$. 更进一步地，若下列条件之一成立

(a) $C: \overline{D(T)} \to X^*$ 为全连续的；

(b) $(T+J)^{-1}$ 为紧的；

(c) T 为强单调的且 C 为闭的；

则 $\mathrm{int} S \subset \mathrm{int} R(T+C)$.

证 给定 $s \in X^*$, 考虑下列包含关系

$$Tx + Cx + \frac{1}{n}Jx \ni s, \tag{13}$$

或等价地

$$u^* + C(T + \frac{1}{n}J)^{-1}u^* - s = 0. \tag{14}$$

由于 $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子，由引理 2 知，$\forall \lambda > 0, \mu > 0$, $C(\lambda T + \mu J)^{-1}$ 为紧的. 依 Leray-schauder 度理论，若方程 $u^* + t[C(T + \frac{1}{n}J)^{-1}u^* - s] = 0$ 的所有解对于 $t \in [0,1]$ 是一致有界的，则 (13) 及 (14) 是可解的。假设不真，则存在 $\{u_m^*\} \subset X^*$ 和 $\{t_m\} \subset (0,1]$ 使得 $u_m^* + t_m[C(T + \frac{1}{n}J)^{-1}u_m^* - s] = 0$, 且 $\|u_m^*\| \to \infty$.

令 $x_m = (T + \frac{1}{n}J)^{-1}u_m^*$, 则 $v_m^* + \frac{1}{n}Jx_m = u_m^*$ (其中 $v_m^* \in Tx_m$), 故 $v_m^* + \frac{1}{n}Jx_m + t_mCx_m - t_ms = 0$, 则 $\|u_m^*\| = \|t_m(Cx_m - s)\| \leq \|Cx_m\| + \|s\|$, 由 C 是有界的，故由 $\|u_m^*\| \to \infty$ 可得

$\|x_m\| \to \infty$, 由 $\frac{1}{n}Jx_m = -v_m^* - t_mCx_m + t_ms$ 可得 $\langle \frac{1}{n}Jx_m, x_m\rangle = \langle -v_m^* - t_mCx_m + t_ms, x_m\rangle$. 令 $(p,q) \in B \times D, s = p + q$, 应用边界条件得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\|x_m\|^2 &= -\langle v_m^* - t_mp, x_m\rangle - t_m\langle Cx_m - q, x_m\rangle \\ &= -\langle v_m^* - p, x_m\rangle - (1-t_m)\langle p, x_m\rangle - t_m\langle Cx_m - q, x_m\rangle \\ &\le 2k(p,q) + 2\beta(\|x_m\|)\|x_m\| + \|p\|\|x_m\|.\end{aligned}$$

易知 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是有界的 (否则将推出 $\|p\| \to \infty$, 与 $p \in X^*$ 矛盾), 矛盾！故 (13) 及 (14) 式是可解的.

设 $\{x_n\}$ 为 (13) 式的解，且 $\|x_n\| \ge Q, s = p + q$, 则存在 $v_n^* \in Tx_n$ 使得 $v_n^* + Cx_n + \frac{1}{n}Jx_n = s = p + q$, 则 $(\frac{1}{n}Jx_n, x_n) = -(v_n^* - p, x_n) - (Cx_n - q, x_n)$, 利用边界条件知 $\frac{1}{n}\|x_n\|^2 \le 2K(p,q) + 2\beta(\|x_n\|)\|x_n\|$, 故 $\frac{1}{n}x_n \to 0$, 当 $n \to \infty$ 时. 故 $s \in \overline{R(T+C)}$, 即 $B+D \subset \overline{R(T+C)}$.

下证第二个包含关系, 令 $s\in\mathrm{int}(B+D)$, 则存在 $r > 0$, 使得 $s+h = p_h+q_h \in B+D$, 其中 $h \in \overline{B_r(0)}, (p_h, q_h) \in (B, D)$. 设 $\{x_n\}$ 为 (13) 式的解且 $\|x_n\| \ge Q, s = p+q$, 则存在 $v_n^* \in Tx_n$ 使得 $v_n^*+Cx_n+\frac{1}{n}Jx_n = s = p_h+q_h-h$, 则 $\langle v_n^*-p_h, x_n\rangle+\langle Cx_n-q_h, x_n\rangle+\frac{1}{n}\langle Jx_n, x_n\rangle = -\langle h, x_n\rangle$, 由边界条件可得 $\langle h, x_n\rangle \le 2K(p_h, q_h) + 2\beta(\|x_n\|)\|x_n\|$, 令 $2K(p_h, q_h) = C_h, 2\beta(\|x_n\|) = \alpha_n$, 则由引理 3 可得 $\{x_n\}$ 是有界的. 其余部分证明类似于定理 1 相应部分的证明，从略.

推论 2　设 $T: X \supset D(T) \to 2^{X^*}$ 为极大单调的，$C: \overline{D(T)} \to X^*$ 为有界的，$C(T+J)^{-1}$ 为紧算子， $\beta \in \varGamma, Q > 0$ 。若当 $\|x\| \ge Q$ 时，对每一 $x_0 \in D(T), y_0 \in D(C), u_0^* \in Tx_0$ 存在一常数 $K(u_0^*, y_0) > 0$ 使得

$$\langle u^* - u_0^*, x\rangle \ge -K(u_0^*, y_0) - \beta(\|x\|)\|x\|,$$

$$\langle Cx - Cy_0, x\rangle \ge -K(u_0^*, y_0) - \beta(\|x\|)\|x\|,$$

对所有 $x \in D(T), u^* \in Tx$ 成立, 更进一步地, 若定理 3 中 (a)(b)(c) 之一成立, 则有 $R(T+C) \simeq R(T) + R(C)$.

证　在定理 3 中令 $B = R(T), D = R(C)$, 则有 $R(T) + R(C) \subset \overline{R(T+C)}$ 且 $\mathrm{int}(R(T) + R(C))\subset\mathrm{int}R(T+C)$. 证毕.

推论 3　$T: X \supset D(T) \to 2^{X^*}$ 为极大单调的， $C: \overline{D(T)} \to X^*$ 为有界的， $C(T+J)^{-1}$ 为紧算子， $\beta \in \varGamma, c_1 > 0, Q > 0$. 若当 $\|x\| \ge Q$ 时，对每一 $x_0 \in D(T), u_0^* \in Tx_0$ 存在一常数 $K(u_0^*) > 0$ 使得

$$\langle u^* - u_0^*, x\rangle \ge -K(u_0^*) - \beta(\|x\|)\|x\|,$$

$$\langle Cx, x\rangle \ge -c_1 - \beta(\|x\|)\|x\|,$$

对所有 $x \in D(T), u^* \in Tx$ 成立，则 $R(T) \subset \overline{R(T+C)}$. 更进一步地，若定理 3 中 (a)(b)(c) 之一成立，则有 $\mathrm{int}R(T)\subset\mathrm{int}R(T+C)$.

证　在定理 3 中令 $B = R(T), D = \{0\}$ 即可.

参　考　文　献

[1] Zeider E. Nonlinear Funtional Analysis and its Applications. Vol II(B),Nonlin-ear Monotone Operators, Spinger Verlag. Berlin, 1990.

[2] kartsatos A G. New results in the perturbation theory of m-accretive operators in Banach spaces. *Tran. Amer. Math. Soc.*, 1996, **348**(3): 1663–1707.

[3] Guan Z and Kartsatos A G. Range of perturbed maximal monotone and m-accretive operators in Banach spaces. *Tran. Amer. Math. Soc.*, 1995, **347**(7): 2403–2435.

[4] 周海云，Kartsatos A G. Banach 空间中带扰动的 m- 增生算子的零点与映象定理. 系统科学与数学，2001, **21**(4): 446–454.

[5] 何震. 伪单调算子紧扰动的值域. 应用泛函分析学报， 2000, **2**(3): 264–270.

[6] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Evolution Equations in Banach spaces. Noorhoff, Leyden, 1978.

[7] Dan Pascali and Silviu Sburlan. Nonlinear Mappings of Monotone Type. Editura Academiei, Bucuresti, Romania. 1978.

[8] 赵义纯. 非线性泛函分析及其应用. 北京：高等教育出版社， 1989.

[9] Guan Z. Ranges of operators of monotone type in Banach spaces. *Math. Anal. Appl.*, 1993, **174**: 256–264.

RANGES OF PERTURBED MAXIMAL MONOTONE OPERATORS IN BANACH SPACES

Ren Weiyun

(*College of Mathematics Science , Nankai University , Tianjian* 300071)

He Zhen

(*College of Mathematics and Computer, Hebei University, Hebei Baoding* 071002)

Abstract Let X be a real Banach space, $T : D(T) \subset X \to 2^{X^*}$ be a maximal monotone operator , $C : D(T) \subset X \to X^*$ be bounded (but need not to be continuous) and $C(T+J)^{-1}$ be a compact operator. Under the above conditions, by adding certain boundary and making use of Leray-Schauder degree theory, in this paper we study the solvability of the following inclusions: $0 \in \overline{(T+C)(D(T)\cap B_Q(0))}$, $0 \in (T+C)(D(T)\cap B_Q(0))$; and $S \subset \overline{R(T+C)}$, int$S\subset$int$R(T+C)$ (where $S \subset X^*$); and $B+D \subset \overline{R(T+C)}$, int$(B+D)\subset$int$R(T+C)$ (where $B \subset X^*$ and $D \subset X^*$). Based on this, we derive some new conclusions.

Key words Maximal monotone operator, strongly monotone operator , completely continuous operator , Leray-Schauder degree theory